

























pat 7  
m 774  
447 L 96  
Smith  
61

# ACTA UNIVERSITATIS LUNDENSIS

NOVA SERIES

---

## LUNDS UNIVERSITETS ÅRSSKRIFT

NY FÖLJD

---

ANDRA AFDELNINGEN

MEDICIN SAMT MATEMATISKA OCH NATURVETENSKAPLIGA ÄMNER

VII

1911

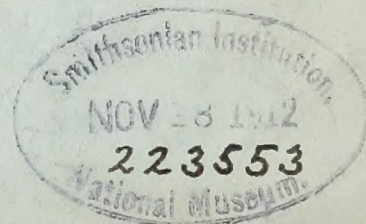
(K. FYSIOGRAFISKA SÄLLSKAPETS I LUND HANDLINGAR. N. F. XXII)

---

LUND 1911—12

HÅKAN OHLSSONS BOKTRYCKERI

DISTRIBUERAS GENOM C. W. K. GLEERUPS FÖRLAG I LUND





# Fysiografiska Sällskapet's Handlingar.

Bd. 1—21.

Bd. 1. Antiseptikens utveckling och nutida tillämpning, af *J. Borelius*. Om operationer på gallblåsan och gallvägarne särskildt vid cholelithiasis, af *J. Åkerman*. Till Algernas systematik, Afd. 6, af *J. G. Agardh*. Undersökning öfver Siljansområdets graptoliter, I, af *S. L. Törnqvist*. Fysiografiska Sällskapet's sammanträden, 1889—90. Lunds Universitets årsberättelse 1889—90, af Universitetets Rektor. — **Bd. 2.** Kliniska studier öfver bukorganens lägeförändringar, af *C. H. Hildebrand*. Om bestämning af drufsocker genom förjäsning och uppmätning af kolsyrans volum, af *S. G. Hedin*. Bidrag till kännedomen om platina-sulfidbasernas konstitution, af *H. Löndahl*. Beiträge zur Kenntnis des Dickenzuwachses der Rhodophyteen, von *B. Jönsson*. Beiträge zur Flora von Südösnien und Herzegowina, von *S. Murbeck*. Tvenne asplenier, deras affiniteter och genesis, af *S. Murbeck*. Bidrag till kännedomen om primära barken hos vedartade dikotylter, dess anatomi och dess funktioner, af *H. Tedin*. Fysiografiska Sällskapet's sammanträden 1890—91. Borgerlig tid och världstid, inbjudningsskrift af Universitetets Rektor. — **Bd. 3.** Un nouveau galvanomètre, par *G. Granqvist*. Sur la théorie des oscillations électriques, par *A. Rosén*. Om toluolsulfonglycin, af *G. Wallin*. Beiträge zu Fauna Grönlands, von *D. Bergendal*. Ehrenbergs *Euchlanis Lynceus* wiedergefunden? von *D. Bergendal*. *Analecta algologica*, scr. *J. G. Agardh*. Studier öfver örtartade slingrande stammars jämförande anatomi, af *G. Andersson*. Bidrag till kännedomen om lycopodinébladens anatomi, af *J. Eriksson*. Ueber die Wirkungsphäre der Glycose- und Gerbstoffreaktionen, von *B. Lidforss*. Undersökningar öfver Siljansområdets graptoliter, II, af *S. L. Törnqvist*. Studier öfver bryozoerna i Sveriges kritsystem, I, af *A. Hennig*. Fysiografiska Sällskapet's sammanträden 1891—92. — **Bd. 4.** Öfver ett speciellt slag af hvirvelrörelse i vätskor, af *A. Wiman*. Zur Frage über die Constitution der aromatischen Diazoverbindungen, von *C. W. Blomstrand*. Inverkan af alkoholiskt natriumetylrat på ättikester och benzaldehyd, af *Hj. Löndahl*. Om trypsindigestionen, af *S. G. Hedin*. Bidrag till kännedomen om hornsubstansens klyfningsprodukter, af *S. G. Hedin*. *Polypostia similis* n. g. n. sp., en acotyl polyklad med många hanliga parningsapparater, af *D. Bergendal*. Einige Bemerkungen über *Cryptocelides Lovéni* mihi, af *D. Bergendal*. Some remarks on the Bottlenose-Wahle (*Hyperoodon*), by *A. Ohlin*. *Analecta algologica*, continuatio I, auct. *J. G. Agardh*. Iakttagelser öfver ljusets betydelse för fröns groning, af *B. Jönsson*. Studier öfver elaiosferer i örtbladens mesotyll och epidermis, af *B. Lidforss*. Observations on the structure of some *Diprionidae*, by *S. L. Törnqvist*. Inbjudningsskrift till filosofie doktorspromotionen d. 27 maj 1893, af Promotor. Inbjudningsskrift till medicine doktorspromotionen d. 27 maj 1893, af Promotor. Fysiografiska Sällskapet's sammanträden 1892—93. — **Bd. 5.** Studier öfver förändringarne i ammonshornen och närliggande delar vid epilepsi, af *Th. Nerander*. Zur Theorie der Transformation elliptischer Functionen, von *T. Brodén*. Undersökningar öfver den elektriska ljusbågen, af *G. Granqvist*. Versuche über den temporären Magnetismus des Eisens und des Nickels bei hohen Temperaturen, von *N. Grane*. Bidrag till kännedomen om sulfonglycinerna, af *L. Fr. Rosengren*. Studier öfver ciliata infusorier, I, af *H. Wallengren*. *Analecta algologica*, continuatio II, auct. *J. G. Agardh*. Studier öfver bryozoerna i Sveriges kritsystem, II, af *A. Hennig*. Inbjudningsskrift till filosofie doktorspromotionen i Lund d. 31 maj 1894, af Promotor. Fysiografiska Sällskapet's sammanträden 1893—94. — **Bd. 6.** Zur Frage über die Constitution der aromatischen Diazoverbindungen und ihrer Isomere, von *C. W. Blomstrand*. Sur le développement de l'électricité au contact de l'air et le Peau, par *K. A. Holmgren*. Berechnung der Bahn des Kometen 1890 II, von *Elis Strömgren*. Beiträge zur Biologie der geophilen Pflanzen, von *F. W. C. Areschoug*. Iakttagelser öfver tillväxten hos *Orobanchae*-arter, af *B. Jönsson*. Studier till kännedom om malakostrakfaunan i Baffin Bay och Smith Sound, af *A. Ohlin*. Studier öfver ciliata infusorier, II, af *H. Wallengren*. Fysiografiska Sällskapet's sammanträden 1894—95. — **Bd. 7.** Öfver bestämning af induktionskonstanter med differential-vibrationsgalvanometer, af *G. Granqvist*. *Analecta algologica*, continuatio III, auct. *J. G. Agardh*. Zur Kenntnis des anatomischen Baues des Blattes, von *B. Jönsson*. Studier öfver turbellariier, II, af *D. Bergendal*. Fysiografiska Sällskapet's sammanträden 1895—96. Lunds Universitets årsberättelse, af Universitetets Rektor. — **Bd. 8.** Ueber das Auftreten von Lähmungen nach Masern, von *Karl Petré*. Om stenosis och obliteration af aorta vid eller i närheten af ductus Botalli, af *E. Wadstein*. Functionentheoretische Bemerkungen und Sätze, von *T. Brodén*. Basiska eruptiver inom V. Silfbergfältet i Dalarne, af *M. Weibull*. On the *Diplograptidae* and *Heteroprionidae* of the Scanian Rastrites beds, by *S. L. Törnqvist*. Revision af lamelli-branchiaterne i Nilssons »Petrificata Suecana Formationis Cretaceæ», af *A. Hennig*. Bidrag till kännedomen om larven af *Phalacroceras replicata* (Lin.), af *S. Bengtsson*. Bidrag till kännedomen om Fam. *Urceolarina* Stein, af *H. Wallengren*. *Analecta algologica*, continuatio IV, auct. *J. G. Agardh*. Ueber die physiologische Leistungen und die Entwicklung des Grundgewebes des Blattes, von *F. W. C. Areschoug*. Zur Physiologie des pflanzlichen Zellkernes, von *B. Lidforss*. Contributions à la connaissance des Renonculacées—Cucurbitacées de la flore du Nord-Ouest de l'Afrique, par *S. Murbeck*. Bidrag till kännedomen om de nödvändiga mineralbasernas funktioner i de högre växterna, af *A. Romanus*. Om cyperaceerna, inbjudning till filosofie doktorspromotionen d. 31 maj 1897, af Promotor. Fysiografiska Sällskapet's sammanträden 1896—97. — **Bd. 9.** Der Fettgehalt der Moose, von *B. Jönsson* und *E. Olin*. Elektrische und magnetische Theorien, von *A. V. Bäcklund*. Några konsekvenser af Webers lag för elektriska massor, tillämpad på materiella punkter, af *C. Delin*. Iakttagelser öfver tillväxtriktningen hos mossorna, af *B. Jönsson*. Grunddragen af en kometteori, af *J. R. Rydberg*. Kullens kristalliniska bergarter. 1. Den prekambrika Granitit-, Banatit-, Hypersthengabbrosen, af *A. Hennig*. Contributions à la connaissance des Primulacées-Labiées de la flore du Nord-Ouest de l'Afrique et plus spécialement de la Tunisie, par *S. Murbeck*. Fysiografiska Sällskapet's sammanträden 1897—98. — **Bd. 10.** Researches into the *Monograptidae* of the Scanian Rastrites beds, by *S. L. Törnqvist*. Om egendomliga innehållskroppar hos bromeliaceerna, af *G. Wallin*. Contribution à la connaissance des Plombaginées-Graminées de la flore du Nord-Ouest de l'Afrique et plus spécialement de la Tunisie, par *S. Murbeck*. *Analecta algologica*, continuatio V, auct. *J. G. Agardh*. Kullens kristalliniska bergarter. 2. Den postsiluriska gångformationen, af *A. Hennig*. Studien über Rheotropismus bei den Keimwurzeln der Pflanzen. I. Allgemeine Untersuchungen, von *A. Berg*. Tafeln zur Berechnung der Präcession zweiter Ordnung für 1900,0, von *A. A. Psilander*. Fysiografiska Sällskapet's sammanträden 1898—99. — **Bd. 11.** Contributions à la connaissance des Graminées-Polypodiacees de la flore du Nord-Ouest de l'Afrique et plus spécialement de la Tunisie avec un appendice, par *S. Murbeck*. Studier öfver ciliata infu-



3 506.485

# ACTA UNIVERSITATIS LUNDENSIS

NOVA SERIES

---

## LUNDS UNIVERSITETS ÅRSSKRIFT

NY FÖLJD

---

2<sup>nd</sup>  
ANDRA AFDELNINGEN

MEDICIN SAMT MATEMATISKA OCH NATURVETENSKAPLIGA ÄMNEN

VII

1911

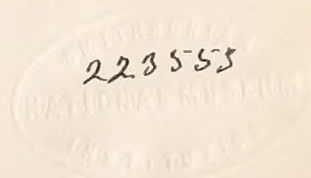
(K. FYSIOGRAFISKA SÄLLSKAPETS I LUND HANDLINGAR. N. F. XXII)

---

LUND 1911

HÅKAN OHLSSONS BOKTRYCKERI

DISTRIBUERAS GENOM C. W. K. GLEERUPS FÖRLAG I LUND









ACTA REGIÆ SOCIETATIS PHYSIOGRAPHICÆ  
LUNDENSIS

---

KONGL. FYSIOGRAFISKA SÄLLSKAPETS I LUND  
HANDLINGAR

NY FÖLJD

XXII

1911

(LUNDS UNIVERSITETS ÅRSSKRIFT. N. F. AFD. 2 BD 7)

---

LUND 1911

HÅKAN OHLSSONS BOKTRYCKERI

DISTRIBUERAS GENOM C. W. K. GLEERUPS FÖRLAG I LUND







## Innehåll:

1. BLOCK, HENRIK, Några variationsformler inom integralekvationernas teori (s. 1—34).
2. SIEGBAHN, MANNE, Magnetische Feldmessung (S. 1—65).
3. PETRÉN, LOUISE, Extension de la méthode de Laplace aux équations

$$\sum_{i=0}^{n-1} A_{1i}(x, y) \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^n A_{0i}(x, y) \frac{\partial^i z}{\partial y^i} = 0 \quad (\text{p. 1—165}).$$

4. CHARLIER, C. V. L., Die Lagrange'sche Gleichung im Bahnbestimmungsproblem (S. 1—18).
5. ROSÉN, NILS, Contributions to the Fauna of the Bahamas. I. A general account of the Fauna, with remarks on the physiography of the Islands. II. The reptiles. III. The fishes. (p. 1—72, with 1 plate, 2 maps and 13 figures in the text).
6. NILSSON-EHLE, H., Kreuzungsuntersuchungen an Hafer und Weizen. II (S. 1—84).
7. HOLMQVIST, OTTO, Studien in der von den NN. Trigeminus und Facialis innervierten Muskulatur der Knochenfische. I. Die Trigemino-Facialis-Muskulatur bei *Gadus Callarias* Linné. II. Zur vergleichenden Morphologie der MM. Intermandibularis, Protractor Hyoidei und Hyohyoideus (S. 1—79, mit 3 Tafeln und 41 Figuren im Texte).
8. BANG, IVAR, Eine neue Methode zur Zuckerbestimmung (S. 1—10, mit 1 Tafel).

9. Fysiografiska Sällskapets sammanträden 1910—1911.







LUNDS UNIVERSITETS ÅRSSKRIFT. N. F. Afd. 2. Bd 7. Nr 1.  
KONGL. FYSIOGRAFISKA SÄLLSKAPETS HANDLINGAR. N. F. Bd 22. Nr 1.

---

NÅGRA VARIATIONSFORMLER

INOM

# INTEGRALEKVATIONERNAS TEORI

AF

HENRIK BLOCK



LUND 1911  
HÅKAN OHLSSONS BOKTRYCKERI







Lösningen  $\varphi(x)$  till en integralekvation

$$(A) \quad \varphi(x) + \lambda \int_a^b f(x, y) \varphi(y) dy = \chi(x)$$

beror af värdet på konstanterna  $a$ ,  $b$  och  $\lambda$  samt af funktionerna  $f(x, y)$  och  $\chi(x)$ . Vår uppgift skall bli att undersöka, hur  $\varphi(x)$  varierar, då någon af dessa kvantiteter erhåller ett oändligt litet tillskott. I stället för att undersöka variationen af själfva lösningen  $\varphi(x)$  bestämma vi variationen af den lösande kärnan  $g(x, y)$ , med hvars tillhjälp  $\varphi(x)$  enkelt definieras. Dessutom undersöka vi äfven variationen af andra kvantiteter, som äro af betydelse för integralekvationens teori, i främsta rummet fundamentalvärdena.

Hvad kvantiteterna  $a$ ,  $b$  och  $\lambda$  angår, så är lösningen till (A) funktion af dem i vanlig mening, och det antydda problemet löses därför helt enkelt med differentialekvationens hjälp \*). Vi befatta oss ej med detta elementära problem.

Lösningens beroende af  $\chi(x)$  är af så enkel natur, att en undersökning af den däraf härrörande variationen ej är nödvändig.

Det återstår att undersöka det fall, att kärnan  $f(x, y)$  får ett visst tillskott  $\delta f(x, y)$ .

Jag undersöker alltså i afdelning I den mot ett dylikt tillskott svarande variationen i den lösande kärnan  $g(x, y)$ . I samband härmed erhålles ett uttryck för variationen af ekvationens determinant, som öfverensstämmer med det af FREDHOLM på annan väg härledda.

---

\*) Annorlunda blir förhållandet, om man har att göra med en integralekvation i flere variabler. Ha vi t. ex. ekvationen i två variabler

$$(B) \quad \varphi(x, y) + \lambda \iint f(x, y, \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta = \chi(x, y),$$

så motsvaras integrationsgränserna  $a$  och  $b$  i (A) af en viss sluten kurva i  $\xi \eta$ -planet, som begränsar det område, öfver hvilket dubbelintegralen i (B) skall tagas. Att förändra integrationsgränserna är då liktydigt med att deformera denna kurva. För undersökning af den motsvarande variationen i  $\varphi(x, y)$  är då differentialekvationen ej tillräcklig. Emellertid kan man genom en lämplig variabelförändring bringa den ursprungliga och den varierade ekvationen att ha samma integrationsområde; då varierar i stället ekvationens kärna  $f(x, y, \xi, \eta)$ . Vi ha sålunda reducerat problemet till det i det följande behandlade fallet.



I nästa afdelning undersökas de förändringar, som fundamentalvärden och fundamentalfunktioner undergå, då kärnan varierar; den följande afdelningen kompletterar denna undersökning genom beräkningen af termer af högre ordning.

Afdelning IV behandlar en del undantagsfall, som i det föregående utesluts. Dessa undantagsfall äro visserligen så till vida af mindre intresse för tillämpningarna, som de endast kunna förekomma vid osymmetriska integralekvationer. De uppvisa emellertid en synnerligen intressant företeelse: försvinnandet af fundamentalfunktioner i en del fall och nybildningen af sådana i andra fall. Den jämförelsevis utförliga behandling, som kommit dessa undantagsfall till del, synes mig på grund därav vara berättigad. För studiet af dessa fall visa sig de af GOURSAT i afhandlingen *Recherches sur les équations intégrales linéaires* \*) införda principalfunktionerna spela en stor roll. Det synes mig därför vara af intresse, att anmärka, att GOURSATS resultat lätt kunna härledas ur de af FREDHOLM gifna formlerna. Jag har genomfört denna härledning för det fall, att blott en fundamentalfunktion finnes, men metoden kan äfven användas, om fundamentalfunktionernas antal är flera.

I den sista afdelningen gifves en annan metod för behandlingen af de i det föregående undersökta problemen. Härigenom vinnes i vissa fall en verifikation af de förut erhållna resultaten. Viktigast är emellertid, att man af konvergensen af de härledda serierna kan sluta sig till konvergensen af de i föregående afdelningar funna utvecklingarna.

Hvad det använda beteckningssättet beträffar, har jag sökt så vidt möjligt ansluta mig till det ursprungliga, af FREDHOLM införda. Integralekvationen som undersökes, skrifver jag

$$S_{\lambda f} \varphi = \varphi(x) + \lambda \int_0^1 f(x, y) \varphi(y) dy = \chi(x).$$

Om funktionen  $f(x, y)$  antar jag hela tiden, att den är ändlig och integrabel.

Utsträckningen af de härledda resultaten till integralekvationer i flera variabler erbjuder ingen som helst svårighet, hvarför jag ej uppehåller mig därvid.

---

\*) Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, deuxième Série, T. X, 1908.



# I.

Vi betrakta integralekvationen

$$(1) \quad S_{\lambda f} \varphi(x) = \varphi(x) + \lambda \int_0^1 f(x, y) \varphi(y) dy = \chi(x),$$

hvars lösning är

$$(2) \quad \varphi(x) = \chi(x) - \int_0^1 \frac{\mathfrak{D}_{\lambda f} \left( \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right)}{\mathfrak{D}_{\lambda f}} \chi(y) dy,$$

om  $\mathfrak{D}_{\lambda f} \neq 0$ . Vi skriva

$$(3) \quad - \frac{\mathfrak{D}_{\lambda f} \left( \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right)}{\mathfrak{D}_{\lambda f}} = \lambda g(x, y).$$

$g(x, y)$  beror här af  $\lambda$ ; om vi vilja framhålla detta beroende, skriva vi  $g(x, y; \lambda)$  i stället för  $g(x, y)$ . Ekvationen (2) kan alltså skrivas

$$(4) \quad \varphi(x) = \chi(x) + \lambda \int_0^1 g(x, y) \chi(y) dy = S_{\lambda g} \chi(x).$$

Om vi nu i ekvationen (1) ge kärnan  $f(x, y)$  ett oändligt litet tillskott  $\delta f(x, y)$ , så kommer  $g(x, y)$  att variera med en kvantitet af samma ordning  $\delta g(x, y)$ . Till ekvationen

$$(5) \quad \Phi(x) + \lambda \int_0^1 [f(x, y) + \delta f(x, y)] \Phi(y) dy = \chi(x)$$

ha vi alltså lösningen

$$(6) \quad \Phi(x) = \chi(x) + \lambda \int_0^1 [g(x, y) + \delta g(x, y)] \chi(y) dy.$$

(5) kan emellertid skrivas

$$\Phi(x) + \lambda \int_0^1 f(x, y) \Phi(y) dy = \chi(x) - \lambda \int_0^1 \delta f(x, y) \Phi(y) dy$$

hvilket enligt (4) ger



$$\Phi(x) = \chi(x) + \lambda \int_0^1 g(x, y) \chi(y) dy - \lambda \int_0^1 \delta f(x, y) \Phi(y) dy - \lambda^2 \int_0^1 g(x, t) dt \int_0^1 \delta f(t, y) \Phi(y) dy$$

Om vi för ett ögonblick sätta

$$(7) \quad \delta f(x, y) + \lambda \int_0^1 g(x, t) \delta f(t, y) dt = k(x, y),$$

så kan detta skrivas

$$(8) \quad \Phi(x) + \lambda \int_0^1 k(x, y) \Phi(y) dy = \chi(x) + \lambda \int_0^1 g(x, y) \chi(y) dy.$$

Detta är en integralekvation för bestämningen af  $\Phi(x)$ . Kärnan  $k(x, y)$  är af samma storleksordning som  $\delta f(x, y)$ . Vid lösningen af (8) kunna vi därför begagna metoden med successiva approximationer och negligera termer af högre ordning än den första. Vi få då

$$\Phi(x) = \chi(x) + \lambda \int_0^1 g(x, y) \chi(y) dy - \lambda \int_0^1 k(x, y) \chi(y) dy - \lambda^2 \int_0^1 k(x, r) dr \int_0^1 g(r, y) \chi(y) dy.$$

Jämföra vi denna formel med ekvationen (6), se vi, att tillskottet till  $g(x, y)$  är

$$\delta g(x, y) = -k(x, y) - \lambda \int_0^1 k(x, r) g(r, y) dr$$

eller om vi införa uttrycket för  $k(x, y)$ :

$$(9) \quad \delta g(x, y) = -\delta f(x, y) - \lambda \int_0^1 g(x, t) \delta f(t, y) dt - \lambda \int_0^1 \delta f(x, t) g(t, y) dt - \\ - \lambda^2 \int_0^1 g(x, t) dt \int_0^1 \delta f(t, r) g(r, y) dr.$$

Variationen af den lösande kärnan  $g$  är sålunda uttryckt genom  $\delta f$  och  $g$ .

Ur (9) är det lätt att härleda variationen af integralekvationens determinant  $\mathfrak{D}_{\lambda f}$ . Enligt FREDHOLM är nämligen

$$(10) \quad \frac{d}{d\lambda} \log \mathfrak{D}_{\lambda f} = - \int_0^1 g(x, x; \lambda) dx,$$

och alltså

$$(11) \quad \delta \frac{d}{d\lambda} \log \mathfrak{D}_{\lambda f} = \frac{d}{d\lambda} \delta \log \mathfrak{D}_{\lambda f} = - \int_0^1 \delta g(x, x) dx = \\ = \int_0^1 \delta f(x, x) dx + 2\lambda \int_0^1 dx \int_0^1 dt g(x, t; \lambda) \delta f(t, x) + \lambda^2 \int_0^1 dt \int_0^1 dr \delta f(t, r) \int_0^1 g(r, x; \lambda) g(x, t; \lambda) dx.$$

Nu är emellertid, för tillräckligt små värden på  $\lambda$

$$g(x, y; \lambda) = -f(x, y) + \lambda \int_0^1 f(x, x_1) f(x_1, y) dx_1 - \lambda^2 \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 f(x, x_1) f(x_1, x_2) f(x_2, y) + \dots$$

och alltså



$$\begin{aligned}
& \int_0^1 g(x, t; \lambda) g(t, y; \lambda) d\lambda = \\
& = \int_0^1 dt \left[ -f(x, t) + \lambda \int_0^1 dx_1 f(x, x_1) f(x_1, t) + \dots \right] \left[ -f(t, y) + \lambda \int_0^1 dx_1 f(t, x_1) f(x_1, y) + \dots \right] \\
& = \int_0^1 f(x, x_1) f(x_1, y) dx_1 - 2\lambda \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 f(x, x_1) f(x_1, x_2) f(x_2, y) + \\
& \quad + 3\lambda^2 \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_0^1 dx_3 f(x, x_1) f(x_1, x_2) f(x_2, x_3) f(x_3, y) + \dots
\end{aligned}$$

hvilket kan skrivas

$$(12) \quad \int_0^1 g(x, t; \lambda) g(t, y; \lambda) d\lambda = \frac{d}{d\lambda} g(x, y; \lambda).$$

Denna likhet är härledd under förutsättning, att  $\lambda$  är tillräckligt litet; men som  $g(x, y; \lambda)$  är en analytisk funktion af  $\lambda$ , inses lätt, att (12) gäller för alla  $\lambda$ -värden \*).

Tillämpas formel (12), och integrationsvariablernas beteckning på lämpligt sätt ändras, kan (11) skrivas

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda} \delta \log \mathfrak{D}_{\lambda f} &= \int_0^1 \delta f(x, x) dx + 2\lambda \int_0^1 dx \int_0^1 dy g(x, y; \lambda) \delta f(y, x) + \lambda^2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{d}{d\lambda} g(x, y; \lambda) \delta f(y, x) \\
&= \int_0^1 \delta f(x, x) dx + \frac{d}{d\lambda} \left[ \lambda^2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy g(x, y; \lambda) \delta f(y, x) \right].
\end{aligned}$$

Integrera vi denna likhet i afseende på  $\lambda$ , erhålles

$$(13) \quad \delta \log \mathfrak{D}_{\lambda f} = \lambda \int_0^1 \delta f(x, x) dx + \lambda^2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy g(x, y; \lambda) \delta f(y, x).$$

Integrationskonstanten är här bestämd af villkoret, att för  $\lambda = 0$ ,  $\mathfrak{D}_{\lambda f} = 1$ , alltså  $\log \mathfrak{D}_{\lambda f} = 0$ , hvad  $f(x, y)$  än är.

Om vi i formeln (13) sätta  $\lambda = 1$  och insätta uttrycket (3) för  $g(x, y)$ , så erhålles samma uttryck för variationen af  $\log \mathfrak{D}_f$ , som FREDHOLM på annan väg härleddt.

## II.

Af synnerlig vikt är som bekant studiet af nollställena till  $\mathfrak{D}_{\lambda f}$ , hvilka betecknas som fundamentalvärden till ekvationen (1). Hur variera dessa fundamentalvärden, då  $f(x, y)$  erhåller tillskottet  $\delta f(x, y)$ ?

\*) En annan härledning af denna formel för godtyckligt värde på  $\lambda$  återfinnes hos GOURSAT i den i inledningen citerade afhandlingen.



För undersökning här af är uttrycket (13) otillräckligt, ty i närheten af ett nollställe för  $\mathfrak{D}_{\lambda f}$  bli både  $\log \mathfrak{D}_{\lambda f}$  och  $g(x, y; \lambda)$  oändliga. En direkt metod vore att bilda utvecklingen af  $\mathfrak{D}_{\lambda(f+\delta f)}$ , lösa ekvationen

$$\mathfrak{D}_{\lambda(f+\delta f)} = 0,$$

och jämföra dess lösningar med lösningarna till

$$\mathfrak{D}_{\lambda f} = 0.$$

Följande metod för oss emellertid på kortare väg till målet och ger samtidigt ett intressant uttryck för variationen.

Om för ett visst  $\lambda$ -värde  $\mathfrak{D}_{\lambda f}$  är lika med noll, så har den homogena integral-ekvationen

$$(14) \quad S_{\lambda f} \varphi = \varphi(x) + \lambda \int_0^1 f(x, y) \varphi(y) dy = 0$$

en eller flera lineärt oberoende lösningar. Vi antaga till en början, att endast en dylik lösning  $\varphi(x)$  finnes. Det finnes då också en och endast en lösning  $\psi(y)$  till likheten

$$(15) \quad T_{\lambda f} \psi = \psi(y) + \lambda \int_0^1 f(x, y) \psi(x) dx = 0.$$

Vi ge nu kärnan  $f(x, y)$  ett oändligt litet tillskott  $\delta f(x, y)$ . Fundamentalvärdet  $\lambda$  varierar då med  $\delta\lambda$ , och den till värdet  $\lambda + \delta\lambda$  hörande fundamentalfunktionen blir  $\varphi(x) + \delta\varphi(x)$ . Alltså är

$$\varphi(x) + \delta\varphi(x) + (\lambda + \delta\lambda) \int_0^1 [f(x, y) + \delta f(x, y)] [\varphi(y) + \delta\varphi(y)] dy = 0.$$

Här försumma vi alla termer, som äro af högre ordning än den första i  $\delta f$ ,  $\delta\lambda$  och  $\delta\varphi$ . Med hänsyn till (14) få vi då

$$\delta\varphi(x) + \lambda \int_0^1 f(x, y) \delta\varphi(y) dy + \lambda \int_0^1 \delta f(x, y) \varphi(y) dy + \delta\lambda \int_0^1 f(x, y) \varphi(y) dy = 0.$$

Enligt (14) är den sista termen  $= -\frac{\delta\lambda}{\lambda} \varphi(x)$ . Införa vi detta, få vi efter omflyttning

$$(16) \quad \delta\varphi(x) + \lambda \int_0^1 f(x, y) \delta\varphi(y) dy = \frac{\delta\lambda}{\lambda} \varphi(x) - \lambda \int_0^1 \delta f(x, y) \varphi(y) dy.$$

Detta är en integralekvation för bestämningen af  $\delta\varphi(x)$ . Dess determinant är emellertid lika med noll, och för att lösning skall vara möjlig, fordras därför att högre membrum uppfyller villkoret

$$(17) \quad \frac{\delta\lambda}{\lambda} \int_0^1 \varphi(x) \psi(x) dx - \lambda \int_0^1 dx \int_0^1 dy \psi(x) \delta f(x, y) \varphi(y) = 0.$$

Om alltså

$$(18) \quad \int_0^1 \varphi(x) \psi(x) dx \neq 0,$$



bestämmas variationen  $\delta\lambda$  af

$$(19) \quad \delta\lambda = \lambda^2 \frac{\int_0^1 dx \int_0^1 dy \psi(x) \delta f(x, y) \varphi(y)}{\int_0^1 \varphi(x) \psi(x) dx}$$

Sedan  $\delta\lambda$  så bestämts, är ekvationen (16) lösbar, och vi erhålla därur  $\delta\varphi$ .

Är (18) uppfyllt, kunna vi bestämma de arbiträra faktorerna i  $\varphi(x)$  och  $\psi(x)$  så, att

$$(20) \quad \int_0^1 \varphi(x) \psi(x) dx = 1,$$

och få då för  $\delta\lambda$  uttrycket

$$(19 \text{ a}) \quad \delta\lambda = \lambda^2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \psi(x) \delta f(x, y) \varphi(y).$$

Vi gå nu till det allmänna fallet, att likheten

$$S_{\lambda f} \varphi(x) = 0$$

har  $n$  stycken lineärt oberoende lösningar

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x).$$

Likheten

$$T_{\lambda f} \psi(y) = 0$$

har då också  $n$  stycken oberoende lösningar

$$\psi_1(y), \psi_2(y), \dots, \psi_n(y).$$

Jag skrifver för korthets skull

$$(21) \quad (\varphi_i \psi_j) = \int_0^1 \varphi_i(x) \psi_j(x) dx$$

och antager att

$$(22) \quad \begin{vmatrix} (\varphi_1 \psi_1) & (\varphi_1 \psi_2) & \dots & (\varphi_1 \psi_n) \\ (\varphi_2 \psi_1) & (\varphi_2 \psi_2) & \dots & (\varphi_2 \psi_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_n \psi_1) & (\varphi_n \psi_2) & \dots & (\varphi_n \psi_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

Vi kunna då alltid genom en lineär transformation af  $\varphi_1 \dots \varphi_n, \psi_1 \dots \psi_n$  uppnå, att

$$(23) \quad (\varphi_i \psi_j) = \begin{cases} 0 & \text{för } i \neq j, \\ 1 & \text{för } i = j. \end{cases}$$

Bilda vi en lineär kombination af  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$

$$(24) \quad \Phi(x) = C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x) + \dots + C_n \varphi_n(x),$$

så är  $\Phi$  en lösning till (14). Vi söka nu att bestämma  $C_1, C_2, \dots, C_n$  så, att  $\Phi + \delta\Phi$  blir en fundamentalfunktion till den varierade ekvationen och sålunda satisfierar likheten

$$\Phi(x) + \delta\Phi(x) + (\lambda + \delta\lambda) \int_0^1 [f(x, y) + \delta f(x, y)] [\Phi(y) + \delta\Phi(y)] dy = 0,$$

där  $\delta\Phi$  och  $\delta\lambda$  äro oändligt små kvantiteter af samma ordning som  $\delta f$ . Om termer af högre ordning försummas, ger detta





hvilka äro fundamentalfunktioner svarande mot de  $n$  olika fundamentalvärdena

$$\lambda + \lambda^2 s_1, \lambda + \lambda^2 s_2, \dots, \lambda + \lambda^2 s_n.$$

Vi få alltså samma antal fundamentalfunktioner som förut, men de höra ej längre till ett och samma fundamentalvärde, utan till  $n$  olika värden.

Om däremot ekvationen (29) har en multipelrot, är det i allmänhet omöjligt att finna  $n$  skiljda värdesystem, som satisfiera (28). I så fall erhålla vi med den använda metoden ett mindre antal fundamentalfunktioner till den varierade kärnan än till den ursprungliga. Vi skola längre fram närmare undersöka detta fall, liksom ett annat, som vi här utesluter, det nämligen, att determinanten (22) är lika med noll.

I ett mycket viktigt fall kunna emellertid dessa undantagsfall icke förekomma. Det är det af HILBERT och SCHMIDT behandlade fallet, att kärnan  $f(x, y)$  är symmetrisk i  $x$  och  $y$ :

$$f(x, y) = f(y, x).$$

Då är

$$\varphi_i(x) = \psi_i(x).$$

Hör till fundamentalvärdet  $\lambda$  blott en fundamentalfunktion  $\varphi(x)$ , så är alltså

$$\int_0^1 \varphi(x) \psi(x) dx = \int_0^1 \overline{\varphi(x)}^2 dx,$$

och som enligt HILBERTS \*) och SCHMIDTS \*\*) undersökningar alla fundamentalvärden och fundamentalfunktioner äro reella, följer däraf, att villkoret (18) alltid är uppfyllt. Höra åter till värdet  $\lambda$   $n$  fundamentalfunktioner  $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ , kunna vi alltid genom lineär transformation uppnå, att

$$(\varphi_i \psi_j) = (\varphi_i \varphi_j) = \int_0^1 \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = 0 \quad \text{f\"or } i \neq j,$$

under det naturligtvis

$$(\varphi_i \mid \psi_i) = \int_0^1 \overline{\varphi_i(x)}^2 dx > 0.$$

Då är

[illegible]

Det återstår nu att undersöka hvad som sker, om ekvationen (29) har ett visst antal lika rötter.

Om den varierade kärnan också skall vara symmetrisk, så är

$$\delta f(x, y) = \delta f(y, x).$$

\*) Göttinger Nachrichten, år 1904 och följande.

\*\*.) Mathematische Annalen, bd. 63.

Som dessutom

$$\psi_i(x) = \varphi_i(x),$$

så följer

$$A_{ij} = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \varphi_i(x) \delta f(x, y) \varphi_j(y) = A_{ji} \quad i, j = 1, 2, \dots n.$$

Determinanten (29) är då symmetrisk i afseende på principaldiagonalen, och af teorin för lineära substitutioner är då bekant, att den ifrågavarande transformationen alltid är möjlig, äfven om fundamentalekvationen skulle ha ett antal lika rötter.

### III.

Innan jag går att behandla de i det föregående uteslutna undantagsfallen, skall jag yttra några ord om beräkningen af termer af högre ordning. Klart är nämligen, att de ofvan beräknade kvantiteterna  $\delta\lambda$  och  $\delta\varphi$  blott äro de första termerna i oändliga serientvecklingar. Om dessa uttryck skola hafva någon mening, är det nödvändigt, att serierna skola konvergera och att deras termer skola kunna successivt beräknas. Till konvergensfrågan återkommer jag senare. För tillfället skall jag blott uppvisa möjligheten att beräkna termer af hvilken ordning som helst.

Låt oss alltså ånyo betrakta det fall, att mot ett visst  $\lambda$ -värde, som jag för enkelhets skull antager vara  $= 1$ , svara  $n$  stycken fundamentalfunktioner  $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ , och  $n$  funktioner  $\psi_1, \psi_2, \dots \psi_n$ , lösningar till ekvationen (15). Vi antaga, att determinanten (22) är skiljd från noll, och att ekvationen (29) har  $n$  olika rötter. Vi kunna då genom att till  $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$  välja just de ofvan beräknade funktionerna  $\Phi_1, \Phi_2, \dots \Phi_n$  samt göra en analog transformation af funktionerna  $\psi_1, \psi_2, \dots \psi_n$  uppnå att

$$(23) \quad (\varphi_i \psi_j) = \begin{cases} 0 & \text{för } i \neq j, \\ 1 & \text{för } i = j, \end{cases}$$

och att dessutom

$$(30) \quad \int_0^1 dx \int_0^1 dy \psi_i(x) \delta f(x, y) \varphi_j(y) = 0 \quad \text{för } i \neq j.$$

Rötterna till ekvationen (29) äro då

$$(31) \quad s_i = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \psi_i(x) \delta f(x, y) \varphi_i(y), \quad i = 1, 2, \dots n.$$

Enligt vårt antagande äro dessa  $n$  kvantiteter alla olika.

Vi sätta nu

$$(32) \quad \delta f(x, y) = \mu \cdot h(x, y),$$

där  $\mu$  är en parameter, som vi antaga vara mycket liten, och  $h(x, y)$  en ändlig kvantitet.  $\delta\varphi_i$  och  $\delta\lambda_i$  bli då potensserier i  $\mu$ :

$$(33) \quad \delta\varphi_i(x) = \mu \varphi_{i1}(x) + \mu^2 \varphi_{i2}(x) + \dots,$$

$$(34) \quad \delta\lambda_i = \mu \rho_{i1} + \mu^2 \rho_{i2} + \dots \quad i = 1, 2, \dots n$$



Vi skola då ha

$$(35) \quad \varphi_i(x) + \mu \varphi_{i1}(x) + \mu^2 \varphi_{i2}(x) + \dots + \\ + (1 + \mu \rho_{i1} + \mu^2 \rho_{i2} + \dots) \int_0^1 [f(x, y) + \mu h(x, y)] (\varphi_i(y) + \mu \varphi_{i1}(y) + \mu^2 \varphi_{i2}(y) + \dots) dy = 0.$$

Koefficienten till hvarje potens af  $\mu$  skall här sättas lika med noll, hvilket ger oss integralekvationer för den successiva bestämningen af  $\varphi_{i1}$ ,  $\varphi_{i2}$ , ... Villkoren för att de skola vara lösbara ge oss  $\rho_{i1}$ ,  $\rho_{i2}$ , ...

Sätta vi koefficienten till  $\mu$  lika med noll, få vi

$$(36) \quad S_f \varphi_{i1} + \int_0^1 h(x, y) \varphi_i(y) dy - \rho_{i1} \varphi_i(x) = 0$$

Jag inför nu för korthets skull beteckningssättet

$$(37) \quad \int_0^1 dx \int_0^1 dy u(x) h(x, y) v(y) = (uhv)$$

För att (36) skall vara möjlig att lösa, fordras, att

$$(38) \quad \rho_{i1} = (\psi_i h \varphi_i).$$

De öfriga  $n-1$  möjlighetsvillkoren äro identiskt uppfyllda på grund af relationerna (23), (30). Vi ha ju nämligen

$$\mu(\psi_j h \varphi_i) = A_{ji} = 0 \text{ för } i \neq j.$$

Ur (36) kunna vi nu bestämma  $\varphi_{i1}(x)$ . Denna funktion blir ej entydigt bestämd. Vi kunna nämligen tillägga en lineär kombination af  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ , ...  $\varphi_n$  med godtyckliga koefficienter:

$$(39) \quad \varphi_{i1} = \varphi'_{i1} + C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2 + \dots + C_n \varphi_n.$$

$\varphi'_{i1}$  må beteckna den lösning, som uppfyller villkoren

$$(40) \quad (\varphi'_{i1} \psi_j) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Vi gå nu att bestämma  $\rho_{i2}$  och  $\varphi_{i2}$ . Termerna i  $\mu^2$  ge

$$S_f \varphi_{i2} + \int_0^1 h(x, y) \varphi_{i1}(y) dy + \rho_{i1} \int_0^1 [f(x, y) \varphi_{i1}(y) + h(x, y) \varphi_i(y)] dy + \rho_{i2} \int_0^1 f(x, y) \varphi_i(y) dy = 0,$$

eller med hänsyn till föregående ekvationer

$$(41) \quad S_f \varphi_{i2} + \int_0^1 h(x, y) \varphi_{i1}(y) dy + \rho_{i1}(\rho_{i1} \varphi_i(x) - \varphi_{i1}(x)) - \rho_{i2} \varphi_i(x) = 0.$$

Möjlighetsvillkoren erhållas genom att multiplicera med  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x)$ , ...  $\psi_n(x)$  och integrera. Vi erhålla så

$$(42) \quad (\psi_j h \varphi_{i1}) - \rho_{i1}(\varphi_{i1} \psi_j) = 0 \quad \text{för } j \neq i,$$

$$(43) \quad (\psi_i h \varphi_{i1}) + \rho_{i1}^2 - \rho_{i1}(\varphi_{i1} \psi_i) - \rho_{i2} = 0.$$

Vi beakta nu, att

$$(\psi_j h \varphi_{i1}) = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \psi_j(x) h(x, y) [\varphi'_{i1}(y) + C_1 \varphi_1(y) + C_2 \varphi_2(y) + \dots + C_n \varphi_n(y)] = \\ = (\psi_i h \varphi'_{i1}) + C_1(\psi_j h \varphi_1) + C_2(\psi_j h \varphi_2) + \dots + C_n(\psi_j h \varphi_n) = (\psi_j h \varphi'_{i1}) + C_j \rho_{j1},$$

och vidare att

$$(\varphi_{i1} \psi_j) = C_j.$$

Likheterna (42) ge alltså

$$(44) \quad (\rho_{i1} - \rho_{j1}) C_j = (\psi_j h \varphi'_{i1}), \quad j \neq i,$$

och som alla kvantiteterna  $\rho_{11}, \rho_{21}, \dots, \rho_{n1}$  äro olika, bestämma dessa ekvationer säkert  $C_1, C_2, \dots, C_n$  med undantag af  $C_i$ .

Vi gå nu till ekvationen (43), som ger  $\rho_{i2}$ :

$$(45) \quad \begin{aligned} \rho_{i2} &= \rho_{i1}^2 - \rho_{i1} C_i + (\psi_i h \varphi'_{i1}) + C_i(\psi_i h \varphi_i), \\ \rho_{i2} &= \rho_{i1}^2 + (\psi_i h \varphi'_{i1}). \end{aligned}$$

Konstanten  $C_i$  försvinner alltså ur slutresultatet. Den kan väljas godtyckligt, hvilket för öfrigt var att förutse. Vi antaga till exempel  $C_i = 0$ , i hvilket fall

$$(\psi_i h \varphi'_{i1}) = (\psi_i h \varphi_{i1}) = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \psi_i(x) h(x, y) \varphi_{i1}(y).$$

$\varphi_{i1}$  är nu entydigt bestämd.  $\varphi_{i2}$  erhålles ur integralekvationen (41), som nu är möjlig att lösa. I  $\varphi_{i2}$  ingå  $n$  godtyckliga konstanter, hvaraf en, nämligen koefficienten till  $\varphi_i$ , förblir arbiträr och kan sättas lika med noll, under det de andra bestämmas af möjlighetsvillkoren för nästa ekvation.

Jag skall nu uppvisa, att denna operation alltid är möjlig. Jag påstår, att om vi bestämt kvantiteterna  $\rho_{i1}, \rho_{i2}, \dots, \rho_{iv}$  och funktionerna  $\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \dots, \varphi_{iv-1}$  entydigt samt  $\varphi_{iv}$  på  $n$  arbiträra konstanter när, så är det alltid möjligt att bestämma dessa konstanter och kvantiteten  $\rho_{iv+1}$  så att integralekvationen för  $\varphi_{iv+1}$  kan lösas. Denna ekvation heter nämligen

$$(46) \quad S_f \varphi_{iv+1} + \int_0^1 h(x, y) \varphi_{iv}(y) dy + \rho_{i1} \int_0^1 [f(x, y) \varphi_{iv}(y) + h(x, y) \varphi_{iv-1}(y)] dy + \dots - \\ - \rho_{iv+1} \varphi_i(x) = 0.$$

De termer, som ej utskrifvits, bero blott af kända kvantiteter. Enligt den ekvation, som bestämmer  $\varphi_{iv}$ , är

$$\int_0^1 [f(x, y) \varphi_{iv}(y) + h(x, y) \varphi_{iv-1}(y)] dy = -\varphi_{iv}(x) + \text{kända kvantiteter}.$$

Vi ha vidare

$$\varphi_{iv} = \varphi'_{iv} + K_1 \varphi_1 + K_2 \varphi_2 + \dots + K_n \varphi_n,$$

där  $\varphi'_{iv}$  är fullt bestämdt och satisfierar

$$(\varphi'_{iv} \psi_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

under det  $K_1, K_2, \dots, K_n$  äro konstanter, som skola bestämmas.

Ekvationen (46) blir således

$$\begin{aligned} S_f \varphi_{iv+1} + \int_0^1 h(x, y) \varphi'_{iv}(y) dy + \sum_{\kappa=1}^n K_\kappa \int_0^1 h(x, y) \varphi_\kappa(y) dy - \\ - \rho_{i1} \varphi'_{iv}(x) - \rho_{i1} \sum_{\kappa=1}^n K_\kappa \varphi_\kappa(x) - \rho_{iv+1} \varphi_i(x) + F(x) = 0, \end{aligned}$$

där  $F(x)$  är en känd funktion.



De  $n$  möjlighetsvillkoren till denna ekvation ge oss relationer af formen

$$(\rho_{i1} - \rho_{j1}) K_j = (\psi_j h \varphi'_{iv}) + \text{kända kvantiteter}, \quad j \neq i$$

$$\rho_{iv+1} = (\psi_i h \varphi'_{iv}) + \text{kända kvantiteter}.$$

Eftersom  $\rho_{j1} \neq \rho_{i1}$  för  $j \neq i$ , så bli  $K_1, K_2, \dots, K_n$  entydigt bestämda, utom  $K_i$ , som förblir godtyckligt. Vi kunna sätta  $K_i = 0$ . Den sista likheten ger  $\rho_{iv+1}$  utan tvetydighet.

$\varphi_{iv+1}$  kan nu beräknas, och uttrycket därför innehåller  $n$  godtyckliga konstanter.

Vi kunna således fortsätta beräkningen af koefficienterna i utvecklingarna (33), (34) hur långt som helst.

Viktiga för undersökningen af hithörande maximi- och minimi-problem äro isynnerhet uttrycken för  $\rho_{i1}$  och  $\rho_{i2}$ . Jag ingår emellertid ej här på diskussionen af dylika problem.

#### IV.

Vi gå nu att undersöka de i det föregående påpekade undantagsfallen. Först betrakta vi det fall, att determinanten (22) är skiljd från noll, men att ekvationen i  $s$  (29) har en multipelrot af till exempel  $p$ :te ordningen, så att  $s_1 = s_2 = \dots = s_p$ . Genom lineär transformation af funktionerna  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$  kunna vi då bringa ett antal af kvantiteterna  $A_{ji}$  att försvinna, så att determinanten (29) öfvergår i

$$(47) \quad \begin{vmatrix} s_1 - s & A_{12} & \dots & A_{1p} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_1 - s & \dots & A_{2p} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & s_1 - s & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & s_{p+1} - s & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & s_n - s \end{vmatrix} = 0$$

under det relationerna (23) äro uppfyllda. Af kvantiteterna  $A_{12} \dots A_{p-1p}$  kunna vi få ytterligare några att försvinna, men i allmänhet icke alla. För tillfället skall jag emellertid ej uppehålla mig därvid.

Vi låta nu kärnan  $f$  erhålla tillskottet  $\delta f$ . Fundamentalfunktionerna  $\varphi_1$  och  $\varphi_{p+1}, \dots, \varphi_n$  öfvergå då i fundamentalfunktioner  $\Phi_1, \Phi_{p+1}, \dots, \Phi_n$  till den varierade kärnan. Detta är däremot icke förhållandet med funktionerna  $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_p$ . Hvilken roll spela dessa funktioner, då kärnan varierar?

Låt  $\Phi_2, \Phi_3, \dots, \Phi_p$  vara  $p-1$  tills vidare obestämda funktioner, oändligt litet skiljda från  $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_p$ . För att definiera dem sätta vi för korthets skull

$$(\lambda + \delta\lambda_i) [f(x, y) + \delta f(x, y)] = F_i(x, y).$$

Då är

$$\delta\lambda_1 = \delta\lambda_2 = \dots = \delta\lambda_p,$$

alltså

$$F_1 = F_2 = \dots = F_p.$$

Funktionerna  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_p$  kunna då bringas att satisfiera likheterna

$$(48) \quad \begin{cases} S_{F_1} \Phi_1 = 0, \\ S_{F_1} \Phi_2 + \alpha_{21} \Phi_1 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ S_{F_1} \Phi_p + \alpha_{p1} \Phi_1 + \alpha_{p2} \Phi_2 + \dots + \alpha_{pp-1} \Phi_{p-1} = 0, \end{cases}$$

Sätt nämligen  $\Phi_1 = \varphi_1 + \delta\varphi_1$ , o. s. v. Beakta vi, att kvantiteterna  $\alpha$  bli af samma storleksordning som  $\delta f$ , få vi på kvantiteter af högre ordning när

$$\begin{aligned} S_{\lambda f} \delta\varphi_1 + \lambda \int_0^1 \delta f(x, y) \varphi_1(y) dy - \frac{\delta\lambda_1}{\lambda} \varphi_1(x) &= 0, \\ S_{\lambda f} \delta\varphi_2 + \lambda \int_0^1 \delta f(x, y) \varphi_2(y) dy + \alpha_{21} \varphi_1(x) - \frac{\delta\lambda_1}{\lambda} \varphi_2(x) &= 0, \\ \dots\dots\dots \\ S_{\lambda f} \delta\varphi_p + \lambda \int_0^1 \delta f(x, y) \varphi_p(y) dy + \alpha_{p1} \varphi_1(x) + \dots + \alpha_{pp-1} \varphi_{p-1}(x) - \frac{\delta\lambda_1}{\lambda} \varphi_p(x) &= 0. \end{aligned}$$

Vi uppskrifva för dessa integralekvationer de  $n$  möjlighetsvillkoren och beakta, att

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \psi_i(x) \delta f(x, y) \varphi_j(y) = A_{ij}$$

där

$$\begin{aligned} A_{ij} &= 0 \text{ för } i > j \text{ samt för } i \neq j > p, \\ A_{11} &= A_{22} = \dots = A_{pp} = s_1. \end{aligned}$$

Vi erhålla då

$$(49) \quad \begin{cases} \delta\lambda_1 = \lambda^2 s_1, \\ \alpha_{21} = -\lambda A_{12}, \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{ji} = -\lambda A_{ij}, \quad j = 2, 3, \dots, p; \quad i < j. \end{cases}$$

De  $p$  fundamentalfunktionerna  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$  öfvergå alltså vid variationen i andra, af hvilka i allmänhet endast den första är fundamentalfunktion.  $p-1$  fundamentalfunktioner ha sålunda vid öfvergången från kärnan  $f(x, y)$  till  $f(x, y) + \delta f(x, y)$  försvunnit.

Låt oss å andra sidan betrakta de mot våra fundamentalfunktioner svarande fundamentalvärdena. Vi ha här  $n$  fundamentalfunktioner till den ursprungliga likheten, hvilka alla svara mot samma fundamentalvärde  $\lambda$ . Följaktligen är  $\lambda$  en rot till  $\mathfrak{D}_{\lambda f} = 0$  af åtminstone ordningen  $n$ ; och som vi i det följande skola se, kan man af villkoret (22) sluta sig till, att ordningen är just  $n$ .



Vi omge nu i det komplexa  $\lambda$ -planet vår rot af ordningen  $n$  med en sluten kurva, som icke innesluter några andra rötter till ekvationen  $\mathfrak{D}_{\lambda}f=0$ . Som  $\mathfrak{D}_{\lambda}f$  är en öfverallt regulär analytisk funktion, är integralen längs denna slutna kontur

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{d}{d\lambda} \log \mathfrak{D}_{\lambda}f d\lambda$$

lika med antalet rötter till  $\mathfrak{D}_{\lambda}f=0$  inom konturen, alltså  $n$ . Då nu  $f$  varierar med den oändligt lilla kvantiteten  $\delta f$ , får uttrycket (50) ett oändligt litet tillskott  $\varepsilon$ . Skillnaden mellan antalet fundamentalvärden till den ursprungliga och den varierade likheten inom konturen är alltså oändligt liten, och som denna skillnad å andra sidan måste vara ett helt tal, är den nödvändigtvis lika med noll. Antalet fundamentalvärden i närheten af värdet  $\lambda$  har således icke förändrats. De äro uppenbarligen  $\lambda+\delta\lambda_1$ , räknad  $p$  gånger, samt  $\lambda+\delta\lambda_{p+1}, \dots \lambda+\delta\lambda_n$ .

Däremot har antalet fundamentalfunktioner minskats, i det mot det  $p$ -faldiga fundamentalvärdet  $\lambda+\delta\lambda_1$  endast svarar en fundamentalfunktion  $\Phi_1$ , såvida ej ett visst antal af kvantiteterna  $A_{ij}$  försvinna, hvilket emellertid är ett undantagsfall.

Vi ha således att göra med det fall, att mot en rot till  $\mathfrak{D}_{\lambda}f=0$  af en viss ordning  $p$  svara ett mindre antal fundamentalfunktioner. Integralekvationens lösning i detta fall är undersökt af GOURSAT i den i inledningen citerade afhandlingen. Han har uppvisat, att i så fall existera utom fundamentalfunktionerna äfven ett antal funktioner, hvilka han betecknar med namnet principalfunktioner och som satisfiera likheter sådana som (48). Summan af antalet fundamental- och principalfunktioner är just lika med ordningstalet för motsvarande fundamentalvärde.

Vi se alltså, att under det funktionen  $\varphi_1$  öfvergår i en fundamentalfunktion för den varierade ekvationen, så öfvergå fundamentalfunktionerna  $\varphi_2, \dots \varphi_p$  i allmänhet i principalfunktioner.

I det följande skola vi vid undersökningen af de återstående undantagsfallen se exempel på den motsvarande företeelsen: uppkomsten af nya fundamentalfunktioner. Äfven här visa sig de GOURSAT'ska principalfunktionerna spela en stor roll. Det torde därför i detta samband icke vara utan intresse att något dröja vid teorin för ifrågavarande funktioner. Jag uppehåller mig i synnerhet vid det enklaste fallet, då endast en fundamentalfunktion finnes, och jag härleder de resultat, som i det följande behöfvas, direkt ur de FREDHOLM'ska formlerna. Ett liknande förfaringssätt kan användas i det allmänna fallet, ehuru jag för närvarande ej ingår härpå.

Det undantagsfall, som vi först stött på, var det, att mot ett visst  $\lambda$ -värde (jag antar för enkelhets skull, att detta värde är lika med 1) svarar blott en fundamentalfunktion  $\varphi$ , och att

$$(50) \quad (\varphi \psi) = \int_0^1 \varphi(x) \psi(x) dx = 0.$$

Jag påstår, att då värdet  $\lambda=1$  är en multipelrot till  $\mathfrak{D}_{\lambda}f=0$ .

Enligt antagandet existerar blott en fundamentalfunktion; alltså är  $\mathfrak{D}_f(x, y)$  icke identiskt noll. För ett godtyckligt konstant  $y$ -värde är  $\mathfrak{D}_f(x, y)$  en lösning till likheten  $S_f \varphi = 0$ ; alltså är  $\mathfrak{D}_f(x, y)$  af formen  $h\varphi(x)$ , om  $\varphi(x)$  är den till  $\lambda = 1$  hörande fundamentalfunktionen. På samma sätt är för ett godtyckligt  $x$ -värde  $\mathfrak{D}_f(x, y)$  en lösning till  $T_f \psi = 0$ ; alltså är  $\mathfrak{D}_f(x, y) = k\psi(y)$  för  $x$  konstant. Man drar däraf den slutsatsen, att

$$\mathfrak{D}_f(x, y) = C \varphi(x) \psi(y),$$

där  $C$  är en konstant.

Å andra sidan är

$$\left( \frac{d\mathfrak{D}_{\lambda f}}{d\lambda} \right)_{\lambda=1} = \int_0^1 \mathfrak{D}_f(x, x) dx = C \int_0^1 \varphi(x) \psi(x) dx = 0.$$

Som  $\frac{d\mathfrak{D}_{\lambda f}}{d\lambda}$  försvinner samtidigt med  $\mathfrak{D}_{\lambda f}$ , är  $\lambda = 1$  åtminstone dubbelrot till  $\mathfrak{D}_{\lambda f} = 0$ . Antag, att det är en rot af ordningen  $q$ .

Vi bilda nu kvantiteterna

$$(52) \quad \mathfrak{D}_f(x, y), \int_0^1 dx_1 \mathfrak{D}_f(x, x_1), \frac{1}{2} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \mathfrak{D}_f(x, x_1 x_2), \dots, \frac{1}{q-1} \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_{q-1} \mathfrak{D}_f(x, x_1 \dots x_{q-1})$$

Enligt antagandet försvinner icke den första af dessa kvantiteter identiskt, och som vi längre fram skola se, är det ej heller fallet med de följande. Skrifva vi emellertid  $x$  i stället för  $y$  och integrera i  $x$  mellan 0 och 1, så försvinna alla kvantiteterna identiskt, utom den sista. Det följer däraf, att  $\lambda = 1$  är en rot af  $q$ :te ordningen till  $\mathfrak{D}_{\lambda f} = 0$ , och af den allmänna relationen

$$\lambda^p \frac{d^p \mathfrak{D}_{\lambda f}}{d\lambda^p} = \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_p \mathfrak{D}_{\lambda f}(x_1 \dots x_p).$$

I uttrycken (52) insätta vi nu ett visst konstant värde  $y = \eta$  sådant, att  $\mathfrak{D}_f(x, \eta)$  icke identiskt försvinner. De så erhållna funktionerna af  $x$  betecknar jag med  $\varphi^{(1)}(x), \varphi^{(2)}(x), \dots, \varphi^{(q)}(x)$ .  $\varphi^{(1)}$  är en fundamentalfunktion, alltså af formen  $k\varphi(x)$ .

Vi tillämpa nu formel (4) i FREDHOLMS afhandling på funktionen  $\mathfrak{D}_f(x, \eta)$ :

$$\mathfrak{D}_f(x, \eta) + \int_0^1 f(x, t) \mathfrak{D}_f(t, \eta) dt = f(x, \eta) \mathfrak{D}_f(x, \eta) - f(x, x_1) \mathfrak{D}_f(x_1, \eta).$$

Multipluera vi nu med  $dx_1$  och integrera, så försvinner första termen till höger och vi få

\*) Acta Mathematica, band 27, sid. 370.



$$S_f \varphi^{(2)} = - \int_0^1 f(x, x_1) \varphi^{(1)}(x_1) dx_1 = \varphi^{(1)}(x).$$

Förfara vi på samma sätt med  $\mathfrak{D}_f \begin{pmatrix} x & x_1 & x_2 \\ \eta & x_1 & x_2 \end{pmatrix}$ , erhålla vi först

$$\begin{aligned} & \mathfrak{D}_f \begin{pmatrix} x & x_1 & x_2 \\ \eta & x_1 & x_2 \end{pmatrix} + \int_0^1 f(x, t) \mathfrak{D}_f \begin{pmatrix} t & x_1 & x_2 \\ \eta & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = \\ & = f(x, \eta) \mathfrak{D}_f \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ \eta & x_2 \end{pmatrix} - f(x, x_1) \mathfrak{D}_f \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ \eta & x_2 \end{pmatrix} + f(x, x_2) \mathfrak{D}_f \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ \eta & x_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Den sista termen kan äfven skrivas

$$- f(x, x_2) \mathfrak{D}_f \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ \eta & x_1 \end{pmatrix}.$$

Om vi nu dividera med  $\underline{2}$ , multiplicera med  $dx_1 dx_2$  och integrera två gånger mellan 0 och 1, så går första termen till höger ut, och de båda öfriga bli inbördes lika. Vi erhålla så

$$S_f \varphi^{(3)} = - \int_0^1 f(x, t) \varphi^{(2)}(t) dt = \varphi^{(2)} - S_f \varphi^{(2)} = \varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}.$$

Vi fortgå på samma sätt och erhålla följande kedja af ekvationer

$$(53) \quad \begin{cases} S_f \varphi^{(1)} = 0, \\ S_f \varphi^{(2)} = \varphi^{(1)}, \\ S_f \varphi^{(3)} = \varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}, \\ \dots\dots\dots \\ S_f \varphi^{(q)} = \varphi^{(q-1)} - \varphi^{(q-2)} + \dots + (-1)^q \varphi^{(1)}. \end{cases}$$

$\varphi^{(1)}$  ha vi antagit icke identiskt försvinna. Af den andra ekvationen framgår då, att  $\varphi^{(2)}$  icke kan identiskt försvinna, samt att  $\varphi^{(2)}$  och  $\varphi^{(1)}$  äro lineärt oberoende. Af nästa likhet framgår, att  $\varphi^{(3)}$  icke kan identiskt försvinna och är lineärt oberoende af  $\varphi^{(1)}$  och  $\varphi^{(2)}$  o. s. v. Vi ha således ett system af  $q$  stycken funktioner  $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots, \varphi^{(q)}$  sådana, att operationen  $S_f$  utförd på en af dem ger en lineär kombination af de föregående funktionerna i systemet. Detta system kallas ett system af principalfunktioner. Antalet af de lineärt oberoende principalfunktionerna (fundamentalfunktionen inberäknad) är  $q$ , eller lika med ordningstalet för den betraktade roten till  $\mathfrak{D}_{\lambda f} = 0$ . Att antalet icke kan vara större än  $q$ , kan visas på följande sätt.

Vore antalet principalfunktioner större än  $q$ , skulle man kunna bilda en funktion  $\varphi^{(q+1)}$ , sådan att

$$S_f \varphi^{(q+1)} = \varphi^{(q)} - \varphi^{(q-1)} + \dots \pm \varphi^{(1)}.$$

Tillämpa nu emellertid den FREDHOLM'ska formeln (4) på kvantiteten  $\mathfrak{D}_f \begin{pmatrix} x & x_1 \dots x_q \\ \eta & x_1 \dots x_q \end{pmatrix}$ . Man får då

$$\begin{aligned} & \mathfrak{D}_f \left( \frac{x x_1 \dots x_q}{\eta x_1 \dots x_q} \right) + \int_0^1 f(x, t) \mathfrak{D}_f \left( \frac{t x_1 \dots x_q}{\eta x_1 \dots x_q} \right) dt = \\ & = f(x, \eta) \mathfrak{D}_f \left( \frac{x_1 \dots x_q}{x_1 \dots x_q} \right) - f(x, x_1) \mathfrak{D}_f \left( \frac{x_1 x_2 \dots x_q}{\eta x_2 \dots x_q} \right) + f(x, x_2) \mathfrak{D}_f \left( \frac{x_1 x_2 x_3 \dots x_q}{\eta x_1 x_3 \dots x_q} \right) + \dots \end{aligned}$$

Vi dividera med  $\underline{q}$ , multiplicera med  $dx_1 \dots dx_q$  och integrera  $q$  gånger mellan 0 och 1. De  $q$  sista termerna till höger bli då inbördes lika, och vi få

$$\begin{aligned} (54) \quad & S_f \frac{1}{\underline{q}} \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_q \mathfrak{D}_f \left( \frac{x x_1 \dots x_q}{\eta x_1 \dots x_q} \right) = \\ & = f(x, \eta) \frac{1}{\underline{q}} \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_q \mathfrak{D}_f \left( \frac{x_1 \dots x_q}{x_1 \dots x_q} \right) - \int_0^1 dt f(x, t) \frac{1}{\underline{q-1}} \int_0^1 dx_2 \dots \int_0^1 dx_q \mathfrak{D}_f \left( \frac{t x_2 \dots x_q}{\eta x_2 \dots x_q} \right) \end{aligned}$$

Den sista termen till höger är just

$$\varphi^{(q)} - S_f \varphi^{(q)} = \varphi^{(q)} - \varphi^{(q-1)} + \dots \pm \varphi^{(1)}.$$

Sätta vi vidare

$$\frac{1}{\underline{q}} \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_q \mathfrak{D}_f \left( \frac{x_1 \dots x_q}{x_1 \dots x_q} \right) = K,$$

så är  $K$  säkert skiljd från noll enligt antagandet, att  $\lambda = 1$  är en  $q$ -faldig rot till  $\mathfrak{D}_{\lambda f} = 0$ . Ekvationen (54) säger således, att likheten

$$S_f \varphi = K f(x, \eta) + \varphi^{(q)} - \varphi^{(q-1)} + \dots \pm \varphi^{(1)}$$

kan lösas. För att alltså likheten

$$S_f \varphi^{(q+1)} = \varphi^{(q)} - \varphi^{(q-1)} + \dots \pm \varphi^{(1)}$$

skall kunna lösas, är det nödvändigt, att ekvationen

$$S_f \varphi = K f(x, \eta)$$

är lösbar, d. v. s. att

$$\int_0^1 f(x, \eta) \psi(x) dx = 0.$$

Enligt definitionen på  $\psi$  följer häraf

$$\psi(\eta) = 0.$$

För att ännu en principalfunktion skall kunna bildas, måste alltså  $\eta$  väljas så, att det satisfierar denna likhet. Då försvinner emellertid den första funktionen

$$\varphi^{(1)} = \mathfrak{D}_f \left( \frac{x}{\eta} \right)$$

identiskt, ty som vi sett innehåller  $\mathfrak{D}_f \left( \frac{x}{\eta} \right)$  faktorn  $\psi(\eta)$ . Vi kunna alltså icke bilda mer än  $q$  principalfunktioner.

Af likheterna (53) draga vi slutsatsen, att

$$(55) \quad 0 = (\varphi^{(1)} \psi) = (\varphi^{(2)} \psi) = \dots = (\varphi^{(q-1)} \psi).$$



Däremot är  $(\varphi^{(q)} \psi)$  icke noll, ty i så fall skulle ännu en principalfunktion kunna bildas. Af likheten (54) framgår, att

$$\int_0^1 f(x, \eta) \psi(x) dx \cdot \frac{1}{|q|} \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_q \mathfrak{D}_f \left( \begin{smallmatrix} x_1 \dots x_q \\ x_1 \dots x_q \end{smallmatrix} \right) + \int_0^1 \varphi^{(q)}(x) \psi(x) dx = 0.$$

Införa vi här värdet på  $\varphi^{(q)}(x)$  och sätta

$$\psi(x) = \mathfrak{D}_f \left( \begin{smallmatrix} \xi \\ x \end{smallmatrix} \right),$$

erhålles

$$(56) \quad q \int_0^1 \mathfrak{D}_f \left( \begin{smallmatrix} \xi \\ t \end{smallmatrix} \right) dt \int_0^1 dx_2 \dots \int_0^1 dx_q \mathfrak{D}_f \left( \begin{smallmatrix} t x_2 \dots x_q \\ \eta x_2 \dots x_q \end{smallmatrix} \right) = \mathfrak{D}_f \left( \begin{smallmatrix} \xi \\ \eta \end{smallmatrix} \right) \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_q \mathfrak{D}_f \left( \begin{smallmatrix} x_1 \dots x_q \\ x_1 \dots x_q \end{smallmatrix} \right).$$

Jag inför nu i stället för  $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots, \varphi^{(q)}$  andra funktioner  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q$  enligt formlerna

$$(57) \quad \begin{cases} \varphi_1 = \varphi^{(1)}, \\ \varphi_2 = -(\varphi^{(2)} + 2\varphi^{(1)}), \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_p = (-1)^{p-1} \left( \varphi^{(p)} + p\varphi^{(p-1)} + \frac{p \cdot (p-1)}{|2|} \varphi^{(p-2)} + \dots + p\varphi^{(1)} \right), \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Som lätt verifieras, satisfiera dessa funktioner följande likheter:

$$(58) \quad \begin{cases} S_f \varphi_1 = 0, \\ S_f \varphi_2 + \varphi_1 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ S_f \varphi_q + \varphi_{q-1} = 0. \end{cases}$$

Funktionerna  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q$  kallas då ett kanoniskt system af principalfunktioner.

Man har uppenbarligen som en följd af relationerna (55), (56)

$$(59) \quad \begin{cases} (\varphi_p \psi) = 0 \quad \text{för } p < q \\ (\varphi_q \psi) = \frac{(-1)^{q-1}}{|q|} \mathfrak{D}_f \left( \begin{smallmatrix} \xi \\ \eta \end{smallmatrix} \right) \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_q \mathfrak{D}_f \left( \begin{smallmatrix} x_1 \dots x_q \\ x_1 \dots x_q \end{smallmatrix} \right). \end{cases}$$

Vi gå nu att undersöka, hur detta system af principalfunktioner förhåller sig vid en oändligt liten variation af kärnan  $f(x, y)$ . För att ge en föreställning om förhållandena skall jag först betrakta ett speciellt fall. Antag kärnan  $f(x, y)$  vara

$$f(x, y) = -[u(x)u(y) + v(x)v(y) + u(x)v(y)],$$

där funktionerna  $u$  och  $v$  uppfylla villkoren

$$\int_0^1 \overline{u(x)}^2 dx = 1, \quad \int_0^1 \overline{v(x)}^2 dx = 1, \quad \int_0^1 u(x)v(x) dx = 0.$$

Man ser då omedelbart, att

$$S_f u = 0, \quad S_f v + u = 0, \quad T_f u + v = 0, \quad T_f v = 0.$$

$\lambda = 1$  är alltså ett fundamentalvärde, mot hvilket svarar följande kanoniska system af principalfunktioner

$$\varphi_1 = u, \quad \varphi_2 = v.$$

Vidare är

$$\psi = v.$$

Det är lätt att konstatera, att  $\lambda = 1$  är en dubbelrot till  $\mathfrak{D}_\lambda f = 0$ . Bilda nämligen

$$f_2(x, y) = \int_0^1 f(x, t) f(t, y) dt = u(x) u(y) + v(x) v(y) + u(x) v(y) = -f(x, y).$$

Allmänt finnes, att

$$f_n(x, y) = \int_0^1 f_{n-1}(x, t) f(t, y) dt = (-1)^{n-1} f(x, y).$$

$\mathfrak{D}_\lambda f$  kan beräknas ur serien

$$\begin{aligned} \log \mathfrak{D}_\lambda f &= \lambda \int_0^1 f(x, x) dx - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^1 f_2(x, x) dx + \frac{\lambda^3}{3} \int_0^1 f_3(x, x) dx - \dots, \\ &= \int_0^1 f(x, x) dx \left( \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{3} + \dots \right). \end{aligned}$$

Nu är

$$\int_0^1 f(x, x) dx = - \int_0^1 \overline{u(x)}^2 dx - \int_0^1 \overline{v(x)}^2 dx - \int_0^1 u(x) v(x) dx = -2,$$

således

$$\begin{aligned} \log \mathfrak{D}_\lambda f &= -2 \left( \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{3} + \dots \right) = 2 \log(1 - \lambda), \\ \mathfrak{D}_\lambda f &= (1 - \lambda)^2. \end{aligned}$$

Låt nu  $\delta f(x, y)$  vara af formen

$$\delta f(x, y) = -\mu v(x) u(y).$$

För att en funktion  $\Phi(x)$  skall vara fundamentalfunktion till kärnan  $f(x, y) + \delta f(x, y)$  med fundamentalvärdet  $\Lambda$ , måste den tydligen vara af formen

$$\Phi(x) = a u(x) + b v(x).$$

Insättes detta uttryck i den varierade ekvationen, så fås

$$\begin{aligned} a(\Lambda - 1) + b\Lambda &= 0, \\ a\mu\Lambda + b(\Lambda - 1) &= 0, \end{aligned}$$

eller efter elimination af  $a$  och  $b$

$$\begin{vmatrix} \Lambda - 1 & \Lambda \\ \mu\Lambda & \Lambda - 1 \end{vmatrix} = \Lambda^2(1 - \mu) - 2\Lambda + 1 = 0,$$



hvaraf

$$\Lambda = \frac{1}{1 \mp \sqrt{\mu}}.$$

$a$  och  $b$  kunna nu bestämmas, och vi kunna välja  $a$  godtyckligt, t. ex.  $a = 1$ . Då är

$$b = \frac{1 - \Lambda}{\Lambda} = \mp \sqrt{\mu}.$$

Alltså äro de båda funktionerna

$$\Phi_1(x) = u(x) - \sqrt{\mu} v(x),$$

$$\Phi_2(x) = u(x) + \sqrt{\mu} v(x)$$

fundamentalfunktioner till den varierade integralekvationen och svara mot fundamentalvärdena

$$\Lambda_1 = 1 + \frac{\sqrt{\mu}}{1 - \sqrt{\mu}},$$

$$\Lambda_2 = 1 - \frac{\sqrt{\mu}}{1 + \sqrt{\mu}}.$$

Vi få alltså nu två fundamentalvärden och två fundamentalfunktioner i stället för en. En viktig omständighet är att variationen af såväl fundamentalvärde som fundamentalfunktion är af samma ordning som  $\sqrt{\mu}$ , eller kvadratroten ur kärnans variation.

Analogt har man att vänta, att  $\delta\lambda$  skall vara af ordningen  $\mu^{\frac{1}{q}}$ , om  $q$  principalfunktioner finnas. Detta visar sig också vara förhållandet i allmänhet. Vi återgå alltså till betraktande af det fall, att  $\lambda = 1$  är en  $q$ -faldig rot till  $\mathfrak{D}_\lambda f = 0$ , och att däremot svarar fundamentalfunktionen  $\varphi_1$  samt de kanoniska principalfunktionerna  $\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_q$ . Låt kärnan  $f(x, y)$  erhålla variationen

$$\delta f(x, y) = \mu h(x, y).$$

Vi söka nu bilda en sådan kombination af fundamental- och principalfunktionerna

$$(60) \quad \Phi(x) = \varphi_1(x) + \varepsilon_1 \varphi_2(x) + \dots + \varepsilon_{q-1} \varphi_q(x),$$

att den blir en fundamentalfunktion till den varierade likheten, om den ökas med en kvantitet  $\delta\varphi(x)$  af samma storleksordning som  $\delta f$ . Alltså skall

$$\Phi(x) + \delta\varphi(x) + (1 + \delta\lambda) \int_0^1 [f(x, y) + \mu h(x, y)] [\Phi(y) + \delta\varphi(y)] dy = 0.$$

Är  $\mu = 0$ , så är  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_{q-1} = \delta\lambda = 0$ . Dessa kvantiteter äro alltså oändligt små, då  $\mu$  är oändligt litet, och deras produkter med  $\mu$  och  $\delta\varphi$  kunna alltså försummas. Göra vi det, få vi

$$\begin{aligned} & \varphi_1(x) + \varepsilon_1 \varphi_2(x) + \dots + \varepsilon_{q-1} \varphi_q(x) + \\ & + (1 + \delta\lambda) \int_0^1 f(x, y) [\varphi_1(y) + \varepsilon_1 \varphi_2(y) + \dots + \varepsilon_{q-1} \varphi_q(y)] dy + \\ & + \mu \int_0^1 h(x, y) \varphi_1(y) dy + \delta\varphi(x) + \int_0^1 f(x, y) \delta\varphi(y) dy = 0, \end{aligned}$$

hvilket med hänsyn till ekvationerna (58) öfvergår i

$$\varphi_1(x) + \varepsilon_1 \varphi_2(x) + \dots + \varepsilon_{q-1} \varphi_q(x) - (1 + \delta\lambda) \varphi_1(x) - \varepsilon_1(1 + \delta\lambda) [\varphi_1(x) + \varphi_2(x)] - \dots - \varepsilon_{q-1}(1 + \delta\lambda) [\varphi_{q-1}(x) + \varphi_q(x)] + \mu \int_0^1 h(x, y) \varphi_1(y) dy + \delta\varphi(x) + \int_0^1 f(x, y) \delta\varphi(y) dy = 0.$$

Vi sätta nu koefficienterna till  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{q-1}$  lika med noll och få

$$(61) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \delta\lambda + \varepsilon_1(1 + \delta\lambda) = 0, & \varepsilon_1 = -\frac{\delta\lambda}{1 + \delta\lambda}, \\ \varepsilon_1 \delta\lambda + \varepsilon_2(1 + \delta\lambda) = 0, & \varepsilon_2 = \left(-\frac{\delta\lambda}{1 + \delta\lambda}\right)^2, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \varepsilon_{q-2} \delta\lambda + \varepsilon_{q-1}(1 + \delta\lambda) = 0; & \varepsilon_{q-1} = \left(-\frac{\delta\lambda}{1 + \delta\lambda}\right)^{q-1}. \end{array} \right.$$

Det återstår då för bestämningen af  $\delta\varphi(x)$  integralekvationen

$$(62) \quad S_f \delta\varphi(x) - \varepsilon_{q-1} \delta\lambda \varphi_q(x) + \mu \int_0^1 h(x, y) \varphi_1(y) dy = 0.$$

Möjlighetsvillkoret för dess lösning ger

$$(63) \quad \varepsilon_{q-1} \delta\lambda \int_0^1 \varphi_q(x) \psi(x) dx = \mu \int_0^1 dx \int_0^1 dy \psi(x) h(x, y) \varphi_1(y),$$

eller om vi införa värdet af  $\varepsilon_{q-1}$  och begagna ett förkortadt beteckningssätt,

$$(63 a) \quad (\varphi_q \psi) \frac{(-\delta\lambda)^q}{(1 + \delta\lambda)^{q-1}} + \mu(\psi h \varphi_1) = 0.$$

Häraf fås  $\delta\lambda$  utvecklad efter potenser af  $\mu^{\frac{1}{q}}$ :

$$(64) \quad \delta\lambda = -\mu^{1/q} \left[ -\frac{(\psi h \varphi_1)}{(\varphi_q \psi)} \right]^{1/q} + \dots$$

Detta är säkert möjligt, ty som vi ofvan sett, är  $(\varphi_q \psi) \neq 0$ .

Vi få  $q$  olika värden på  $\delta\lambda$ , om icke  $(\psi h \varphi_1) = 0$ ; alltså  $q$  olika fundamentalvärden med  $q$  däremot svarande fundamentalfunktioner. Antalet fundamentalfunktioner har alltså ökats med  $q-1$ .

Är däremot

$$(\psi h \varphi_1) = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \psi(x) h(x, y) \varphi_1(y) = 0,$$

så befinna vi oss inför ett nytt undantagsfall af ännu mera speciel art. Den ofvan framställda metoden för oss då ej till målet.

Det nästa af de i afdelning II uteslutna undantagsfallen är det fall, att till ett visst  $\lambda$ -värde, t. ex.  $\lambda = 1$ , höra  $n$  fundamentalfunktioner  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  och att

$$(65) \quad \left| \begin{array}{c} (\varphi_1 \psi_1) \dots (\varphi_1 \psi_n) \\ \dots\dots\dots \\ (\varphi_n \psi_1) \dots (\varphi_n \psi_n) \end{array} \right| = 0.$$



Det är då uppenbarligen möjligt att bilda åtminstone en fundamentalfunktion  $\Phi$  sådan att

$$0 = (\Phi \psi_1) = (\Phi \psi_2) = \dots = (\Phi \psi_n),$$

och att alltså likheten

$$S_f \Phi' + \Phi = 0$$

kan lösas.  $\Phi'$  är då en principalfunktion.

Nu har emellertid GOURSAT visat \*), att förekomsten af principalfunktioner är ett nödvändigt och tillräckligt villkor för, att det betraktade fundamentalvärdet skall vara en rot till  $\mathfrak{D}_\lambda f = 0$  af högre ordning än  $n$ , fundamentalfunktionernas antal. Enligt GOURSAT kan man då finna ett system af  $q_1 + q_2 + \dots + q_n$  lineärt oberoende funktioner  $\varphi_1^{(1)} \dots \varphi_{q_1}^{(1)}, \varphi_1^{(2)} \dots \varphi_{q_2}^{(2)}, \dots, \varphi_1^{(n)} \dots \varphi_{q_n}^{(n)}$ , som satisfiera likheterna

$$(66) \quad \begin{cases} S_f \varphi_1^{(1)} = 0, & S_f \varphi_1^{(2)} = 0, & \dots & S_f \varphi_1^{(n)} = 0, \\ S_f \varphi_2^{(1)} + \varphi_1^{(1)} = 0, & S_f \varphi_2^{(2)} + \varphi_1^{(2)} = 0, & \dots & S_f \varphi_2^{(n)} + \varphi_1^{(n)} = 0, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_f \varphi_{q_1}^{(1)} + \varphi_{q_1-1}^{(1)} = 0, & S_f \varphi_{q_2}^{(2)} + \varphi_{q_2-1}^{(2)} = 0, & \dots & S_f \varphi_{q_n}^{(n)} + \varphi_{q_n-1}^{(n)} = 0. \end{cases}$$

Här är  $q_1 + q_2 + \dots + q_n$  just lika med ordningstalet af roten  $\lambda = 1$  till  $\mathfrak{D}_\lambda f = 0$ .

Det så definierade systemet af funktioner kallas ett kanoniskt system af principalfunktioner. Funktionerna  $\varphi_1^{(1)}, \varphi_1^{(2)}, \dots, \varphi_1^{(n)}$  äro uppenbarligen fundamentalfunktioner.

Betrakta funktionerna i t. ex. den  $\nu$ -te gruppen. Taga vi en af dessa funktioner, låt vara  $\varphi_i^{(\nu)}$  ( $i < q_\nu$ ), så framgår af ekvationen

$$S_f \varphi_{i+1}^{(\nu)} + \varphi_i^{(\nu)} = 0,$$

att

$$(67) \quad (\varphi_i^{(\nu)} \psi_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad i < q_\nu$$

Detta äger däremot icke rum, om vi sätta  $i = q_\nu$ , ty i så fall skulle ytterligare en principalfunktion kunna bildas, hvilket är i strid mot antagandet, att funktionen  $\varphi_{q_\nu}^{(\nu)}$  är den sista i sin grupp. Vi kunna alltså utföra en lineär transformation af funktionerna  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ , så att

$$(68) \quad (\varphi_i^{(\nu)} \psi_j) = \begin{cases} 0 & \text{för } i \neq j, \\ 1 & \text{för } i = j. \end{cases}$$

Det af likheterna (66) definierade kanoniska systemet är icke entydigt bestämdt. Det kan på olika sätt lineärt transformeras utan att upphöra att vara kanoniskt. Vår uppgift är att söka en sådan kanonisk form, att på dess enskilda grupper samma förfaringssätt kan tillämpas vid variationen, som ofvan kommit till användning, då blott en grupp existerade.

\*) Se hans i det föregående citerade arbete. Den nedan använda beteckningen afviker något från GOURSATS.

Utan att göra någon reel inskränkning kunna vi antaga, att

$$q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_n.$$

Det är då ej svårt att inse, att vid en transformation till ny kanonisk form talen  $q_1, q_2, \dots, q_n$  icke förändras \*).

Betrakta nu en viss grupp, till exempel den  $p$ :te. Hur komma funktionerna i denna grupp att se ut efter en kanonisk transformation?

Gruppen innehåller  $q_p$  funktioner. Ett visst antal af de öfriga talen  $q$  kunna vara lika stora med  $q_p$ :

$$q_{r-1} > q_r = q_{r+1} = \dots = q_p = \dots = q_s > q_{s+1}$$

Låt  $\Phi_1$  vara den första funktionen i den nya gruppen.  $\Phi_1$  är såsom fundamentalfunktion en kombination af fundamentalfunktionerna  $\varphi_1^{(1)}, \varphi_1^{(2)}, \dots$ . Emellertid kan icke någon funktion  $\varphi_1^{(\nu)}$  ingå, för hvilken  $\nu > s$ . I så fall skulle nämligen i den  $q_\nu$ -te funktionen i gruppen,  $\Phi_{q_\nu}$ , ingå funktionen  $\varphi_{q_\nu}^{(\nu)}$ ; och som  $(\varphi_{q_\nu}^{(\nu)} \psi_\nu) = 1$ , skulle inga fler funktioner kunna bildas i gruppen. Gruppen skall emellertid innehålla  $q_p = q_s > q_\nu$  funktioner. Alltså kan  $\varphi_1^{(\nu)}$  icke ingå i  $\Phi_1$ , som således måste vara af formen

$$(69) \quad \Phi_1 = \alpha_1 \varphi_1^{(1)} + \dots + \alpha_s \varphi_1^{(s)}.$$

Nästa funktion i gruppen,  $\Phi_2$ , innehåller tydligen kombinationen

$$\alpha_1 \varphi_2^{(1)} + \dots + \alpha_s \varphi_2^{(s)}.$$

Dessutom kan en lineär kombination af fundamentalfunktioner tilläggas; men af samma skäl som nyss få däribland inga funktioner  $\varphi_1^{(\nu)}$  förekomma, för hvilka  $q_\nu < q_p - 1$ .

Vi fortgå på samma sätt och bilda slutligen den sista funktionen i gruppen,  $\Phi_{q_p}$ . För vårt ändamål är i synnerhet följande fråga betydelsefull: Hvilka af de sista principalfunktionerna i hvarje grupp, alltså funktionerna  $\varphi_{q_1}^{(1)}, \varphi_{q_2}^{(2)}, \dots, \varphi_{q_n}^{(n)}$ , ingå i funktionen  $\Phi_{q_p}$ ?

Uppenbarligen förekommer kombinationen

$$\alpha_1 \varphi_{q_p}^{(1)} + \alpha_2 \varphi_{q_p}^{(2)} + \dots + \alpha_s \varphi_{q_p}^{(s)},$$

af hvilka de  $s - r + 1$  sista äro de sista i sina respektive grupper. Af de sista principalfunktionerna  $\varphi_{q_r}^{(r)} \dots \varphi_{q_s}^{(s)}$  förekommer alltså kombinationen

$$(70) \quad \alpha_r \varphi_{q_r}^{(r)} + \dots + \alpha_s \varphi_{q_s}^{(s)}.$$

Dessutom kunna ett visst antal andra funktioner  $\varphi_{q_\nu}^{(\nu)}$  förekomma. Däribland finnes emellertid ingen, för hvilken  $\nu \leq s$ . En dylik funktion leder ju sitt ursprung

---

\*) Jag uppehåller mig ej vid beviset för denna sats, utan anmärker blott, att såsom af det följande framgår, det för vårt ändamål är tillräckligt att ta hänsyn blott till sådana transformationer, för hvilka  $q_1, q_2, \dots, q_n$  icke ändras. Om ytterligare andra transformationer existera, är oss då likgiltigt.



från en fundamentalfunktion  $\varphi_1^{(\nu)}$ , som införts i funktionen  $\Phi_{q_p - q_\nu + 1}$ . Alltså måste  $q_p - q_\nu + 1$  vara  $\geq 1$ ; och de funktioner, som införts i  $\Phi_1$ , ha vi redan tagit hänsyn till genom uttrycket (70). För de öfriga är alltså  $q_p = q_s > q_\nu$ , hvaraf  $\nu > s$ .

Funktionen  $\Phi_{q_n}$  är alltså af formen

$$(71) \quad \Phi_{q_n} = \alpha_r \varphi_{q_r}^{(r)} + \dots + \alpha_s \varphi_{q_s}^{(s)} + \beta_{s+1} \varphi_{q_{s+1}}^{(s+1)} + \dots + \beta_n \varphi_{q_n}^{(n)} + \Phi',$$

där  $\Phi'$  betyder en kombination af fundamental- och principalfunktioner sådan att

$$0 = (\Phi' \psi_1) = (\Phi' \psi_2) = \dots = (\Phi' \psi_n).$$

Vi söka nu bestämma de  $n$  koefficienterna  $\alpha_1, \dots \alpha_s, \beta_{s+1}, \dots \beta_n$  så, att på funktionssystemet  $\Phi_1, \Phi_2, \dots \Phi_{q_p}$  samma förfaringssätt kan användas som på systemet  $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_q$ , då blott en fundamentalfunktion fanns. Funktionen

$$(72) \quad \Phi_1 + \varepsilon_1 \Phi_2 + \dots + \varepsilon_{q_n-1} \Phi_{q_n} + \delta \Phi$$

skall alltså vara en fundamentalfunktion till den varierade likheten svarande mot fundamentalvärdet  $1+\delta\lambda$ . För bestämningen af kvantiteterna  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{q_p-1}$  få vi då ekvationer, fullt analoga med (61); och för beräkningen af  $\delta\Phi$  återstår därefter ekvationen

$$(73) \quad S_f \delta \Phi - \varepsilon_{q_p-1} \delta \lambda \Phi_{q_p}(x) + \mu \int_0^1 h(x, y) \Phi_1(y) dy = 0$$

Vi sätta för korthets skull

$$(74) \quad \varepsilon_{q_p-1} \delta \lambda = \left( -\frac{\delta \lambda}{1 + \delta \lambda} \right)^{q_p-1} \delta \lambda = \rho,$$

och använda dessutom beteckningssättet

$$\mu(\psi_i h \varphi_1^{(j)}) = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \psi_i(x) \delta f(x, y) \varphi_1^{(j)}(y) = A_{ij}.$$

Med hänsyn till uttrycken (69), (71) och relationerna (68) kunna då de  $n$  möjlighetsvillkoren för integralekvationen (73) skrivas

[illegible]

Ur dessa  $n$  ekvationer skola de  $n+1$  obekanta  $\rho, \alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_{s+1}, \dots, \beta_n$  bestämmas. En af de obekanta (dock icke  $\rho$ ) kan tydligen väljas godtyckligt. Ur de  $s$  första ekvationerna få vi genom elimination af  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ :

$$(76) \quad \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1r-1} & A_{1r} & \dots & A_{1s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{r-11} & \dots & A_{r-1r-1} & A_{r-1r} & \dots & A_{r-1s} \\ A_{r1} & \dots & A_{rr-1} & A_{rr} - \rho & \dots & A_{rs} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{s1} & \dots & A_{sr-1} & A_{sr} & \dots & A_{ss} - \rho \end{vmatrix} = 0.$$

Detta är en ekvation för bestämningen af  $\rho$ ; den är af gradtalet  $s-r+1$ , såvida icke

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1r-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{r-11} & \dots & A_{r-1r-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Är ej detta förhållandet, och äro ekvationens rötter alla olika, få vi ur de  $s$  första ekvationerna  $s-r+1$  olika värdesystem på  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ . De återstående ekvationerna ge oss sedan lika många värdesystem på  $\beta_{s+1}, \dots, \beta_n$ , såvida icke  $\rho = 0$ .

Sedan  $\rho$  bestämts, erhålles fundamentalvärdets variation  $\delta\lambda$  ur ekvationen

$$\delta\lambda \left( -\frac{\delta\lambda}{1+\delta\lambda} \right)^{q_p-1} = \rho.$$

Mot hvarje värde på  $\rho$  svara  $q_p$  olika värden på  $\delta\lambda$ , såvida icke  $\rho = 0$ , hvilket fall vi redan förut måst utesluta.

Om intet af de antydda undantagsfallen inträffar, då vi låta  $p$  variera från 1 till  $n$ , erhålla vi  $q_1 + q_2 + \dots + q_n$  olika värden på  $\delta\lambda$ . Multipelroten  $\lambda = 1$  till  $\mathfrak{D}_{\lambda f} = 0$  upplöser sig alltså i enkla rötter.

Koefficienterna i den ofvan (formel (71)) med  $\Phi'$  betecknade funktionen äro hittills lämnade obestämda. Deras värden bli bestämda, då termer af högre ordning beräknas. En dylik beräkning synes emellertid ej erbjuda något större intresse. Hufvudsaken är att få ett uttryck för variationen  $\delta\lambda$ , och för att få ett approximativt sådant är den ofvan utförda räkningen tillräcklig.

Äfven här ha en del undantagsfall måst uteslutas. Att undersöka dem med en liknande metod är nog möjligt, men synes knappast ge några nya allmänna resultat. Man förlorar sig i mängden af förekommande specialfall. En dylik undersökning är dessutom så mycket mindre af nöden, som dessa fall alltid kunna behandlas med den i följande afdelning framställda allmänna metoden. Hufvudvikten med denna metod är emellertid, att konvergensen af de i det föregående formellt bildade uttrycken däraf framgår.



V.

Betrakta integralekvationen

$$(77) \quad \varphi(x) + \int_0^1 [\lambda f(x, y) + \rho h(x, y)] \varphi(y) dy = \chi(x).$$

Lösningen af densamma beror af kvantiteterna

$$(78) \quad \mathfrak{D}_{\lambda f + \rho h}, \quad \mathfrak{D}_{\lambda f + \rho h} \left( \frac{x}{y} \right), \dots$$

Jag påstår, att dessa kvantiteter kunna utvecklas i potensserier af parametrarna  $\lambda$  och  $\rho$ , och att dessa serier konvergera för hvarje ändligt värde af  $\lambda$  och  $\rho$ .

Bevis: Allmänna termen i  $\mathfrak{D}_{\lambda f + \rho h}$  (de följande  $\mathfrak{D}$ -kvantiteterna kunna undersökas på samma sätt som  $\mathfrak{D}_{\lambda f + \rho h}$ ) heter:

[illegible]

Detta är tydligen ett polynom af  $n$ :te graden i  $\lambda$  och  $\rho$  och kan alltså skrivas

$$\frac{1}{|n|} (a_{n0} \lambda^n + a_{n-11} \lambda^{n-1} \rho + a_{n-22} \lambda^{n-2} \rho^2 + \dots + a_{0n} \rho^n).$$

$a_{n0}$  erhålles enkelt:

$$a_{n0} = \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_n \begin{vmatrix} f(x_1, x_1) & \dots & f(x_1, x_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ f(x_n, x_1) & \dots & f(x_n, x_n) \end{vmatrix}.$$

För att erhålla en öfre gräns för  $a_{n_0}$  tillämpa vi HADAMARDS determinantsats. Jag antar  $f(x, y)$  och  $h(x, y)$  vara ändliga och betecknar med  $M$  maximum af deras absoluta belopp. Vi få då

$$|a_n 0| \leq M^n n^{\frac{n}{2}}.$$

Vi gå nu till beräkningen af  $a_{n-11}$ . För att finna koefficienten till  $\lambda^{n-1} \rho$  i utvecklingen af

[illegible]

kan man gå tillväga på följande sätt: Ersätt i determinanten

$$(81) \quad f\left(\begin{matrix} x_1 & \dots & x_n \\ x_1 & \dots & x_n \end{matrix}\right) = \frac{\left| \begin{array}{c} f(x_1, x_1) \dots f(x_1, x_n) \\ \vdots \\ f(x_n, x_1) \dots f(x_n, x_n) \end{array} \right|}{n!}$$

den  $i$ -te raden med

$$h(x_i, x_1), h(x_i, x_2), \dots, h(x_i, x_n).$$

Låta vi  $i$  genomlöpa talen  $1, 2, \dots, n$ , få vi  $n$  stycken determinanter af  $n$ -te ordningen; deras summa är tydligen lika med koefficienten till  $\lambda^{n-1} \rho$  i utvecklingen af (80). Hvarje dylik determinant är enligt HADAMARDS sats mindre än

$$M^n n^{\frac{n}{2}}$$

i absolut belopp. Deras summa är alltså till sitt absoluta värde mindre än

$$n M^n n^{\frac{n}{2}}.$$

Vi ha att integrera  $n$  gånger mellan 0 och 1 för att få  $a_{n-11}$ , som befinnes satisfiera olikheten

$$| a_{n-11} | \leq n M^n n^{\frac{n}{2}}.$$

För att få koefficienten till  $\lambda^{n-2} \rho^2$  i utvecklingen af (80), ha vi på samma sätt att ersätta  $i$ -te och  $j$ -te raderna i (81) med

$$\begin{aligned} & h(x_i, x_1), h(x_i, x_2), \dots, h(x_i, x_n). \\ & h(x_j, x_1), h(x_j, x_2), \dots, h(x_j, x_n) \end{aligned}$$

respektive, samt summera öfver alla  $i, j$ , där hvarje kombination af två tal tages en gång. Vi få en summa af  $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$  termer. Hvarje term är en determinant af ordningen  $n$ , som till sitt absoluta belopp ligger under  $M^n n^{\frac{n}{2}}$ . Man erhåller så

$$| a_{n-22} | \leq \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} M^n n^{\frac{n}{2}}.$$

På samma sätt fås allmänt

$$(82) \quad | a_{n-pp} | \leq \frac{n(n-1) \dots (n-p+1)}{1 \cdot 2 \dots p} M^n n^{\frac{n}{2}}.$$

Alltså är

$$(83) \quad | a_{n0} \lambda^n | + | a_{n-11} \lambda^{n-1} \rho | + \dots + | a_{0n} \rho^n | \leq (|\lambda| + |\rho|)^n M^n n^{\frac{n}{2}}.$$

Koefficienterna i utvecklingen af  $\mathfrak{D}_{\lambda f + \rho h}$  äro alltså till sitt absoluta belopp mindre än koefficienterna i serien

$$(84) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{\frac{n}{2}}}{n} M^n (\lambda + \rho)^n,$$

hvilken, såsom i teorien för integralekvationer visas, är uniformt konvergent för hvarje ändtligt värde på  $\lambda$  och  $\rho$ .

Det är sålunda bevisat, att determinanten till ekvationen (77) kan utvecklas i en ständigt konvergent potensserie af  $\lambda$  och  $\rho$ . Den är alltså en analytisk funktion af  $\lambda$  och  $\rho$ , som icke har några singulariteter för ändliga värden af dessa variabler. Häraf följer, att  $\mathfrak{D}_{\lambda f + \rho h}$  kan utvecklas i en konvergent potensserie af  $\lambda - \lambda_0$ ,  $\rho - \rho_0$ , där  $\lambda_0$  och  $\rho_0$  betyda hvilka ändliga värden som helst.



Samma satser gälla äfven om de öfriga kvantiteterna (78).

Satserna äro äfven giltiga, om vi ersätta parametern  $\rho$  med  $\lambda\mu$ . Kvantiteterna

$$(85) \quad \mathfrak{D}_{\lambda f + \lambda\mu h}, \quad \mathfrak{D}_{\lambda f + \lambda\mu h} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \dots,$$

hvilka höra till ekvationen

$$(86) \quad \varphi(x) + \lambda \int_0^1 [f(x, y) + \mu h(x, y)] \varphi(y) dy = \chi(x),$$

kunna alltså utvecklas i ständigt konvergenta potensserier af  $\lambda$  och  $\mu$  eller af  $\lambda - \lambda_0$  och  $\mu - \mu_0$ .

Antag nu, att till kärnan  $f(x, y)$  hör fundamentalvärdet  $\lambda = \lambda_0$ . Hur varierar detta fundamentalvärde, då funktionen  $f(x, y)$  erhåller tillskottet  $\mu h(x, y)$ ?

För att finna svaret härpå bilda vi den nya ekvationens determinant  $\mathfrak{D}_{\lambda f + \lambda\mu h}$ . Som vi nyss sett, kan den utvecklas i en konvergent potensserie af  $\kappa = \lambda - \lambda_0$  och  $\mu$ :

$$(87) \quad \mathfrak{D}_{\lambda f + \lambda\mu h} = d_{10} \kappa + d_{01} \mu + d_{20} \kappa^2 + d_{11} \kappa\mu + d_{02} \mu^2 + \dots$$

Den konstanta termen  $d_{00}$  bortfaller, ty för  $\mu = 0$  skall  $\lambda_0$  vara ett fundamentalvärde, hvaraf  $\mathfrak{D} = 0$  för  $\kappa = \mu = 0$ . För att nu finna fundamentalvärdena till den varierade kärnan, ha vi att sätta

$$(88) \quad 0 = d_{10} \kappa + d_{01} \mu + d_{20} \kappa^2 + d_{11} \kappa\mu + d_{02} \mu^2 + \dots$$

Ur denna likhet erhålla vi enligt satsen om implicita funktioner  $\kappa$  utvecklad efter potenser af  $\mu$ . Är  $d_{10} \neq 0$ , så fortskrider denna serie efter hela potenser af  $\mu$  och vi få endast ett värde på  $\kappa$ , som försvinner samtidigt med  $\mu$ ; är däremot  $d_{10} = 0$ , få vi flera värden på  $\kappa$ . Serien fortskrider då i allmänhet efter brutna potenser af  $\mu$ . Om emellertid ett visst antal af de öfriga koefficienterna  $d$  äro lika med noll, kunna utvecklingarna äfven i detta fall fortgå efter hela potenser.

Dessa serier konvergera för tillräckligt små  $\mu$ -värden enligt den allmänna teorin för implicita funktioner.

Den så bestämda kvantiteten  $\kappa$  är just lika med fundamentalvärdets variation, som ofvan betecknats med  $\delta\lambda$ . Vi kunna däraf draga den slutsatsen, att de utvecklingar af  $\delta\lambda$  efter potenser af  $\mu$ , som i det föregående bildats med tillhjälp af obestämda koefficient-metoden, äro konvergenta för tillräckligt små  $\mu$ -värden.

För att erhålla motsvarande fundamentalfunktion har man att bilda kvantiteten

$$(89) \quad \mathfrak{D}_{\lambda f + \lambda\mu h} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = d_{00} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \kappa d_{10} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mu d_{01} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \dots$$

och däri insätta den nyss funna utvecklingen af  $\kappa$  efter potenser af  $\mu$ . Resultatet kan ordnas efter potenser af  $\mu$ , och den så erhållna serien är konvergent för tillräckligt små  $\mu$ -värden. Om såsom vi nu antaga,  $\lambda_0 + \kappa$  icke är en multipelrot till den varierade ekvationens determinant, så försvinner icke detta uttryck identiskt, och vi kunna genom att däri ge  $y$  ett konstant värde  $\eta$  erhålla en fundamentalfunktion  $\Phi(x)$  till den varierade ekvationen.

Fundamentalfunktionen  $\Phi(x)$  är alltså utvecklad i en konvergent potensserie. Det vore emellertid förhastat att utan vidare identifiera denna serie med den i det föregående för en fundamentalfunktion härledda utvecklingen och däraf sluta sig till dennas konvergens. Denna utveckling är nämligen icke entydig, utan innehåller ett oändligt antal arbiträra konstanter. Det är lätt att bestämma dessa så, att serien divergerar.

Om vi alltså icke kunna utan alla inskränkningar sluta till konvergensen af den ifrågavarande utvecklingen, så kunna vi dock göra det, om de nämnda godtyckliga konstanterna på lämpligt sätt bestämts. Låt oss t. ex. återgå till det i afdelning III betraktade fallet. Där fortgå utvecklingarna af  $\delta\lambda_i$  och  $\delta\varphi_i$  efter hela potenser af  $\mu$ :

$$\begin{aligned}\delta\varphi_i &= \mu\varphi_{i1} + \mu^2\varphi_{i2} + \dots, \\ \delta\lambda_i &= \kappa + \mu\rho_{i1} + \mu^2\rho_{i2} + \dots,\end{aligned}$$

Af formen för  $\kappa$  framgår, att utvecklingen af  $\Phi$  också fortgår efter hela potenser af  $\mu$ :

$$(90) \quad \Phi(x) = a_0(x)\mu^s + a_1(x)\mu^{s+1} + \dots,$$

där  $s$  är ett helt tal.

Som  $\varphi_i + \delta\varphi_i$  är en fundamentalfunktion svarande mot ett enkelt fundamentalvärde, har man nödvändigtvis

$$(91) \quad \varphi_i + \delta\varphi_i = B\Phi(x),$$

där  $B$  är oberoende af  $x$ . Däremot kan  $B$  vara en godtycklig funktion af  $\mu$ , och häraf beror i själfva verket obestämdheten af koefficienterna i  $\delta\varphi_i$ . Insätta vi för  $B$  ett uttryck af formen

$$B = \frac{1}{\mu^s} (b_0 + b_1\mu + b_2\mu^2 + \dots),$$

där serien inom parentesen är konvergent för tillräckligt små  $\mu$ -värden, så blir  $\varphi_i + \delta\varphi_i$  produkten af två potensserier och alltså själf en potensserie, konvergent för tillräckligt små  $\mu$ -värden.

Vi kunna speciellt bestämma  $B$  så, att

$$B \int_0^1 \Phi(x) \phi_i(x) dx = 1,$$

hvilket ger

$$(92) \quad B = \frac{1}{\mu^s [(a_0\phi_i) + a_1\phi_i]\mu + \dots} = \frac{1}{\mu^s} (b_0 + b_1\mu + b_2\mu^2 + \dots),$$

och om  $(a_0\phi_i) \neq 0$ , är den så erhållna potensserien för  $B$  konvergent, då  $\mu$  är tillräckligt litet.

Den mot denna bestämning af  $B$  svarande serien för  $\varphi_i + \delta\varphi_i$  har alltså ett konvergensområde. Den är karaktäriserad däraf att

$$\int_0^1 [\varphi_i(x) + \delta\varphi_i(x)] \phi_i(x) dx = 1,$$



och alltså

$$\int \delta \varphi_i(x) \psi_i(x) dx = 0,$$

I afdelning III bestämde vi emellertid de i utvecklingen af  $\delta \varphi_i$  ingående godtyckliga konstanterna så, att

$$0 = (\varphi_{i1} \psi_i) = (\varphi_{i2} \psi_i) = \dots$$

Häraf framgår, att den nyss bildade serien för  $\delta \varphi_i$  är identisk med den i afdelning III bestämda. Denna senares konvergens för tillräckligt små  $\mu$ -värden är alltså bevisad.

För jämförelses skull må slutligen bifogas en bestämning af  $\kappa$  med tillhjälp af ekvationen (88). Jag betraktar det fall, att  $\lambda = 1$  är en  $q$ -faldig rot till ekvationen  $\mathfrak{D}_\lambda f = 0$ , men att  $\mathfrak{D}_f \left( \frac{x}{y} \right)$  icke identiskt försvinner. Af koefficienterna  $d_{i0}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) i ekvationen (88) försvinna då de  $q-1$  första, och  $d_{q0}$  är gifvet af

$$d_{q0} = \frac{1}{[q]} \left( \frac{d^q \mathfrak{D}_\lambda f}{d\lambda^q} \right)_{\lambda=1} = \frac{1}{[q]} \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_q \mathfrak{D}_f \left( \frac{x_1 \dots x_q}{x_1 \dots x_q} \right).$$

För att bilda koefficienten till  $\mu$ , alltså  $d_{01}$ , kunna vi använda följande af FREDHOLM gifna formel\*) för första variationen af  $\mathfrak{D}_f$

$$\delta \mathfrak{D}_f = \int_0^1 \mathfrak{D}_f \delta f(x, y) dx - \int_0^1 dx \int_0^1 dy \mathfrak{D}_f \left( \frac{y}{x} \right) \delta f(x, y).$$

Vi ha blott att ersätta  $\delta f(x, y)$  med  $\mu h(x, y)$  och beakta, att  $\mathfrak{D}_f$  försvinner, för att få termen i  $\mu$ :

$$\mu d_{01} = -\mu \int_0^1 dx \int_0^1 dy \mathfrak{D}_f \left( \frac{y}{x} \right) h(x, y).$$

Ekvationen (88) blir alltså, om vi uppskrifva termerna af lägsta ordning,

$$(93) \quad 0 = \frac{\kappa^q}{[q]} \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_q \mathfrak{D}_f \left( \frac{x_1 \dots x_q}{x_1 \dots x_q} \right) - \mu \int_0^1 dx \int_0^1 dy \mathfrak{D}_f \left( \frac{y}{x} \right) h(x, y) + \dots$$

Häraf fås  $\kappa$  utvecklad efter potenser af  $\mu^{\frac{1}{q}}$ .

I afdelning IV ha vi för den approximativa bestämningen af  $\delta \lambda$  i föreliggande fall funnit ekvationen (63 a). Ordna vi dess termer efter potenser af  $\delta \lambda$ , erhålles

$$(94) \quad 0 = (\varphi_q \psi) (-\delta \lambda)^q + \mu (\phi h \varphi_1) \dots$$

\* Acta Mathematica, bd 27, sid. 380.

För att uppvisa öfverensstämmelsen mellan uttrycken (93) och (94) insätter jag i det senare

$$\varphi_1(x) = \mathfrak{D}_f\left(\frac{x}{\eta}\right), \quad \psi(y) = \mathfrak{D}_f\left(\frac{\xi}{y}\right).$$

Enligt (59) är då

$$(95) \quad (\varphi_q \psi) = \frac{(-1)^{q-1}}{\underline{q}} \mathfrak{D}_f\left(\frac{\xi}{\eta}\right) \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_q \mathfrak{D}_f\left(\frac{x_1 \dots x_q}{x_1 \dots x_q}\right).$$

Vidare är

$$(96) \quad (\psi h \varphi_1) = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \psi(x) h(x, y) \varphi_1(y).$$

Enligt (51) är emellertid

$$\mathfrak{D}_f\left(\frac{y}{x}\right) = C \varphi_1(y) \psi(x) = C \mathfrak{D}_f\left(\frac{y}{\eta}\right) \mathfrak{D}_f\left(\frac{\xi}{x}\right).$$

För att bestämma konstanten  $C$  sätta vi t. ex.  $y = \xi$  och få då

$$C = \frac{1}{\mathfrak{D}_f\left(\frac{\xi}{\eta}\right)}.$$

Alltså är

$$(97) \quad \varphi_1(y) \psi(x) = \mathfrak{D}_f\left(\frac{y}{\eta}\right) \mathfrak{D}_f\left(\frac{\xi}{x}\right) = \mathfrak{D}_f\left(\frac{\xi}{\eta}\right) \mathfrak{D}_f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Med hänsyn till (97) öfvergår uttrycket (96) i

$$(98) \quad (\psi h \varphi_1) = \mathfrak{D}_f\left(\frac{\xi}{\eta}\right) \int_0^1 dx \int_0^1 dy \mathfrak{D}_f\left(\frac{y}{x}\right) h(x, y).$$

Inför man i ekvationen (94) uttrycken (95) och (98), konstaterar man omedelbart öfverensstämmelsen med (93).

Det är nu lätt att bilda termerna af lägsta ordning i utvecklingen af motsvarande fundamentalfunktion. Öfverensstämmelsen med det i afdelning IV bildade uttrycket framgår då utan svårighet.





LUNDS UNIVERSITETS ÅRSSKRIFT. N. F. Afd. 2. Bd 7. Nr 2.  
KONGL. FYSIOGRAFISKA SÄLLSKAPETS HANDLINGAR. N. F. Bd 22. Nr 2.

---

# MAGNETISCHE FELDMESSUNG

VON

MANNE SIEGBAHN



LUND 1911  
HÄKAN OHLSSONS BUCHDRUCKEREI





# I.

## Einleitung.

Eine der Hauptfragen bei magnetischen Untersuchungen ist die Bestimmung der Intensität magnetischer Felder. Diese Aufgabe kann wiederum je nach dem Zwecke der Untersuchung verschieden formuliert werden. In gewissen Fällen kann es genügen, die Konstanz des Feldes innerhalb des verwendeten Raumes zu konstatieren; in anderen Fällen will man die Variation des Feldes in einer bestimmten Richtung kennen. So hat z. B. P. CURIE<sup>1</sup> bei einem gewöhnlichen Ruhmkorffschen Elektromagnet ausser der Feldstärke  $H$  auch den Verlauf der Funktionen  $\frac{\partial H}{\partial x}$  und  $H \frac{\partial H}{\partial x}$  untersucht. Schliesslich bleibt als eine der wichtigsten Fragen die Bestimmung der Feldstärke in absolutem Masse übrig. Die experimentelle Ermittlung dieser Faktoren ist um so nötiger, als die theoretische Berechnung des Feldes sich im allgemeinen nicht durchführen lässt.

Das Auswerten der Magnetfelder, welche bei Elektromagneten (nach Ruhmkorff) mit platten und konischen Polschuhen entstehen, ist zwar von STEFAN<sup>2</sup> und gleichzeitig von EWING und LOW<sup>3</sup> ausgeführt worden. Die Voraussetzung hierbei ist aber, dass die Polschuhe als mit einer homogenen Flächendichte belegt angesehen werden können, was niemals völlig zutrifft. Über diese Berechnungen werden wir weiter unten sprechen.

Zur experimentellen Ermittlung der magnetischen Feldstärke kann man sich einer Menge Methoden bedienen; eine Zusammenstellung derselben nebst Angabe ihrer Verwendungsgebiete findet man z. B. in DU BOIS, Magnetische Kreise.

Bei Untersuchung stärkerer Magnetfelder kommen hauptsächlich folgende drei Methoden zur Verwendung:

1. der ballistische Galvanometer,
2. die Steighöhenmethode von Quincke<sup>4</sup>,
3. die Wismutspirale.

---

<sup>1</sup> CURIE: Journ. de Phys. (3) 4, 197, 263, 1895. C. R. 116, 136, 1893.

<sup>2</sup> STEFAN: Wien. Ber. 97: II, 176, 1888; 98: II, 1142, 1889; Wied. Ann. 38, 440, 1889.

<sup>3</sup> EWING und LOW: Phil. Trans. A, 221, 1889.

<sup>4</sup> DU BOIS giebt in seiner cit. Arbeit eine Verbesserung der Methode an.

Von diesen drei Methoden kann nur die erste zur Bestimmung der Feldintensität in C. G. S.-Einheiten dienen; bei den beiden anderen muss die Eichung durch Vergleichung mit einem anderswo experimentell bestimmten Feld<sup>1</sup> geschehen. Gewöhnlich wird wohl diese Fundamentalbestimmung nach der ballistischen Methode ausgeführt. Die erstgenannte Methode erlangt hierdurch eine grössere Bedeutung als die anderen. Hierzu kommt noch der Umstand, dass bei Messungen nach der ballistischen Methode eine grössere Genauigkeit erreicht werden kann. Gemäss neuen Untersuchungen von GANS und GMELIN<sup>2</sup> lassen sich bei Berücksichtigung aller Fehlerfaktoren mit dieser Methode Feldstärken mit einer Genauigkeit von etwa 0,2 % bestimmen. Gegen die letztere, am meisten benutzte Methode ist einzuwenden dass sie auf einer in theoretischer Hinsicht kompliziertes Phänomen gegründet ist, das noch nicht als völlig aufgeklärt angesehen werden kann. Ferner steht die gemessenen Grösse (die Widerstandszunahme) in keiner einfachen Beziehung zur gesuchten Quantität (der Feldstärke). Als geeigneter sind dagegen Instrumente zu bezeichnen bei denen es auf die theoretisch bekannte Wechselwirkung zwischen Magneten und elektrischen Strömen ankommt.

### I. Der Drehspulmagnetometer.

Während die ersten Strommesser auf das Prinzip einer beweglichen Magnetnadel in einer festen, von dem zu untersuchenden Strom durchflossenen Spule gegründet waren, ist man nunmehr zur Umkehrung dieses Instrumentes übergegangen: man lässt den Strom eine bewegliche Spule passieren, die in einem starken, homogenen Magnetfeld angebracht ist. Dieses Prinzip ist selbstverständlich ebenso gut für magnetische Messungen verwendbar, wenn man den Strom als bekannt voraussetzt. In der Tat scheint sogar diese Methode zuerst für magnetische Messungen angewandt worden zu sein. Der von W. WEBER<sup>3</sup> angegebene Magnetometer bestand aus einer bifilar aufgehängten Spule, wobei die Aufhängungsdrähte zugleich zur Stromzuführung dienten. In dieser Form ist der Magnetometer von KIRCHHOFF<sup>4</sup> u. a. angewandt worden. Verbessert wurde das Instrument von F. KOHLRAUSCH<sup>5</sup>. In dieser Form war die Methode nur zur Messung räumlich ausgedehnter, d. h. schwächerer Magnetfelder geeignet.

Die Verwendung dieses Prinzips zur Messung magnetischer Felder ist später von mehreren Autoren versucht worden. Die Verschiedenheit der Instrumente liegt in der Methode der Messung des Drehungsmomentes. Eine Übersicht dieser Methoden

---

<sup>1</sup> Hier ist noch die Eichung mittels »Normalfeldstärken« zu erwähnen, die von Gans eingeführt ist.

GANS: Phys. Zs 8, 523, 1907.

<sup>2</sup> GANS und GMELIN: Ann. d. Phys. (4) 28, 925, 1909.

<sup>3</sup> W. WEBER: Sächs. Ber. 186, 2411, 1846.

<sup>4</sup> KIRCHHOFF: Breslau 1850.

<sup>5</sup> F. KOHLRAUSCH: Wied. Ann. 17, p. 737, 1882.



findet man in WINKELMANN'S: »Handbuch der Physik« Bd V: 2 p. 113. Bei einigen dieser Instrumente wird die Torsion zur Kompensation des Drehungsmomentes benutzt. Zuerst ist diese von A. DU BOIS-REYMOND<sup>1</sup> bei Untersuchungen des Drehstroms verwandt worden. Später haben EDSEY und STANSFIELD<sup>2</sup> ein Instrument konstruiert, bei dem die bewegliche Spule mittels Torsion in ihre Nulllage zurückgedreht wird. Dieses Instrument eignet sich nach ihren Angaben sehr gut zur Messung der bei elektr. Maschinen auftretenden Streufelder. Bedenkt man aber, dass starke Felder nur in sehr beschränkten Räumen auftreten, liegt es auf der Hand, dass das angegebene Instrument mit seinen verhältnismässig grossen Dimensionen zur Messung solcher Felder nicht geeignet ist. Hierzu kommt noch der Umstand, dass die Felder innerhalb eines so grossen Gebietes bedeutenden Veränderungen in Grösse und Richtung unterliegen. Eine Verminderung der Dimensionen ist aber ohne weiteres nicht vorzunehmen. — Es ist der Zweck der vorliegenden Untersuchung, die Konstruktion, Eichung und Messmethoden eines nach den obengenannten Prinzipien gebauten Instrumentes darzustellen.

## II. Konstruktion des Magnetfeldmessers.

Als eine allgemeine Forderung, die jedes zur Messung stärkerer Magnetfelder konstruierte Instrument zu erfüllen hat, ist die der räumlichen Beschränkung aufzustellen; und dies aus zwei Gründen: erstens können starke Felder nur in verhältnismässig kleinen Gebieten erzeugt werden, zweitens ist es oft wünschenswert, die Feldstärke in einem bestimmten Punkte zu kennen. In letzterer Hinsicht sind wegen der praktischen Schwierigkeiten gewisse Grenzen gesetzt; jedes Instrument kann nur einen Mittelwert über eine gewisse Fläche geben.

Die hier aufgestellte Anforderung ist in grösstmöglichem Masse bei Konstruktion des Apparates berücksichtigt worden. Wie Fig. 1 zeigt, besteht das Instrument aus einer kleinen auf Ebonit gewickelten Spule, die auf einem Torsionsdraht befestigt ist. Dieser Torsionsdraht besteht aber aus zwei von einander isolierten Hälften: jede von ihnen dient als Zuleitung für den Messstrom. Am oberen Ende wird der Torsionsdraht mittels einer Spiralfeder gespannt; um eine bestimmte Lage zu sichern wird die kleine Spiralfeder durch einen schmalen Stab, der in einer Ausbohrung läuft, gesteuert. Die ganze obere Befestigung ist durch einen Ebonitcylinder von der umgebenden Hülle isoliert. Zum Halten des unteren Endes des Torsionsdrahtes dient ein in der genannten Hülle befestigter Messingstab. Die Spannung des Drahtes wird einfach durch Heben der oberen Befestigung reguliert.

Die Dimensionen werden je nach der Verwendungsart verschieden gewählt. Bei den später zu beschreibenden Untersuchungen wurde ein Instrument verwandt, das einen Torsionsdraht aus 0,06 mm. dicken Platindraht besass. Die kleine Spule

<sup>1</sup> A. DU BOIS-REYMOND: E. T. Z. 12, 305, 1891.

<sup>2</sup> EDSEY und STANSFIELD: Phil. Mag. (5) 34, 186, 1892.

bestand aus 35 Wicklungen dünnsten, isolierten Kupferdrahtes und hatte einen äusseren Durchmesser von etwa 5 mm.

Wie die Figur zeigt, ist der eben beschriebene Teil in ein Messingrohr eingesetzt. Die Stromzuführung wird teils durch eine in der oberen isolierten Befesti-

gung, teils durch eine im Boden der leitenden Hülle angebrachte Schraube ermittelt. Das auf die stromführende Spule im Magnetfelde wirkende Drehungsmoment erhält man einfach durch Bestimmung des Drehungswinkels. Zu diesem Zwecke ist an der Ebonitplatte der Spule ein kleiner, planparalleler Spiegel angebracht, der durch ein Fenster im Messingrohr gesehen werden kann.

Zur Erzielung einer passenden Dämpfung wird das Instrument mit einer Flüssigkeit gefüllt. Eine allen Anforderungen genügende Dämpfungsflüssigkeit zu finden bereitet einige Schwierigkeiten. Ausser dem Dämpfungsvermögen kommt nämlich folgende Eigenschaft in Betracht: Ist der Spiegel anfangs parallel dem Fenster eingestellt, bildet sich beim Drehen der Spule im Magnetfelde zwischen Spiegel und Fenster ein brechendes Prisma, das die Ablesungsgenauigkeit sehr beeinträchtigt. Um diese schädliche Einwirkung zu entgehen

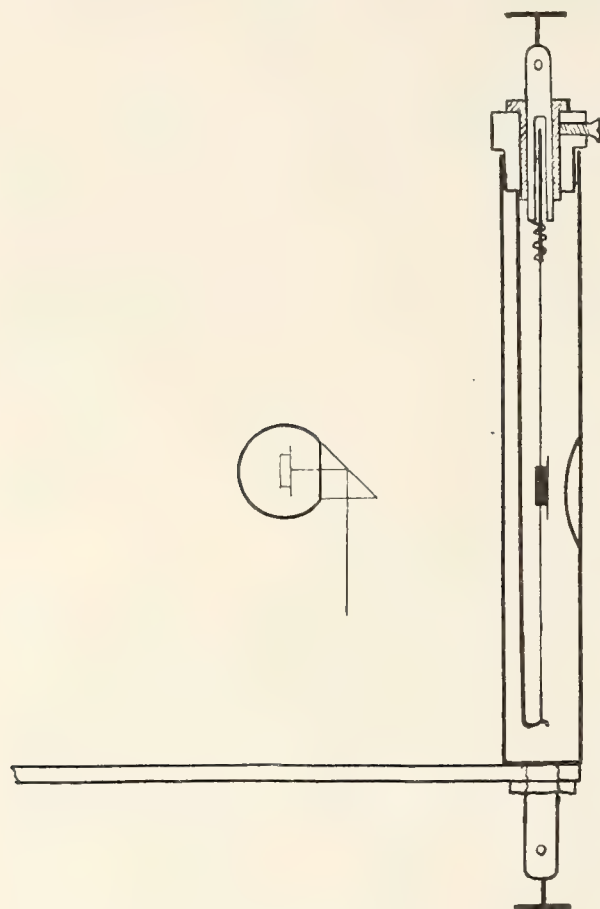


Fig. 1.

muss eine wenig disperse Flüssigkeit gewählt werden. Von den von mir geprüften Flüssigkeiten hat sich reines Vaselineöl am besten bewährt.

### III. Ablesungsmethoden.

Wegen der Kleinheit des Spiegels ist die gewöhnliche Poggendorffsche Spiegelablesung kaum zu verwenden. Dagegen ist die objektive Methode brauchbar; allerdings erfordert sie grosse Sorgfalt, um dieselbe Genauigkeit zu geben. Als Lichtquelle wurde ein vertikalstehender Nernstfaden verwandt, zur Projizierung des Bildes diente eine achromatische Linse. Der Spiegel war vorher genau parallel mit dem kleinen Fenster eingestellt, um der Prismenwirkung zu entgehen. Das Bild des Nernstfadens auf der Skala besass dann scharfe Begrenzungslinien, deren Lage abgelesen wurde. Beim Erregen des Stroms entsteht das oben erwähnte Flüssigkeitsprisma, das sich zuerst in einem Unscharfmachen der Kanten zeigt, bei grösseren



Ausschlägen aber das Fadenbild färbt. Mit Vaselineöl als Dämpfungsflüssigkeit sind aus diesem Grunde bei einem Skalenabstand von etwa 2 m. Ausschläge von höchstens 10 cm zu verwenden; bei Ricinusöl noch kleinere. Innerhalb dieser Grenzen können aber Zehntelmillimeter ziemlich gut geschätzt werden.

Das Instrument zeigt unmittelbar nur die Komponente des Magnetfeldes, das in der Spulenebene liegt; zur vollkommen Definierung des Feldes sind aber auch die zu der früheren senkrechten Komponenten zu bestimmen. Um dieses Ziel bequem zu erreichen wird ein totalreflektierendes, rechtwinkliges Prisma auf das Fenster gelegt, wie Fig. 1 B zeigt. Um guten optischen Kontakt zwischen Prisma und Fenster zu erzielen wird etwas Zedernholzöl dazwischengelegt. Durch diese Anordnung gewinnt man auch die Möglichkeit einer bequemen Einstellung des Instrumentes in zwei zu einander senkrechten Richtungen. Man bringt dann nur die beiden an der Vorderfläche des Fensters resp. des Prismas erzeugten Bilder zur Koinzidenz mit den »wirklichen« Spiegelbildern. Zu diesem Zwecke ist der Magnetfeldmesser in seinem Halter so angebracht, dass er um seine Röhrenachse gedreht werden kann. — Beim Eichen des Instruments in der Feldspule (siehe w. u.) wurde, um bessere Bilder zu erzielen, und da hier guter Platz zur Verfügung stand, einen kleinen Galvanometerspiegel mittels eines besonderen, abnehmbaren Stativs an dem Magnetfeldmesser angebracht.

Die hier angegebene Methode erfordert aber einen nicht allzu beschränkten Raum wegen Skala und Skalenabstand usw. Ferner ist die Orientierung des Instrumentes nicht willkürlich zu wählen. Bei Untersuchung eines Feldes in verschiedenen Punkten müssen die Skalenabstände jedesmal ermittelt und die nötige Korrektur ihrer Veränderung an den Ablesungen angebracht werden (siehe w. u.). Um diese Schwierigkeiten zu vermeiden kann folgende Ablesungsmethode angewandt werden. Über die vordere Objektivfläche eines Okularmikrometers wird senkrecht ein Kokonfaden gespannt. Das Spiegelbild dieses Fadens wird in dem kleinen Spiegel betrachtet. Erfährt der Spiegel eine kleine Drehung, so verschiebt sich das Spiegelbild und somit auch das Bild im Okular. Die Grösse der Verschiebung wird an der Skala abgelesen. Die Methode ist einfach eine Umkehrung des gewöhnlichen Poggendorff'schen Ablesungsverfahrens. — Die Anordnung zeigt Fig. 2. Der hier sichtbare Magnetfeldmesser ist von älterer Konstruktion, bei der die Dämpfung



Fig. 2.

mittels eines Luftdämpfers aus einer dünnen Glimmerplatte erzielt wurde. Die Schutzkappe ist auf dem Bilde heruntergeklappt.



Fig. 3.

Die Grösse der Verschiebung (in Skalenteilen) hängt von zwei Faktoren ab (siehe Fig. 3):

1. Abstand zwischen Faden und Spiegel ( $s$ ).
2. Vergrößerung des Mikroskops: die letztere definieren wir hier zweckmässigerweise als die Anzahl der Skalenteile ( $f$ ), die 1 Millimeter entspricht. Ist  $\alpha$  die Drehung des Spiegels, finden wir:

$$m = 2\alpha \cdot s \cdot f.$$

Die Ablesung nach der Poggendorffschen Methode bei einem Skalenabstand von 1000 Skalenteilen würde ergeben:

$$n = 2 \cdot 1000 \cdot \alpha.$$

Das Verhältnis der beiden Ablesungen ist somit:

$$\frac{m}{n} = \frac{s \cdot f}{1000}.$$

Das Produkt  $s \cdot f$  ist eine das Okularmikrometer definierende Grösse. Wird dieses gleich 1000 gewählt, ergeben die beiden Methoden dieselbe Genauigkeit. Bei einem von mir verwandten Mikroskope waren die Grössen:

$$s = 25 \text{ mm},$$

$$f = 15 \text{ mm}.$$

In diesem Falle ist also

$$\frac{m}{n} = \frac{375}{1000}.$$

Die Genauigkeit ist hierbei nicht so gross wie bei den gewöhnlichen Methoden. Hier ist aber zu bemerken, dass Zehntelskalenteile weit genauer geschätzt werden können.

Wir wollen nun eine Schätzung der Minimalgrösse des verwendeten Spiegels vornehmen. Er muss wenigstens so gross sein, dass das Bild des Fadens beim



Drehen des Spiegels über die ganze Okularskala sichtbar ist. Ist die gesamte Anzahl der Okularskalenteile  $M$ , der Durchmesser des Spiegels  $d$  mm, so ergibt sich

$$2df > M,$$

$$\therefore d > \frac{M}{2f}.$$

Wir sehen also, dass eine Vergrößerung von  $f$  auch hier vorteilhaft ist, d. h. umso kleiner kann der Spiegel gewählt werden. Bei dem oben genannten Mikroskop betrug

$$M = 100.$$

Die nötige Spiegelgrösse zur vollen Ausnutzung der Skale ist somit:

$$d = \frac{100}{2 \cdot 15} = 3,3 \text{ mm.}$$

#### IV. Eichungsverfahren.

Um das Instrument zur absoluten Bestimmung einer Feldstärke verwenden zu können ist es nötig, den Ausschlag bei einer bekannten Feldintensität zu kennen. Da aber die Empfindlichkeit des Instrumentes durch das Variieren des Solenoidstromes verändert werden kann, braucht die Eichfeldstärke gar nicht von derselben Größenordnung wie das zu untersuchende Feld zu sein. Die im allgemeinen vorkommenden Magnetfelder werden durch Solenoiden mit Eisenkern erzeugt, deren Feldstärke nicht direkt berechnet werden kann, zur Eichung ist daher entweder ein Solenoid mit genau berechenbarem Magnetfeld, d. h. ohne Eisenkern, oder ein anderswo bestimmtes, genau reproduzierbares Magnetfeld mit Eisen zu verwenden.

Beim Eichen des Instrumentes wurden beide Methoden verwandt; die fundamentale muss aber selbstverständlich die erstgenannte sein. Zur Erzeugung eines berechenbaren Feldes wurde eine ziemlich weite Spule benutzt: die Länge wurde so gewählt, dass die Feldstärke in der Mitte der Spulenachse innerhalb 1 cm mit weniger als 0,1 % variierte.

Für die Feldstärke in einer cylindrisch gewickelten Spule gilt folgende Formel<sup>1</sup>

$$H = \frac{\pi n i}{10l} \left\{ \frac{x+l}{\sqrt{a^2 + (x+l)^2}} - \frac{x-l}{\sqrt{a^2 + (x-l)^2}} + \frac{3}{2^2} a^2 y^2 \left[ \frac{x+l}{[a^2 + (x+l)^2]^{\frac{5}{2}}} - \frac{x-l}{[a^2 + (x-l)^2]^{\frac{5}{2}}} \right] + \frac{3 \cdot 5}{2^2 4^2} a^2 y^4 \left[ \dots \dots \dots \right] + \dots \dots \dots \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Hier bedeutet  $n$  die Zahl der Windungen,

$i$  die Stromstärke in Amp.,

$l$  die halbe Länge der Spule,

$x$  den Abstand von der Mittelebene,

$a$  den mittleren Halbmesser der Windungslage,

$y$  den Abstand von der Spulenachse.

<sup>1</sup> MASCART et JOUBERT: L'électricité et le magnetism. II: p. 106.

Werden die Untersuchungen in der Nähe der Spulenachse ausgeführt, d. h. ist  $y$  klein, so können, wenn  $a$  gross ist, die mit  $y$  multiplizierten Termen wegge lassen werden. Deren erster kann nämlich folgendermassen geschrieben werden:

$$\frac{3}{2^2} \frac{y^2 \cdot 2l}{a^3 \left(1 + \frac{a^2}{l^2}\right)^{\frac{5}{2}}}$$

wenn  $x$  gleich Null gesetzt wird. Unter den gegebenen Voraussetzungen ist dieser Term zu vernachlässigen. Die Formel für die Feldstärke wird somit einfach die folgende:

$$H = \frac{\pi ni}{10l} \left\{ \frac{x+l}{\sqrt{a^2 + (x+l)^2}} - \frac{x-l}{\sqrt{a^2 + (x-l)^2}} \right\}.$$

Hierbei ist ferner vorausgesetzt worden, dass die Windungen ganz dicht (ohne Isolation) aneinander liegen; diese Annahme ist innerhalb des verwendeten Messraumes (in der Nähe der Spulenmitte) statthaft. Im vorliegenden Falle wurden zwei sehr sorgfältig gewickelte Spulen benutzt, und um eine schädliche Erwärmung des Messinstrumentes zu verhüten, wurden sie auf einen doppelwandigen Cylinder aus elektrolytischem Kupfer gewickelt. Dieser wurde während des Versuches mit Wasser durchgespült. Die Materialien der Spulen wurden ferner auf Eisen untersucht. Ausserdem zeigen die im folgenden mitgeteilten Messungen eine (innerhalb der Versuchsfehler) vollkommene Übereinstimmung zwischen den gemessenen und berechneten Werten des Magnetfeldes.

Die Dimensionen der Spulen waren

$$\begin{aligned} \text{I. } l &= 10,00 \text{ cm.} \\ a &= 6,40 \text{ cm.} \\ n &= 675. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II. } l &= 10,00 \text{ cm.} \\ a &= 6,479 \text{ cm.} \\ n &= 1054. \end{aligned}$$

## V. Versuchsanordnung.

Der erste Teil der Untersuchung betrifft eine Prüfung der theoretischen Formeln der Magnetfeldstärke in den Spulen. Eine derartige Untersuchung war um so nötiger, als die, so viel ich weiss, einzigen bezüglichlichen Messergebnisse<sup>1</sup> ein der Theorie widersprechendes Resultat ergeben haben. Hier muss betont werden, dass die fehlende Übereinstimmung in dieser Hinsicht ihre Ursache in der unvollkommenen Realisierung der theoretischen Bedingungen hat; gegen die Berechnungen können keine Einwände erhoben werden.

Zur Untersuchung der Verwendbarkeit der Formel wurde die Feldstärke längs der Spulenachse bestimmt. Zu diesem Zwecke wurde die Spule auf einen Holz-

<sup>1</sup> N. STOYANOFF: Phys. Zs. 13, 1909, 430.



kasten (ohne Eisen in irgendwelcher Form) verschiebbar angeordnet. Zur Messung der Verschiebungen diente eine fest angeordnete Skala. Die Feldstärken wurden in Abständen von 1 cm bestimmt. Die Stromstärke im Magnetometersolenoid betrug dabei 0,0100 Amp. mittels eines Precisionsmilliamperemeters von Siemens und Halske gemessen. Dieses Instrument besass allerdings bedeutende Korrekturen: da es aber hier nur auf Kontrollierung des Konstanthaltens ankommt, war dies belanglos. Als Stromquelle dienten zwei Trockenelemente (R. R. Stockholm), die sich bei dieser Stromstärke als vorzüglich konstant zeigten. Die Ausschläge des Magnetometers wurden nach der oben beschriebenen objektiven Methode abgelesen.

Grössere Schwierigkeiten bereitete das Konstanthalten des Stromes in der Stromspule. Die Verwendung des Lichtnetzes war wegen der grossen Intensitätsschwankungen nicht möglich. Dagegen gab die Accumulatorbatterie des Instituts wenn neugeladen und nach einer konstanten Stromabnahme während einer halben Stunde einen für diese Versuche hinreichend konstanten Strom.

Die erste Bestimmung betraf die Feldstärke in der Mitte der Spulenachse bei einer Stromstärke in der Feldspule von 1,50 Amp., gemessen mit Westonampere-meter. Dieser zeigte innerhalb der Ablesungsfehler richtige Werte. Die Messungsergebnisse sind in der folgenden Tabelle wiedergegeben.

#### Feldstärke in der Nähe der Spulen mitte.

Stromstärke in der Spule = 1,50 Amp.

Magnetometerstromstärke = 0,0100 Amp.

Koordinate in der Achsenrichtung der Spule	Magnetometerablesungen	Magnetometerausschläge
17.1	12.64	
	7.83	4.81
17.3	12.51	
	7.70	4.81
17.5	12.49	
	7.68	4.81
17.7	12.43	
	7.62	4.81
17.9	12.40	
	7.60	4.80
18.1	12.37	
	7.56	4.81
18.3	12.33	
	7.52	4.81
18.5	12.30	
	7.50	4.80
18.7	12.30	
	7.50	4.80

Als Mittelwert der Ausschläge in der Spulemitte ergibt sich somit 4,81. Dieser wert entspricht einer Feldintensität von 53,39 C. G. S.-Einheiten nach Formel (2) berechnet. Die gefundenen Ausschläge werden also durch Multiplikation mit  $\frac{53,39}{4,81}$  in C. G. S.-Einheiten verwandelt.

Die Feldmessungen längs der Spulenachse sind in der folgenden Tabelle enthalten.

Feldstärken in der Spulenachse.

	Längenkoordinate (38.3 — Spulenmitte)	Ablesungen der Magnetometerausschläge	Magnetometerausschläge	in Gausseinheiten verwandelt
0	37.5	12.12		
		7.30	4.82	53.5
1	38.5	12.09		
		7.24	4.85	(53.8)
2	39.5	11.99		
		7.18	4.81	53.4
3	40.5	11.90		
		7.11	4.79	53.2
4	41.5	11.79		
		7.10	4.69	52.1
5	42.5	11.70		
		7.12	4.58	50.8
6	43.5	11.59		
		7.18	4.41	49.0
7	44.5	11.42		
		7.23	4.19	46.5
8	45.5	11.23		
		7.31	3.92	43.5
9	46.5	11.01		
		7.42	3.59	39.8
10	47.5	10.81		
		7.68	3.13	34.7
11	48.5	10.52		
		7.86	2.66	29.5
12	49.5	10.35		
		8.07	2.28	25.3
13	50.5	10.12		
		8.25	1.87	20.8
14	51.5	9.98		
		8.48	1.50	16.7
15	52.5	9.83		
		8.62	1.21	13.4
16	53.5	9.78		
		8.80	0.98	10.9
17	54.5	9.74		
		8.91	0.83	9.2
18	55.5	9.69		
		9.02	0.67	7.4
19	56.5	9.66		
		9.11	0.55	6.1
20	57.5	6.65		
		9.20	0.45	5.0
21	58.5	9.61		
		9.23	0.38	4.2
22	59.5	9.60		
		9.29	0.31	3.4



Zur Vergleichung dieser Werte mit denen aus der Formel (2) berechneten wurden die Werte dieser Formel für jeden cm ermittelt. Bei der Stromstärke 1.50 Amp. erhält man dafür folgenden Werte:

Feldstärken in der Spulenachse.

$x$	$H$	$x$	$H$
0	53.390	11	25.543
0.5	53.348	12	21.131
1	53.223	13	17.253
2	52.709	14	14.000
3	51.814	15	11.358
4	50.480	16	9.252
5	48.635	17	7.587
6	46.193	18	6.271
7	43.089	19	5.229
8	39.811	20	4.397
9	34.958	21	3.729
10	30.261	22	3.187

Da die Längenkoordinaten der experimentellen und der berechneten Werte nicht, ganz denselben Ursprung haben, werden sie am besten graphisch verglichen. Die Figur zeigt, dass die Werte innerhalb der Fehlergrenzen vollkommen übereinstimmen.

Das Schaltungsschema beim Eichen des Magnetometers zeigt Fig. 4.

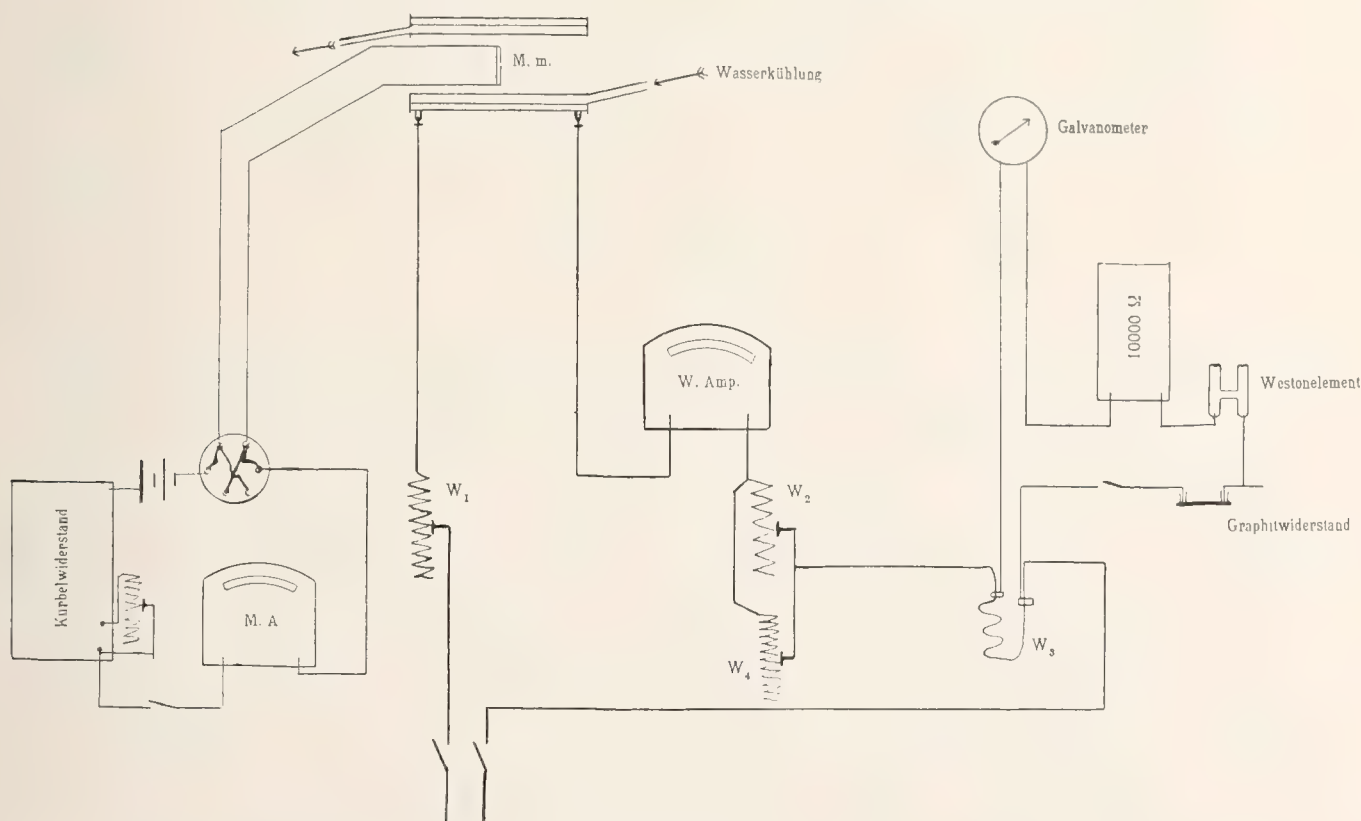


Fig. 4.

Die zur Eichung verwandte Spule war die oben mit II bezeichnete. Zum Schutze des Magnetometers gegen Erwärmung wurde die Spule mit Wasser gekühlt.

Um einer Korrektur der Feldstärke wegen des erdmagnetischen Feldes zu entgehen wurde das Spulenfeld senkrecht gegen den magnetischen Meridian eingestellt. Die Stromstärke in der Feldspule wurde folgendermassen bestimmt. Die ungefähre Einstellung der Stromstärke auf die gewünschten Werte von 2,00 Amp. wurde mit Hilfe eines Westonamperemessers ausgeführt. Zur genaueren Justierung diente eine Kompensationsmethode. Ein aus 1.2 mm dickem Manganindraht angefertigter Widerstand ( $W_3$ ) von  $\frac{1,0187}{2}$  Ohm (mit einem Fehler von höchstens 0,05 %) wurde in den Stromkreis eingeschaltet. Der Widerstand wird dabei zwischen zwei an dem Manganindraht festgeklebten Metallstücken gerechnet. Zwischen diesen beiden Klemmen war ein Kreis aus Normalelement (Weston 1,0187 Volt), Graphitwiderstand, Reostat und Drehspulengalvanometer eingeschaltet. Der Manganinwiderstand samt Klemmen wurde in Petroleum eingesenkt, dessen Temperatur bestimmt wurde. Die Temperatursteigerung betrug beim Stromdurchgang höchstens einige Grade. Die Widerstandsänderung durch die Temperatursteigerung kann also ebenso wie die thermoelektrischen Kräfte vernachlässigt werden. Das verwendete Normalelement wurde durch Vergleichung mit zwei geprüften Clarkelementen kontrolliert. Um feine Regulierbarkeit des Stromes zu erhalten wurde ein grosser Ruhstratwiderstand  $W_4$  einem kleinen  $W_2$  parallel geschaltet.

Wird jetzt der Strom im Hauptkreis so lange reguliert, bis der Kompensationskreis keinen Strom mehr anzeigt, ist der Potentialfall im Widerstand  $W_3$  gleich der elektromotorischen Kraft im Normalelement. Wir kennen somit den Potentialfall und den Widerstand in einem Teil der Strombahn; die Stromstärke kann also berechnet werden, sie ist:

$$i = \frac{1,0187 \cdot 2}{1,0187} = 2,000$$

mit einer Genauigkeit von wenigstens 0,05 %. Da aber die verwandte Spannung (die Batterie des Institutes) beständige Änderungen zeigte, ist diese Genauigkeit nicht zu erreichen. Zur Erzielung der bestmöglichen Konstanz des Stromes wurde der Stromkreis etwa eine halbe Stunde vor Ausführung der Messung eingeschaltet. Die Stromstärke wurde unmittelbar vor jeder Messung justiert. — Als ein Nebenresultat ergab sich, dass der Westonstrommesser innerhalb der Ablesungsfehler richtige Werte zeigte.

Zur Anbringung des Magnetfeldmessers in der Spulenmitte diente ein am oben erwähnten Holzkasten fest angebrachtes Stativ aus Messing. Die Stromstärke im Magnetometerkreis wurde mit einem Präzisionsmilliamperemesser von Siemens und Halske bestimmt. Die Kontrollierung dieses Instrumentes zeigte ausser einer Nullpunktsverschiebung von etwa 0,4 Skalenteilen einen kleinen fortschreitenden Fehler. Als Stromquelle dienten zwei Trockenelemente. Die Ablesungen der Ausschläge nach der objektiven Methode wurden vor und nach der Umkehrung der Stromrichtung im Magnetometer ausgeführt.



Es fragt sich jetzt: ist eine Korrektur wegen der durch die Drehung veränderten Lage des Magnetometersolenoides anzubringen? Bezeichnet  $\varphi$  den Drehungswinkel,  $H$  die Magnetfeldstärke, so bewirkt die veränderte Lage, dass der Ausschlag proportional  $H \cos \varphi$  wird. Setzen wir für  $\cos \varphi$  ihre Reihenentwicklung ein, so wird:

$$\begin{aligned} H \cos \varphi &= H \left[ 1 - \frac{1}{2} \varphi^2 + \dots \right] \\ &= H \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{4}{180} \right)^2 + \dots \right] \end{aligned}$$

wenn wir den Maximalausschlag = 8 cm, entsprechend der Stromstärke 0,01 Amp. bei einem Skalenabstand von 180 cm annehmen. Die wirklichen Werte von  $\varphi$  sind jedenfalls immer kleiner, da bei richtiger Orientierung nur der halbe Winkel zu rechnen ist. Der Wert des quadratischen Terms ist etwa 0,0005: er bedingt somit höchstens einen Fehler von 0,05 %. Da die hier mitgeteilten Messungen eine derartige Genauigkeit nicht nötig haben, ist diese Korrektur nicht in Betracht gezogen.

Eine weitere Fehlerquelle liegt in dem die Solenoidenspule umgebenden Messingrohr. Eine chemische Analyse<sup>1</sup> dieses Rohres hatte einen Eisengehalt von 0,15 % ergeben. Um die Schwächung des Feldes innerhalb des Cylinders zu schätzen wurde die Permeabilität des Rohres durch Wiegung in einem bekannten Feld bestimmt. In einem Feld von 3000 C. G. S.-Einheiten betrug die Gewichtszunahme etwa 5 mg. Aus der Formel

$$p = \frac{q}{8\pi} (\mu - 1) H^2,$$

wo  $p$  die Gewichtszunahme bedeutet,  $q$  der Querschnitt des Cylinders,  $\mu$  die Permeabilität,  $H$  die Feldstärke ist, ergibt sich

$$\begin{aligned} \mu - 1 &= \frac{p \cdot 8\pi}{q H^2} \\ &< 2 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Die Schwächung in einem cylindrischen Rohr ist nach Stefan:

$$g = 1 + \frac{1}{4} \frac{(\mu - 1)^2}{\mu} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right),$$

wo  $g$  das Verhältnis der äusseren zur inneren Feldstärke bedeutet;  $r$ ,  $R$  sind die beiden Halbmesser des Hohlzylinders. Setzen wir jetzt unsere Werte in die Formel ein, so bekommen wir:

$$\begin{aligned} g &< 1 + \frac{10^{-8}}{1} \cdot \frac{1}{10} \\ &< 1 + 1 \cdot 10^{-9}. \end{aligned}$$

Als Resultat ergibt sich somit dass die Schwächung zu vernachlässigen ist.

<sup>1</sup> Die Analyse wurde freundlichst von Herrn Amanuensis L. SMITH am hiesigen, chemischen Institut ausgeführt.

Bei den in der folgenden Tabelle wiedergegebenen Messungen wurde folgendermassen verfahren: zuerst wurde die Stromstärke im Magnetometerkreis auf den gewünschten Wert reguliert, und der Stromkreis zur Erzielung des Gleichgewichts geschlossen gehalten. Dies erwies sich hauptsächlich bei den grössern Stromstärken (0,005—0,010 Amp.) als nötig. Dann wurde die Stromstärke in der Feldspule eingestellt und die Konstanz kontrolliert. Die Magnetometerausschläge wurden vor und nach zwei Kommutierungen abgelesen. Die Tabelle zeigt eine vollständige Messungsreihe.

Magnetometer- stromstärke in Milliamp. (unkorr.)	Magnetometerablesungen		Magnetometer- ausschläge	Magnetometer- ausschläge [Mittelwert]
10.00	8.15	17.82	9.66	
	8.16			
	8.15	17.82	9.67	
	8.16			
	8.16	17.83	9.66	9.66
	8.18			
9.00	8.63	17.31	8.67	
	8.65			
	8.63	17.31	8.66	
	8.66			
	8.63	17.31	8.67	8.67
	8.65			
8.00	9.12	16.85	7.73	
	9.12			
	9.12	16.86	7.74	
	9.12			
	9.12	16.86	7.74	7.74
	9.12			
7.00	9.60	16.39	6.78	
	9.61			
	9.61	16.39	6.78	
	9.61			
	9.61	16.39	6.78	6.78
	9.61			



Magnetometer- stromstärke in Milliamp. (unkorr.)	Magnetometerablesungen		Magnetometer- ausschläge	Magnetometer- ausschläge [Mittelwert]
6.00	10.11	15.92	5.81	
	10 11			
	10.11	15.92	5.81	
	10.11			
	10.11	15.92	5.81	5.81
	10.11			
5.00	10.61	15.48	4.87	
	10.61			
	10.61	15.48	4.87	
	10.61			
	10.61	15.48	4.87	4.87
	10.61			
4.00	11.10	15.00	3.90	
	11.10			
	11.10	15.00	3.90	
	11.10			
	11.10	15.00	3.90	3.90
	11.10			
3.00	11.60	14.51	2.905	
	11.61			
	11.61	14.52	2.91	
	11.61			
	11.61	14.52	2.91	2.91
	11 61			
2.00	12.11	14.09	1.98	
	12.11			
	12.11	14.09	1.98	
	12 11			
	12.11	14.09	1.98	1.98
	12.11			

Magnetometer- stromstärke in Milliamp. (unkorr.)	Magnetometerablesungen		Magnetometer- ausschläge	Magnetometer- ausschläge [Mittelwert]
1.00	12.61	13.61	1.00	
	12.61			
	12.61	13.61	1.00	
	12.61			
	12.61	13.61	1.00	1.00

Die aus dieser Tabelle erhaltenen Werte können auch zur Kontrolle dienen, inwieweit die Ausschläge die Stromstärken im Magnetometer proportional sind. Zu diesem Zwecke gebe ich folgende drei nach einander angestellte Messungsreihen  $M_1$   $M_2$   $M_3$  nebst ihren Mittelwerten  $M$  wieder. In der fünften Kolumne stehen die korrigierten Werte der Stromstärken. Die sechste Kolumne enthält die Ausschläge durch die entsprechende Stromstärke dividiert.

$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M$	$A$	$M/A$
9.61	9.61	9.60	9.61	100.7	9.54
8.66	8.63	8.66	8.65	90.7	9.54
7.69	7.69	7.71	7.70	80.7	9.54
6.74	6.72	6.76	6.74	70.6	9.55
5.80	5.78	5.80	5.79	60.6	9.55
4.83	4.81	4.84	4.83	50.6	9.55
3.89	3.88	3.89	3.89	40.5	9.60
2.91	2.91	2.91	2.91	30.5	9.54
1.97	1.96	1.94	1.96	20.5	9.56
1.00	1.00	1.00	1.00	10.4	9.62

Die in der letzten Kolumne wiedergegeben Zahlen zeigen eine unerwartet gute Übereinstimmung. Bei den ersten sechs Werten, die die grösste Genauigkeit besitzen, sind die Abweichungen etwa 0,1 %. Was die Genauigkeit betrifft, sind die folgenden zwei Umstände zu beachten. Die eine wesentliche Fehlerursache ist die Stromstärkenbestimmung, die bei dem verwendeten Milliampere-messer wohl einen Fehler von 0,2 Skalenteilen herbeiführen könnte. Diese Fehler werden prozentualiter berechnet mit zunehmender Stromstärke kleiner. Die andre Fehlerursache liegt in der bei grösseren Ausschlägen eintretenden Färbung des Fadenbildes. Die hierdurch bedingten Fehler nehmen natürlich mit zunehmender Stromstärke zu. Da aber diese Fehler bei den verwandten Ausschlägen ziemlich unbedeutend sind, sind die bei den grösseren Stromstärken (0,005 bis 0,01) erhaltenen Werte als die genauesten anzusehen.

Als Mittelwert der Ausschläge bei einer Stromstärke von 0,0100 Amp. im Magnetometer erhalten wir somit

$$9,55 \text{ cm.}$$

bei einem Skalenabstand von 214,0 cm. Dies ergibt für einen Skalenabstand von 100,0 cm. den Ausschlag

$$4,46 \text{ cm.}$$

Das Feld in der Achse berechnet sich nach folgender Formel:

$$H = \frac{\pi n i}{5 \sqrt{a^2 + l^2}}$$

Die Bezeichnungen sind dieselben wie früher;  $i$  war 2,000 Amp.

$$H = 111,2 \text{ C.G.S.}$$

Die Fehler in diesem Wert beruhen hauptsächlich auf ungenügender Kenntnis von  $a$ . Wir wollen nun untersuchen welchen Einfluss ein Fehler in  $a$  auf die Bestimmung von  $H$  hat. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{dH}{H} &= - \frac{ada}{a^2 + l^2} \\ &= - \frac{1}{1 + \left(\frac{l}{a}\right)^2} \frac{da}{a} \end{aligned}$$

Setzen wir die Werte von  $l$  und  $a$  ein, so wird etwa

$$\frac{dH}{H} = - \frac{1}{3} \frac{da}{a};$$

d. h. wollen wir  $H$  mit einer Genauigkeit von 0,1 % kennen, dürfen die Fehler in  $a$  höchstens 0,3 % betragen, und dies würde auch der erlangten Genauigkeit entsprechen.

Von grösstem Interesse ist die Frage, ob die gefundene Magnetometerkonstante als wirkliche Konstante angesehen werden kann, d. h. ob die Eichung des Instrumentes nicht zu oft wiederholt werden muss. Zu ihrer Beantwortung wurde das Instrument nach vierzehntägigem Gebrauch wiederum geeicht. Zwei Eichungsreihen wurden aufgenommen und zeigen folgende Werte:

$M_1$	$M_2$	$M$	$A$	$M/A$
8.03	8.06	8.05	100.7	7.99
7.24	7.24	7.24	90.7	7.98
6.40	6.42	6.41	80.7	7.94
5.60	5.66	5.63	70.6	7.97
4.82	4.86	4.84	60.6	7.99
4.01	4.06	4.04	50.6	7.98
3.26	3.26	3.26	40.5	8.05
2.43	2.46	2.45	30.5	8.03
1.62	1.65	1.64	20.5	8.00
0.84	0.81	0.83	10.4	7.98



Als Mittelwert des Ausschlages für einen Magnetometerstrom von 0,0100 Amp. ergibt sich

$$7,99 \text{ cm.}$$

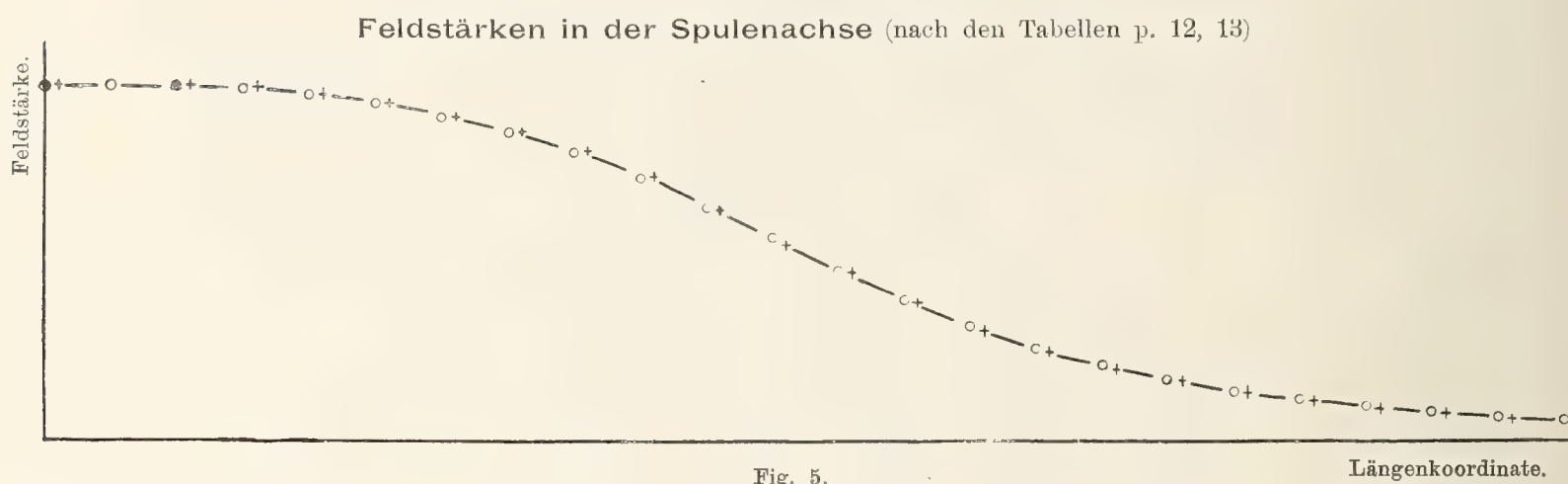
Da der Skalenabstand 179,5 cm war, bedeutet dies bei dem Skalenabstand 100,0 cm

$$4,45 \text{ cm.}$$

Da der früher gefundene Wert 4,46 cm war, beträgt die ganze Änderung weniger als 0,3 %.

Bei einer Magnetometerstromstärke von 0,0100 und einem Skalenabstand von 100,0 cm gibt eine Feldstärke von

$$\begin{array}{l} 100 \text{ C. G. S. einen Ausschlag von } 4,00 \text{ cm, von} \\ 24,99 \text{ C. G. S. } \gg \gg \gg 1,00 \gg \end{array}$$



## VI. Sekundäre Eichung.

Ausser dieser Fundamentaleichung des Feldmessers ist zum praktischen Gebrauch eine einfachere Methode nötig. Zu diesem Zwecke kann man einen zweckmässig hergestellten, permanenten Magneten verwenden. Wie HIBBERT<sup>1</sup> gezeigt hat, kann mit einem einigermassen geschlossenen permanenten Magnetkreis eine hinreichende Konstanz erzielt werden.

Dem Feldétalon wurde die Form eines aufgeschnittenen Ringes mit rechteckigem Querschnitt ( $20 \times 25 \text{ mm}^2$ ) gegeben. Die Schnittflächen waren einander parallel, um ein räumlich konstantes Feld zu geben. Über die Herstellung von konstanten, permanenten Magneten liegt eine ausführliche Untersuchung von STROUHAL und BARUS<sup>2</sup> vor. Nach den dort gegebenen praktischen Anweisungen liess ich den aus schwedischem Stahl (Dannemora 1,02 Kohlenstoffgehalt) hergestellten Ring zuerst etwa 10 Stunden in siedendem Wasser liegen. Nach dem Einschieben eines gut passenden, weichen Eisenstückes in den Schnitt, wurde der

<sup>1</sup> W. HIBBERT: Phil. Mag. (5) 33, 1892, p. 307.

<sup>2</sup> STROUHAL und BARUS: Ann d. Phys. 20, 1883, p. 662.

Ring mit 500 Wicklungen isolierten Kupferdrahtes (0,8 mm) umgeben. Die Magnetisierung wurde durch ziemlich rasche Steigerung des Stromes bis auf 20 Amp. und darauf folgende Verminderung herbeigeführt (vermittels Aus.— bzw. Einschaltung von Widerständen). So wurde mehrmals verfahren und dabei darauf geachtet, dass der Ring keine schädliche Erwärmung erlitt. Nach der Abwicklung des Drahtes folgte eine nochmalige Erwärmung in siedendem Wasser.

Es leuchtet ein, dass die Verwendung dieser Eichungsmethode nur dann möglich ist, wenn das Feld eine genügende räumliche Konstanz besitzt. Es ist zu fordern, dass eine fehlerhafte Stellung des Magnetfeldmessers von etwa 0,5 mm eine Feldänderung von höchstens 0,1 % bedeutet. Inwieweit diese Forderung erfüllt ist, zeigt die folgende Tabelle. Dabei wurde die Feldstärke in radialer Richtung durch den Schnitt auf jeden Millimeter bestimmt. Die Bedeutung der verschiedenen Kolonnen ist unten angegeben. Die korrigierten Ausschläge sind die auf demselben Skalenabstand umgerechneten Ablesungen. Die letzte Kolonne gibt die mit Hilfe der Eichung im Spulenfelde berechneten Feldstärkenwerte an.

Skalenabstand = 154,0 cm.

Magnetometerstromstärke = 0,0040 Amp.

Längenkoordinate.	Ablesungen der Ausschläge.	Ausschlag.	Korrigierte Ausschlag.	Entsprechende Feldstärke in C. G. S.
7.0	11.41 4.30	7.11	7.11	288.5
8.0	11.44 4.29	7.15	7.15	290.1
9.0	11.48 4.29	7.19	7.18	291.3
10.0	11.50 4.29	7.21	7.20	292.1
11.0	11.52 4.30	7.22	7.20	292.1
12.0	11.53 4.30	7.23	7.21	292.5
13.0	11.55 4.31	7.24	7.21	292.5
14.0	11.57 4.32	7.25	7.22	292.9
15.0	11.58 4.33	7.25	7.21	292.5
16.0	11.59 4.35	7.24	7.20	292.1
17.0	11.59 4.37	7.22	7.17	290.9
18.0	11.60 4.40	7.20	7.15	290.1
19.0	11.59 4.41	7.18	7.13	289.3
20.0	11.60 4.43	7.17	7.11	288.5
21.0	11.60 4.46	7.14	7.08	287.2
22.0	11.61 4.49	7.12	7.05	286.0

Wie aus der Tabelle zu ersehen ist, beträgt die Änderung in der Nähe des Maximums innerhalb 3 mm nur etwa 0,13 ‰. In die nachfolgende graphische Tabelle sind die Werte in zehnfacher Vergrößerung eingetragen. Da jeder Millimeter einem geschätzten Zehntel entspricht, ist die Übereinstimmung als sehr gut zu betrachten. Zur besseren Veranschaulichung der Genauigkeit sind in die Figur ausser der gefundenen Kurve auch zwei um 0,2 ‰ verschobene Kurven eingezeichnet.

Feldstärke in Nähe des Maximums.

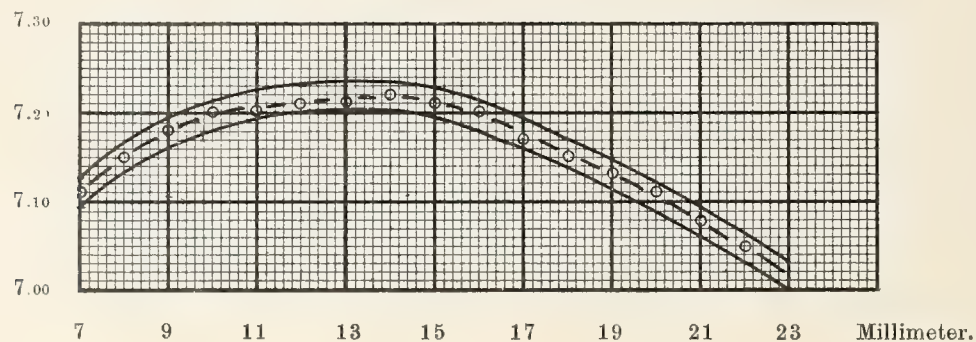


Fig. 6.



## II.

### Spezielle Magnetfelder.

Ehe wir zur Beschreibung der experimentell untersuchten Magnetfelder übergehen, wollen wir kurz über die theoretisch berechenbaren Felder berichten. Wie früher gesagt, ist die bezügliche Theorie von Stefan und Ewing und Low entwickelt. Hierbei wird vorausgesetzt, dass die Polstücke als mit einer homogenen Flächen-dichte belegt angesehen werden können. Die Feldstärke im Mittelpunkt des Feldes lässt sich dann einfach durch Integration über die Polflächen berechnen. Will man dagegen das Feld in anderen Punkten kennen, werden die Ausdrücke sehr kompliziert.

Bei ebenen Endflächen, die mit gleichförmigen, magnetischen Massen  $\mu$  belegt sind, erhält man im Mittelpunkt eine Kraft

$$(1) \quad H = 4\pi\mu \left( 1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}} \right)$$

wo  $2a$  der Abstand zwischen den Platten,  $r$  deren Radius ist. Bei den zur Erreichung der grössten magnetischen Kraft üblichen, abgestutzten Kegelpolen erhält man unter der genannten Voraussetzung

$$(2) \quad H = 4\pi\mu \left( 1 + \frac{2}{3\sqrt{3}} \log \frac{r}{a} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \log 2 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

Diese Formeln sind zuerst durch CZERMAK und HAUSMANNINGER<sup>1</sup> einer experimentellen Prüfung unterzogen worden. Die Untersuchung ergab das Resultat, dass die Stefansche Theorie nur eine sehr rohe Annäherung der richtigen Werte giebt. Wie aber von B. WALTER<sup>2</sup> gezeigt wurde, ist die Theorie tatsächlich bei sehr starken Feldern zu verwenden. Derartige hohe Intensitäten sind bei Flachpolen überhaupt nicht zu erreichen und auch bei Kegelpolen nur bei kleineren Polabständen. In diesen Fällen wird die Annahme vollständiger Sättigung bestätigt, und  $\mu$  beträgt dann, wie schon Fromme<sup>3</sup> gezeigt hatte, etwa 1700.

Sehen wir von diesen Spezialfällen ab, so ist die Berechnung der Intensität schon im Mittelpunkt nicht möglich, noch viel weniger also in anderen Punkten des Feldes<sup>4</sup>. Es bleibt uns somit nur die experimentelle Ermittlung der Feld-

<sup>1</sup> CZERMAK und HAUSMANNINGER: Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissenschaften zu Wien IIa: 97, 176, 1888.

<sup>2</sup> B. WALTER: Ann. d. Phys. 14, 106, 1904.

<sup>3</sup> FROMME: Wied. Ann. 13, 695, 1881.

<sup>4</sup> Das Versagen der Theorie bei unvollkommener Sättigung ist in der Verdrängung des Magnetismus an die Kanten zu suchen.

stärke übrig. Erst wenn ein einwandfreies und ausgedehntes Beobachtungsmaterial vorliegt, ist das Aufstellen einer die unvollkommene Sättigung umfassenden Theorie denkbar. Bis eine solche gefunden ist, können die empirisch gefundenen Tatsachen zur Erledigung verschiedener Fragen von grösstem Nutzen sein.

Zu diesem Zwecke wurden bei einigen geometrisch wohldefinierten Polschuhen an einem Ruhmkorffschen Elektromagnet die Feldstärken als Funktion verschiedener Variablen untersucht. Die Messungen wurden bei kleineren Werten des Magnetisierungsstromes ausgeführt, um die Verschiedenheiten zwischen schwacher und vollkommener Sättigung stärker hervorzuheben. Bei dieser kleineren Stromstärke war auch ein Konstanthalten des Stromes leichter, was für die Messungen von grossem Vorteil war.

## VII. Die Messungen.

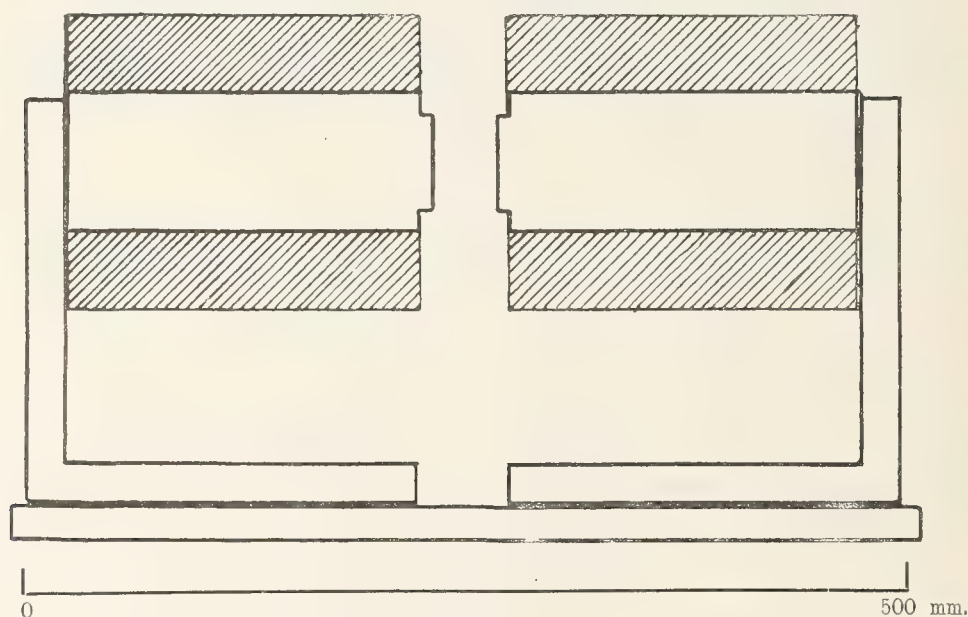


Fig. 7.

Bei den meisten magnetischen Untersuchungen werden die zuerst von RUHM-KORFF<sup>1</sup> angegebenen Elektromagneten benutzt und zwar mit Polansätzen von gewissen bestimmten Formen. Die Messungen wurden daher an einem derartigen Elektromagneten ausgeführt, dessen Dimensionen aus der Figur zu ersehen sind.

Selbstverständlich können die Ergebnisse auch zur Beurteilung des Feldes bei anderen Magnetformen, z. B. dem gebräuchlichen Ringelektromagneten von DU BOIS<sup>2</sup> dienen.

Eine zusammenfassende Darstellung der bei einem Ruhmkorffschen Elektromagneten auftretenden Felder gab G. QUINCKE<sup>3</sup>, der dieselben nach einer Steighöhenmethode untersuchte. Eine stark magnetische Flüssigkeit in einem Glastrog mit parallelen Begrenzungsflächen wurde in den Raum zwischen den Polen einge-

<sup>1</sup> RUHMKORFF: C. R. 23, 417, 538, 1846.

<sup>2</sup> H. DU BOIS: Magn. Kreise; Wied. Ann. 51, 537, 1894, und Ann. d. Phys. 1, 199, 1900.

<sup>3</sup> G. QUINCKE: Ann. d. Phys. 24, 347, 1885.

führt. Die Steighöhe der Flüssigkeit an den verschiedenen Punkten diene als Mass der betreffenden Feldstärke. Selbstverständlich gab die Methode nur ein qualitatives Bild des Feldes. Andere Untersuchungen stammen von LEDUC<sup>1</sup> und SCARPA<sup>2</sup>. Wir werden die genannten Arbeiten bei den verschiedenen Feldmessungen besprechen.

### VIII. Feldstärke als Funktion des Magnetisierungsstromes.

Ehe wir an die Untersuchung der Felder bei den gewöhnlichen Polschuhformen gehen, wollen wir zur magnetischen Charakterisierung des Elektromagneten die Feldstärke als Funktion des Magnetisierungsstromes bestimmen. Nachdem der Magnet durch mehrmalige Kommutierung und Abschwächung des Stromes in seine magnetische Nulllage zurückgeführt war, wurde die Feldstärke, und zwar mit angesetzten Flachpolen bei verschiedenen Stromstärken bestimmt.

Die Feldstärke im Interferrikum setzt sich aus zwei Teilen zusammen: der direkten Wirkung des Stromsolenoides und den freien Magnetismus an den Polflächen. Der erste Teil ist im Verhältnis zum zweiten wenn auch nicht zu vernachlässigen so doch bedeutend kleiner. Da der Effekt des ersten Teiles nur in einer kleinen, mit der Stromstärke linear zunehmenden Hebung besteht, lassen wir die bezügliche Korrektur fort.

Magnetisierungsstromstärke	Magnetometerstromstärke	Magnetometerablesungen	Magnetometerausschlag
2.00	100.0	9.30	
		5.02	4.28
2.50	100.0	9.81	
		4.60	5.21
3.00	100.0	10.31	
		4.15	6.16
3.50	100.0	10.83	
		3.75	7.08
4.00	100.0	11.31	
		3.36	7.95
8.50	100.0	14.45	
		0.47	13.98
8.50	50.0	10.89	
		3.90	6.99
9.00	50.0	11.05	
		3.79	7.26
9.50	50.0	11.26	
		3.70	7.56

Die Werte sind in der folgenden graphischen Tabelle eingetragen. Der Verlauf der Kurve zeigt, dass wir noch bei einer Magnetisierungsstromstärke von 9 Ampere im Gebiete der schwachen Sättigung sind. Im allgemeinen sind die Messungen bei weit niedrigeren Stromstärken ausgeführt worden.

<sup>1</sup> LEDUC: C. R. 103, 926, 1886.

<sup>2</sup> SCARPA: Il nuovo Cim. 11, 80, 1906.



### IX. Feldform als Funktion des Magnetisierungsstromes.

Eine wesentliche Bedingung für die Brauchbarkeit der erhaltenen Ergebnisse ist, dass eine kleine Änderung des Magnetisierungsstromes auch nur einen geringen Einfluss auf die Feldform hat. Zur Untersuchung dieser Frage wurde die Feldform unter Benutzung parabolisch zugespitzter Polschuhe bei verschiedenen Stromstärken bestimmt. Diese Polschuhform wurde verwandt, um eine Änderung stärker her-

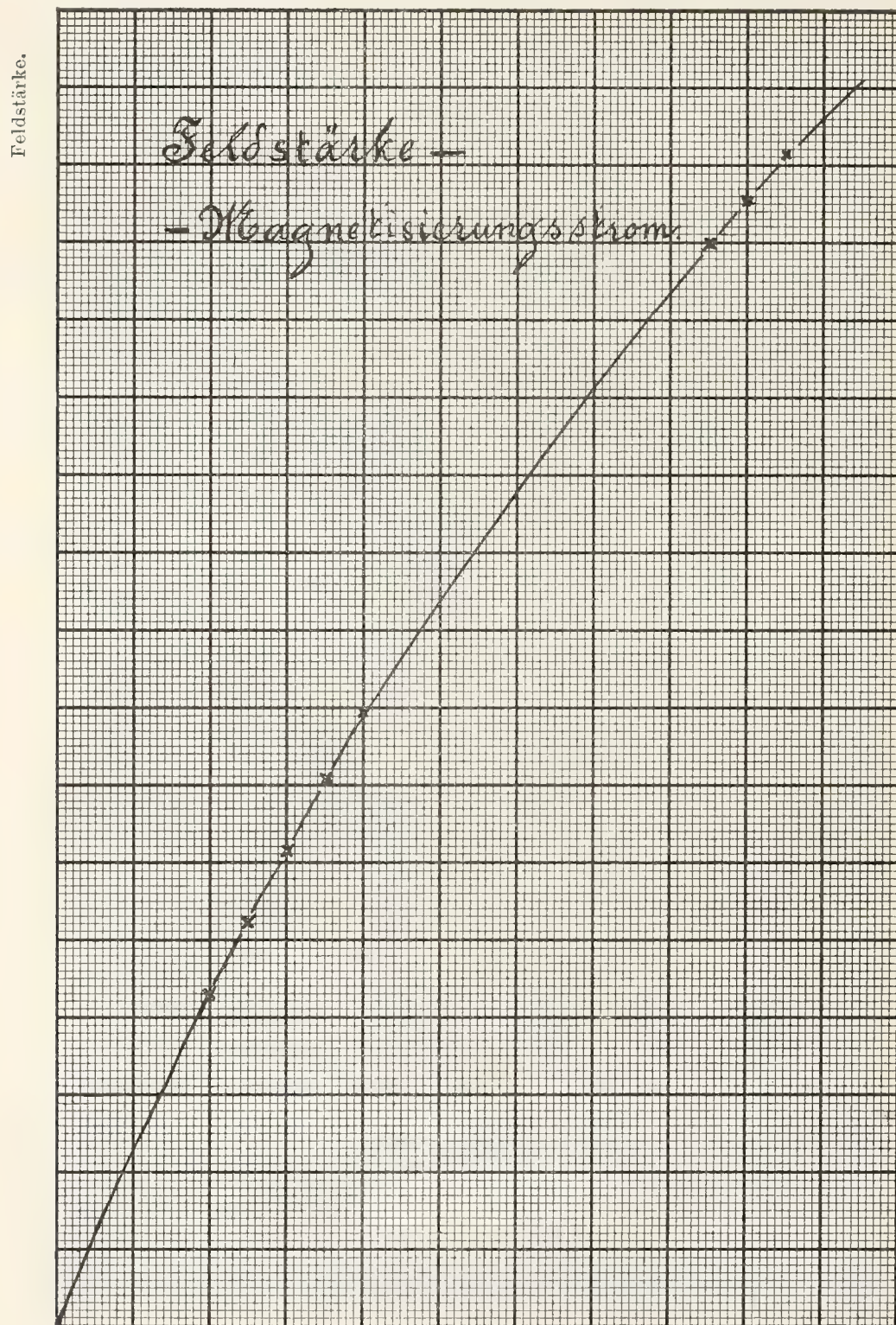


Fig. 8.

Magnetisierungsstrom.

vortreten zu lassen: es ist aber zu bemerken, dass ein kleiner Fehler in der Einstellung der Längenkoordinate wegen des hohen Wertes von  $\frac{\partial H}{\partial x}$  einen verhältnismässig grossen Fehler in  $H$  hervorruft. — Die Feldbestimmung geschah längs einer in der Mitte des Interferrikums auf die Kraftlinien gefällten Senkrechten.

Die Koordinaten längs dieser Linie stehen in der Kolumne 1. Die zweite Kolumne enthält die Skalenablesungen, die dritte die daraus erhaltenen Ausschläge. Da aber jede Ablesung wegen der Verschiebung des Magnetometers einem besonderen Skalenabstand entspricht, muss eine kleine Korrektion angebracht werden. Der maximale Skalenabstand betrug 152,4 cm. In der vierten Kolumne werden die auf diesen Skalenabstand reduzierten Ausschläge wiedergegeben. Um die bei verschiedenen Stromstärken erhaltenen Felder mit einander vergleichen zu können, wurde die maximale Feldstärke durch graphische Konstruktion berechnet und gleich 100 gesetzt. Die letzte Kolumne enthalten die auf diese Einheit bezogenen Feldstärken. Die Tabellen sind bei Magnetisierungsstromstärken von 1,50, 1,75, 2,00, 2,25 Amp. und einer Magnetometerstromstärke von 0,00100 Amp. aufgenommen.

## A. Magnetisierungsstrom 1,50 Amp.

Längen- koordinate	Magnetometerablesungen		Magnetometer- ausschläge	Korrigierte Ausschläge	Reducierte Ausschläge
1.00	14.20				
		15.08	0.88	0.88	19.8
	14.20				
1.50	14.27				
		15.28	1.01	1.01	22.9
	14.27				
2.00	13.89				
		15.10	1.21	1.22	27.5
	13.89				
2.50	13.91				
		15.38	1.47	1.49	33.6
	13.91				
3.00	13.52				
		15.35	1.83	1.86	41.8
	13.52				
3.50	10.78				
		13.10	2.32	2.36	53.0
	10.78				
3.70	10.80				
		13.40	2.60	2.65	59.6
	10.80				
3.90	10.80				
		13.70	2.90	2.96	66.7
	10.80				
4.10	10.79				
		13.91	3.12	3.19	71.8
	10.79				
4.30	10.31				
		13.79	3.48	3.56	80.1
	10.31				
4.50	10.31				
		14.07	3.76	3.85	86.8
	10.31				
4.70	10.09				
		14.05	3.96	4.06	91.3
	10.09				

Längen- koordinate	Magnetometerablesungen		Magnetometer- ausschläge	Korrigierte Ausschläge	Reducierte Ausschläge
4.90	10.18				
		14.31	4.13	4.24	95.4
	10.18				
5.10	10.40				
		14.67	4.27	4.39	98.9
	10.40				
5.30	10.39				
		14.69	4.30	4.43	99.8
	10.39				
5.50	10.31				
		14.50	4.19	4.32	97.2
	10.31				
5.70	10.42				
		14.50	4.08	4.21	94.9
	10.42				
5.90	10.63				
		14.50	3.87	4.00	90.1
	10.63				
B. Magnetisierungsstrom 1,75 Amp.					
1.00	12.40				
		13.40	1.00	1.00	19.4
	12.40				
1.50	12.10				
		13.27	1.17	1.17	22.7
	12.10				
2.00	11.93				
		13.31	1.38	1.39	27.0
	11.93				
2.50	12.11				
		13.81	1.70	1.72	33.4
	12.11				
3.00	11.56				
		13.69	2.13	2.16	41.8
	11.56				
3.50	11.29				
		14.00	2.71	2.76	53.3
	11.29				
3.70	11.10				
		14.12	3.02	3.08	59.9
	11.10				
3.90	10.20				
		13.52	3.32	3.39	65.8
	10.20				
4.10	10.20				
		13.90	3.70	3.78	73.5
	10.20				
4.30	10.18				
		14.21	4.03	4.12	80.0
	10.18				
4.50	9.83				
		14.21	4.38	4.48	87.0
	9.83				
4.70	9.79				
		14.42	4.63	4.75	92.1
	9.79				
4.90	9.62				
		14.49	4.87	5.00	97.0
	9.62				



Längen- koordinate	Magnetometerablesungen		Magnetometer- ausschläge	Korrigierte Ausschläge	Reducierte Ausschläge
5.10	9.79	14.79	5.00	5.14	99.4
5.30	9.79			(5.16)	100.0
	9.38	14.38	5.00	5.15	99.9
5.50	9.38				
	9.50	14.47	4.97	5.12	99.4
5.70	9.50				
	9.39	14.16	4.77	4.92	95.4
5.90	9.39				
	9.11	13.63	4.52	4.67	90.7
6.10	9.11				
	10.59	14.80	4.21	4.36	84.7
	10.59				
C. Magnetisierungsstrom 2,00 Amp.					
1.00	12.69	13.71	1.02	1.02	17.4
1.50	12.69				
	12.04	13.38	1.34	1.34	22.8
2.00	12.04				
	11.91	13.50	1.59	1.60	27.3
2.50	11.91				
	11.86	13.76	1.90	1.92	32.7
3.00	11.86				
	11.82	14.21	2.39	2.42	41.2
3.50	11.82				
	10.95	14.00	3.05	3.10	52.9
3.70	10.95				
	9.16	12.62	3.46	3.52	60.0
3.90	9.16				
	8.61	12.40	3.79	3.87	65.8
4.10	8.61				
	9.80	14.00	4.20	4.29	73.1
4.30	9.80				
	9.73	14.31	4.58	4.68	79.9
4.50	9.73				
	9.62	14.60	4.98	5.10	87.0
4.70	9.62				
	9.59	14.89	5.30	5.43	92.3
4.90	9.59				
	10.30	15.80	5.50	5.65	96.4
	10.30				

Längen- koordinate	Magnetometerablesungen		Magnetometer- ausschläge	Korrigierte Ausschläge	Reducierte Ausschläge
5.10	9.78	15.40	5.62	5.78	98.6
5.30	9.78			(5.87)	100.0
	9.69	15.39	5.70	5.87	100.0
5.50	9.70				
	9.45	15.03	5.58	5.75	98.1
5.70	9.45				
	9.40	14.82	5.42	5.59	95.1
5.90	9.40				
	9.58	14.70	5.12	5.29	90.2
	9.58				
D. Magnetisierungsstrom 2,25 Amp.					
1.00	12.40	13.69	1.29	1.29	19.6
1.50	12.40				
	12.09	13.59	1.50	1.51	22.9
2.00	12.09				
	11.80	13.60	(2.40)	(2.42)	(36.6)
2.50	11.80				
	11.89	14.03	2.14	2.16	32.7
3.00	11.89				
	11.71	14.41	2.70	2.74	41.6
3.50	11.71				
	10.89	14.38	3.49	3.55	53.9
3.70	10.89				
	9.91	13.69	3.78	3.85	58.4
3.90	9.91				
	9.41	13.70	4.29	4.38	66.6
4.10	9.41				
	9.14	13.82	4.68	4.78	72.7
4.30	9.14				
	9.38	14.50	5.12	5.24	79.7
4.50	9.38				
	9.81	15.39	5.48	5.61	85.2
4.70	9.81				
	9.53	15.48	5.95	6.10	92.6
4.90	9.53				
	9.81	15.50	6.19	6.35	96.3
5.10	9.31				
	9.31	15.69	6.38	6.56	99.5
	9.31				

Längen- koordinate	Magnetometerablesungen		Magnetometer- ausschläge	Korrigierte Ausschläge	Reducierte Ausschläge
5.30	8.80	15.19	6.39	(6.59)	100.0
	8.90			6.58	99.9
5.50	8.80	15.20	6.30	6.49	98.5
	8.90				
5.70	8.88	14.96	6.08	6.27	95.1
	8.88				
5.90	9.01	14.80	5.79	5.98	90.9
	9.01				

Zur besseren Übersicht sind die Werte der Feldstärken in einer graphischen Tabelle zusammengestellt.

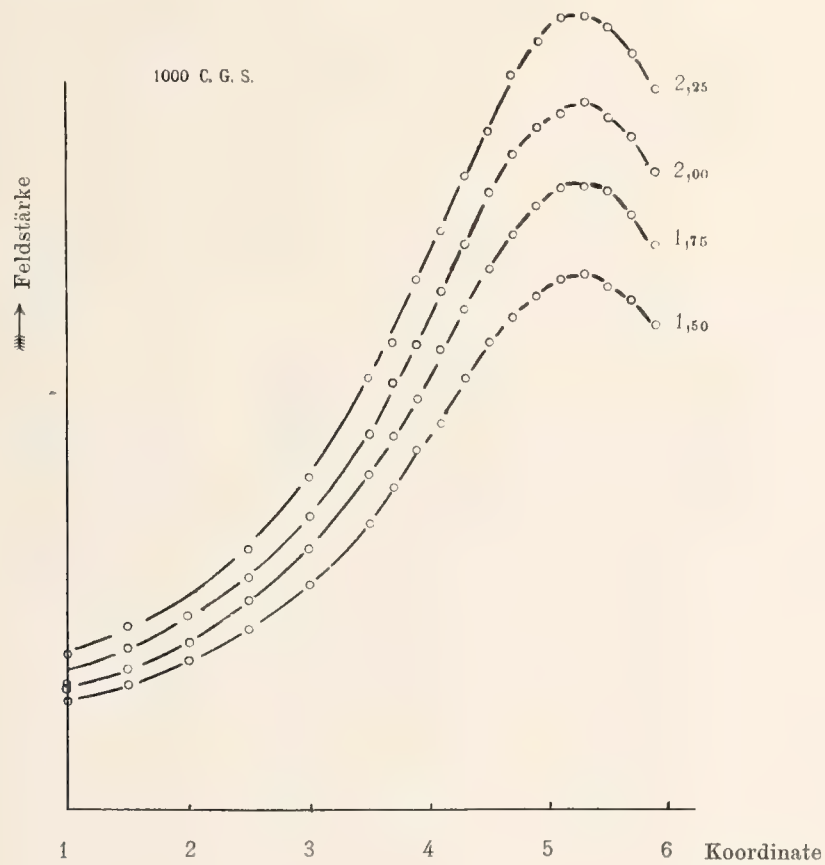


Fig. 9.

Um beurteilen zu können inwieweit die Form des Feldes durch die Erhöhung der Intensität verändert worden ist, sind die in der letzten Kolumne enthaltenen reducierten Feldstärken mit ihren entsprechenden Längenkoordinaten zusammen gestellt:



Strom- stärke	1.50	1.75	2.00	2.25
1.0	19.8	19.4	[17.4]	19.6
1.5	22.9	22.7	22.8	22.9
2.0	27.5	27.0	27.3	
2.5	33.6	33.4	32.7	32.7
3.0	41.8	41.8	41.2	41.6
3.5	53.0	53.3	52.9	53.9
3.7	59.6	59.9	60.0	58.4
3.9	66.7	65.8	65.5	66.6
4.1	71.8	73.5	73.1	72.7
4.3	80.1	80.0	79.9	79.7
4.5	86.8	87.0	87.0	85.2
4.7	91.3	92.1	92.8	92.6
4.9	95.4	97.0	96.4	96.3
5.1	98.9	99.8	98.6	99.5
5.3	99.9	99.9	100.0	99.9
5.5	97.2	99.4	98.1	98.5
5.7	94.9	95.4	95.1	95.1
5.9	90.1	90.7	90.2	90.9

Die verschiedenen Reihen stimmen innerhalb der Versuchsfehler mit einander überein. Eine kleine Änderung des Magnetisierungsstromes hat somit keinen Einfluss auf die Form des Feldes.

#### X. Die Form des Feldes bei Flachpolen.

Die Flachpolen werden benutzt, wenn ein räumlich ausgedehntes, konstantes Feld erwünscht ist. Es ist daher von Interesse zu wissen, in welchem Umfang das Feld diese Eigenschaft besitzt. Bei den folgenden Messungen wurde das Feld wie früher in der Mitte des Interferrikums senkrecht zu den Kraftlinien untersucht. In der oben zit. Arbeit von O. Scarpa sind einige Messungen über das Feld bei Flachpolen wiedergegeben, aus denen zu ersehen ist, dass die magnetische Flächen-dichte in der Nähe des Randes wesentlich grösser als in der Mitte ist.

Die hier angeführten Messungen sind bei verschiedenen Polabständen ausgeführt. Die Stromstärke im Magnetometer betrug 1,00 Milliamp.

## Feldstärkenmessungen bei platten Polschuhen.

	Längen- koordinate	Magnetometer- ablesungen	Magnetometer- ausschläge	Korrigierte Ausschläge
A. 10 mm.	1.00	8.29		
		6.93	1.36	1.36
	1.50	8.39		
		6.61	1.78	1.79
	2.00	9.00		
		6.39	2.61	2.63
	2.20	10.69		
		7.51	3.18	3.21
	2.40	10.89		
		6.94	3.95	4.00
	2.60	11.19		
		5.89	5.30	5.37
	2.80	12.51		
		5.31	7.20	7.31
	3.00	12.29		
		4.31	7.98	8.11
	3.20	13.12		
		3.98	9.14	9.31
	3.50	13.00		
		3.69	9.31	9.49
B. 15 mm.	4.00	12.90		
		3.60	9.30	9.53
	4.50	12.63		
		3.38	9.25	9.52
	5.00	12.56		
		3.32	9.24	9.54
	1.00	8.70		
		7.10	1.60	1.60
	1.50	8.88		
		6.78	2.10	2.11
	2.00	9.55		
		6.57	2.98	3.00
	2.20	9.99		
		6.43	3.56	3.60
	2.40	10.20		
		5.99	4.21	4.26
	2.60	10.78		
		5.73	5.05	5.12
	2.80	10.19		
		4.21	5.98	6.07
	3.00	10.49		
		3.72	6.77	6.88
	3.20	10.90		
		3.71	7.19	7.32
	3.40	11.00		
		3.53	7.47	7.62
	3.60	10.97		
		3.41	7.56	7.72
	3.80	11.04		
		3.48	7.56	7.74
	4.00	10.88		
		3.30	7.58	7.77
	4.50	11.12		
		3.53	7.59	7.81
	5.00	11.14		
		3.61	7.53	7.78
	5.50	11.12		
		3.61	7.51	7.79
	6.00	11.11		
		3.62	7.49	7.80

	Längen- koordinate	Magnetometer- ablesungen	Magnetometer- ausschläge	Korrigierte Ausschläge
C. 20 mm.	1 00	11.40		
		10.08	1.32	1.32
	1.50	11.37		
		9.58	1.79	1.80
	2.00	12.02		
		9.67	2.35	2.37
	2.20	12.19		
		9.49	2.70	2.73
	2.40	10.29		
		7.19	3.10	3.14
	2.60	11.79		
		8.24	3.55	3.60
	2.80	12.21		
		8.23	3.98	4.04
	3.00	12.00		
		7.67	4.33	4.40
	3.20	12.51		
		7.87	4.64	4.73
	3.40	10.79		
		6.21	4.58	[4.67]
	3.60	10.62		
		5.79	4.83	4.94
	3.80	11.06		
		6.14	4.92	5.03
	4.00	11.00		
		6.10	4.90	5.02
	4.50	11.01		
		6.09	4.92	5.06
	5.00	11.31		
		6.38	4.93	5.09
	5.50	10.86		
		5.95	4.91	5.09
	6.00	11.12		
		6.21	4.91	5.11
D. 25 mm.	1.00	9.21		
		7.97	1.24	1.24
	1.50	9.12		
		7.50	1.62	1.63
	1.70	9.21		
		7.40	1.81	1.82
	2.00	9.54		
		7.49	2.05	2.07
	2.20	9.61		
		7.23	2.38	2.40
	2.40	9.82		
		7.20	2.62	2.65
	2.60	9.99		
		7.07	2.92	2.96
	2.80	10.04		
		6.83	3.29	3.26
	3.00	10.28		
		6.80	3.48	3.54
	3.20	10.19		
		6.54	3.65	3.72
	3.40	11.21		
		7.41	3.80	3.88
	3.60	11.24		
		7.31	3.93	4.02
	3.80	11.14		
		7.19	3.95	4.04
	4.00	11.33		
		7.31	4.02	4.12
	4.50	11.26		
		7.21	4.05	4.17
	5.00	11.40		
		7.32	4.08	4.21
	5.50	11.52		
		7.49	4.03	4.18
	6.00	11.19		
		7.19	4.00	4.16



Die Ergebnisse sind in der graphischen Tabelle wiedergegeben.

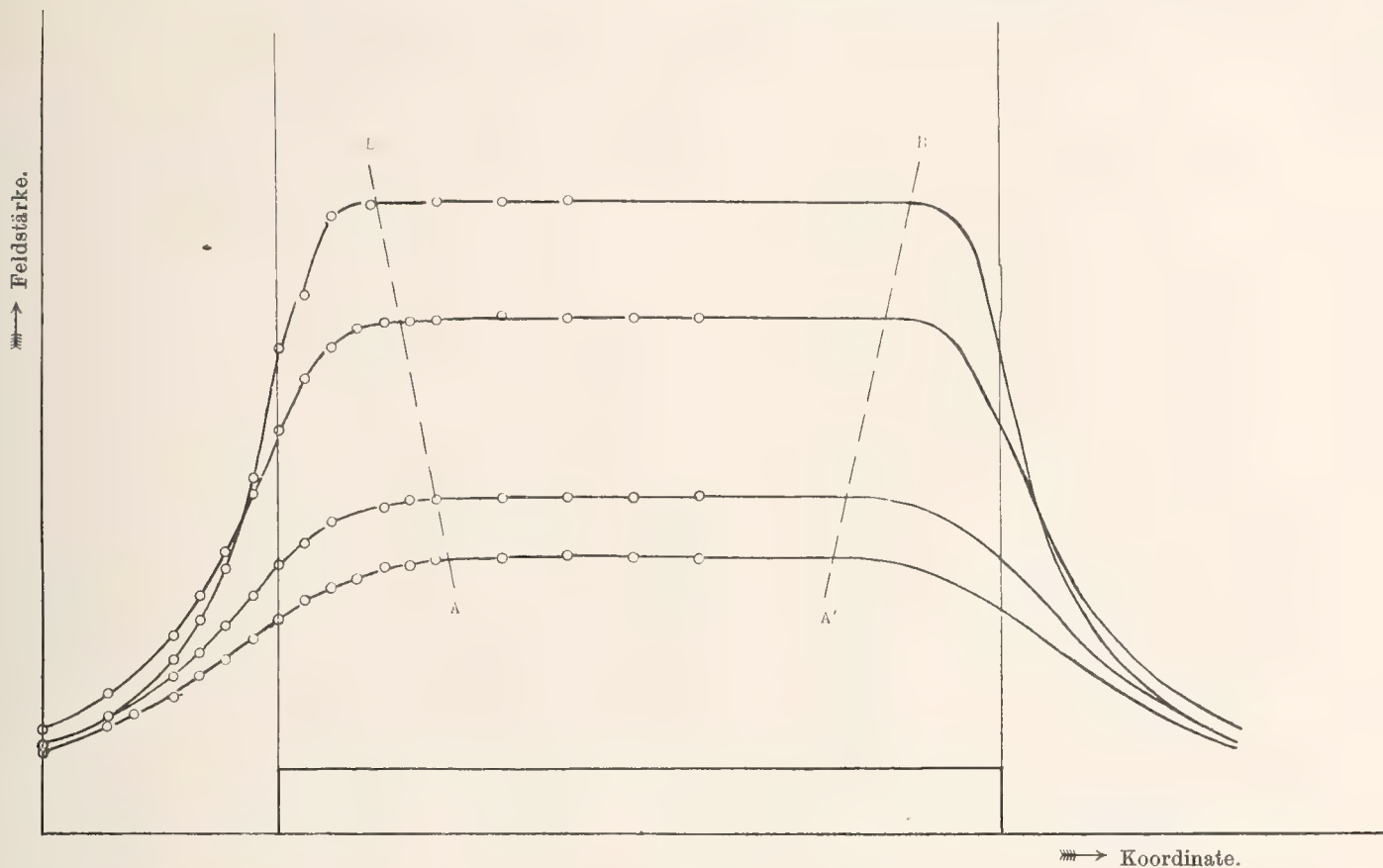


Fig. 10.

Aus den Kurven ist zu ersehen, dass das Gebiet, innerhalb dessen das Feld als konstant angesehen werden kann (in der Figur durch zwei gestrichelte Linien bezeichnet), mit zunehmendem Polabstand kürzer wird. Die Form der Polschuhe ist in die Figur eingetragen.

## XI. Die Wirkung cylindrischer Durchbohrungen.

Zu optischen Untersuchungen werden oft cylindrische Polschuhe benutzt. Über die Wirkung dieser Durchbohrungen in magnetischer Hinsicht herrschen in der Litteratur verschiedene Meinungen. LEDUC sagt in seiner oben zitierten Arbeit: »J'ai constaté que la cavité cylindrique des noyaux n'a pas d'influence sur le champ produit entre les pièces polaires: on n'altère aucunement la valeur de ce champ en remplissant de fer cette cavité».

Ferner erschliesst STEFAN aus seinen theoretischen Berechnungen, dass die schwächende Wirkung sehr unbedeutend ist. Bei schwacher Sättigung, und dies ist nach WALTER bei derartigen Polschuhen immer der Fall, zeigen die unten angeführten Messungen, dass die Schwächung nicht zu vernachlässigen ist.

Die Feldstärken wurden bei verschiedenen Polabständen (1,0; 1,5; 2,0; 2,5 cm.) in Punkten der Mittelebene bestimmt. Es ist zu beachten, dass die Feldstärkemessungen einen Mittelwert über einem stumpfen Cylinder ergeben, (Achsenlänge etwa 0,5 mm, Halbmesser der Bodenflächen 1,5 mm), dessen Achse senkrecht zu den Kraftlinien steht.

Ferner ist die Schwächung gerade im gemessenen Punkt (d. h. in der Mittelebene) am kleinsten.

## Feldstärkenmessungen bei Polschuhen mit Durchbohrungen.

	Längen- koordinate	Magnetometer- ablesungen	Ausschlag	Mittelwert der Ausschläge	Korrigierte Ausschläge
A. 10 mm.	1.0	12.36			
		10.41	1.95		
	1.5	8.50	1.91	1.93	1.93
		12.62			
	2.0	10.28	2.34		
		7.90	2.38	2.36	2.37
	2.5	13.30			
		10.23	3.07		
	3.0	7.17	3.06	3.06	3.08
		14.69			
	3.5	10.32	4.37		
		6.01	4.31	4.34	4.38
	4.0	17.15			
		10.37	6.78		
	4.2	3.65	6.72	6.76	6.85
		20.21			
	4.4	10.38	9.88		
		0.68	9.70	9.76	9.92
	4.6	20.80			
		10.50	10.30		
	4.8	0.38	10.12	10.21	10.42
		20.82			
	5.0	10.50	10.32		
		0.41	10.09	10.20	10.42
	5.2	20.50			
		10.31	10.19		
	5.4	0.30	10.01	10.10	10.33
		20.02			
	5.6	10.40	9.62		
		0.88	9.52	9.57	[9.79]
	5.8	20.31			
		10.62	9.69		
	6.0	1.15	9.47	9.58	9.81
		20.10			
	6.2	10.81	9.29		
		1.68	9.13	9.21	9.44
	6.4	19.55			
		10.65	8.90		
	6.6	1.68	8.97	8.93	9.15
		19.20			
	6.8	10.55	8.65		
		2.03	8.52	8.58	8.80
	7.0	18.95			
		10.60	8.35		
	7.2	2.85	8.25	8.30	8.52
		18.70			
	7.4	10.55	8.15		
		2.45	8.10	8.12	8.34
	7.6	18.40			
		10.30	8.10		
	7.8	2.25	8.05	8.07	8.30
		18.39			
	8.0	10.20	8.19		
		2.10	8.10	8.14	8.37
	8.2	18.31			
		9.99	8.32		
	8.4	1.68	8.31	8.31	8.55
		18.15			
	8.6	9.45	8.70		
		0.85	8.60	8.65	8.91

B. 15 mm.

Längen- koordinate	Magnetometer- ablesungen	Ausschlag	Mittelwert der Ausschläge	Korrigierte Ausschläge
5.6	18.84 9.72 0.71	9.12 9.01	9.06	9.34
5.7	19.76 10.30 1.00	9.46 9.30	9.38	9.67
5.8	20.07 10.35 0.81	9.72 9.54	9.63	9.98
5.9	20.33 10.52 0.83	9.81 9.69	9.75	10.07
1.0	12.58 10.80 9.05	1.78 1.75	1.76	1.76
1.5	12.98 10.81 8.68	2.17 2.13	2.15	2.16
2.0	13.43 10.73 8.01	2.70 2.72	2.71	2.73
2.5	14.52 10.88 7.22	3.64 3.66	3.65	3.69
3.0	16.19 11.11 6.08	5.08 5.03	5.05	5.12
3.5	17.63 11.20 4.80	6.43 6.40	6.41	6.52
4.0	18.42 11.60 4.82	6.82 6.78	6.80	6.94
4.2	18.26 11.42 4.65	6.84 6.77	6.80	6.95
4.4	18.09 11.31 4.58	6.78 6.73	6.75	6.90
4.5	18.40 11.69 5.02	6.71 6.67	6.69	6.84
4.6	18.32 11.69 5.09	6.63 6.60	6.61	6.77
4.7	18.44 11.89 5.40	6.53 6.49	6.51	6.67
4.8	18.34 11.90 5.49	6.44 6.41	6.42	6.58
4.9	18.35 11.99 5.69	6.36 6.30	6.33	6.49
5.0	18.07 11.78 5.53	6.29 6.25	6.27	6.44
5.1	18.12 11.89 5.68	6.23 6.21	6.22	6.39



	Längen- koordinate	Magnetometer- ablesungen	Ausschlag	Mittelwert der Ausschläge	Korrigierte Ausschläge
	5.2	18.21 12.00 5.80	6.21 6.20	6.20	6.37
	5.3	18.21 11.96 5.72	6.25 6.24	6.24	6.42
	5.4	17.86 11.55 5.29	6.31 6.26	6.28	6.46
	5.5	17.61 11.22 4.88	6.39 6.34	6.38	6.57
	5.6	17.68 11.19 4.78	6.49 6.41	6.45	6.65
	5.7	17.89 11.32 4.81	6.57 6.51	6.54	6.75
	5.8	17.88 11.28 4.68	6.60 6.60	6.60	6.81
	6.0	18.18 11.49 4.81	6.69 6.68	6.68	6.90
	6.2	18.53 11.82 5.18	6.71 6.64	6.68	6.91
C. 20 mm.	1.0	13.71 11.82 9.98	1.89 1.89	1.89	1.89
	1.5	13.98 11.63 9.32	2.35 2.31	2.33	2.34
	2.0	14.19 11.25 8.31	2.94 2.94	2.94	2.96
	2.5	15.19 11.40 7.66	3.79 3.74	3.76	3.80
	3.0	16.69 12.11 7.53	4.58 4.58	4.58	4.64
	3.5	17.09 12.12 7.18	4.97 4.94	4.95	5.03
	4.0	16.68 11.69 6.69	4.99 5.00	4.99	5.09
	4.2	16.76 11.79 6.83	4.97 4.96	4.96	5.06
	4.4	16.98 12.07 7.17	4.91 4.90	4.90	5.01
	4.5	17.00 12.11 7.23	4.89 4.88	4.88	4.99
	4.6	17.00 12.12 7.30	4.88 4.82	4.85	4.97

Längen- koordinate	Magnetometer- ablesungen	Ausschlag	Mittelwert der Ausschläge	Korrigierte Ausschläge
4.7	16.90 12.07 7.22	4.83 4.85	4.84	4.96
4.8	16.53 11.70 6.86	4.83 4.84	4.83	4.95
4.9	16.77 11.90 7.10	4.87 4.80	4.83	4.96
5.0	16.85 12.00 7.18	4.85 4.82	4.83	4.96
5.1	16.72 11.88 7.01	4.84 4.87	4.85	4.98
5.2	16.64 11.76 6.88	4.88 4.88	4.88	5.02
5.3	16.73 11.83 6.91	4.90 4.92	4.91	5.05
5.4	16.81 11.89 6.99	4.92 4.90	4.91	5.05
5.5	17.02 12.09 7.10	4.93 4.99	4.96	5.11
5.6	17.37 12.32 7.32	5.05 5.00	5.02	5.17
5.7	16.94 11.99 7.02 16.81 11.87 6.91	4.95 4.97 4.94 4.96	4.96 4.95	5.11 5.10
6.0	16.50 11.61 6.72	4.89 4.89	4.89	5.05
6.2	16.60 11.81 7.03	4.79 4.78	4.78	4.94
D. 25 mm.	1.0	11.76 10.02 8.31	1.74 1.71	1.72
	1.5	12.36 10.29 8.21	2.07 2.08	2.08
	2.0	13.30 10.78 8.21	2.52 2.57	2.56
	2.5	13.73 10.68 7.61	3.05 3.07	3.06
	3.0	14.42 10.86 7.26	3.56 3.60	3.63
	3.5	14.31 10.42 6.53	3.89 3.89	3.95

Längen- koordinate	Magnetometer- ablesungen	Ausschlag	Mittelwert der Ausschläge	Korrigierte Ausschläge
4.0	14.65			
	10.69	3.96		
	6.71	3.98	3.97	4.05
4.2	14.81			
	10.82	3.99		
	6.88	3.94	3.96	4.04
4.4	14.71			
	10.77	3.94		
	6.79	3.98	3.96	4.05
4.6	14.94			
	11.00	3.94		
	7.09	3.91	3.92	4.01
4.8	14.61			
	10.69	3.92		
	6.79	3.90	3.91	4.01
5.0	15.00			
	11.00	4.00		
	7.02	3.98	3.99	4.10
5.2	15.19			
	11.20	3.99		
	7.25	3.95	3.97	4.08
5.4	15.29			
	11.35	3.94		
	7.40	3.95	3.94	4.05
5.6	15.00			
	11.09	3.91		
	7.15	3.94	3.92	4.04
5.8	14.80			
	10.89	3.91		
	7.00	3.89	3.90	4.02
6.0	14.84			
	11.01	3.83		
	7.21	3.80	3.81	3.94
6.2	14.80			
	10.60	3.70		
	6.87	3.70	3.70	3.83



Die gefundenen Feldstärkenwerte sind in der graphischen Tabelle wiedergegeben.

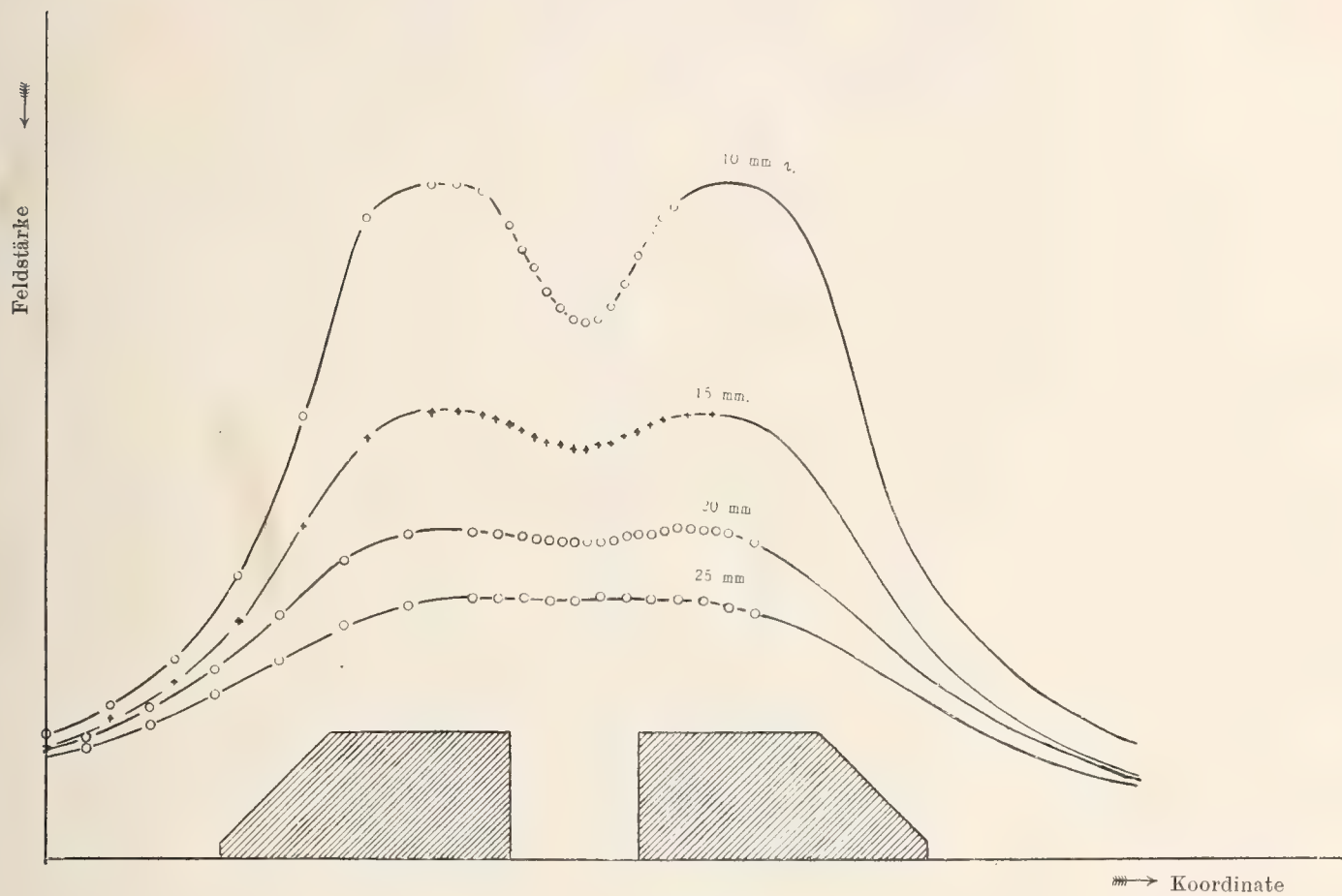


Fig. 11.

Wie aus vorstehender Tabelle zu ersehen ist, wird die Schwächung in der Mittelebene erst bei einem Polabstand von 2,5 cm gleich Null. Mit abnehmendem Abstand wird die Feldstärkenabnahme immer grösser.

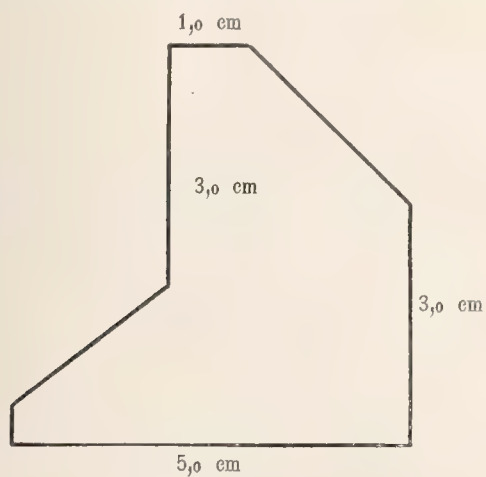


Fig. 12 a.

## XII. Meisselförmige Polschuhe.

Zu gewissen magnetischen Untersuchungen verwendet man Polschuhe, wie sie die nebenstehende Figur zeigt.

Um die Konzentrationswirkung und die Konstanz des Feldes zu untersuchen, wurden die folgenden Messungen ausgeführt.

## A. Polabstand 1,0 cm.

Längen- koordinate	Magnetometer- ablesungen	Magnetometer- ausschlag	Korrigierter Ausschlag
8.0	9.87 2.90	6.97	6.97
10.0	9.83 2.88	6.95	6.96
12.0	9.79 2.87	6.92	6.94
14.0	9.90 3.00	6.90	6.93
16.0	9.88 3.01	6.87	6.90
18.0	9.85 2.99	6.86	6.91
20.0	9.82 2.98	6.84	6.89
22.0	9.79 2.96	6.83	6.89
24.0	9.74 2.92	6.82	6.89
26.0	9.70 2.87	6.83	6.91
28.0	9.58 2.80	6.78	6.87
30.0	9.39 2.68	6.71	6.80
32.0	9.39 2.93	6.46	6.56
35.0	8.76 3.90	4.86	4.95
40.0	7.52 5.19	2.33	2.38

## B. Polabstand 1,5 cm.

8.0	8.53 4.59	3.94	3.94
10.0	8.51 4.59	3.92	3.92
12.0	8.52 4.59	3.93	3.94
14.0	8.50 4.58	3.92	3.94
16.0	8.51 4.59	3.92	3.94
18.0	8.50 4.53	3.97	4.00
20.0	8.50 4.57	3.93	3.96
22.0	8.50 4.58	3.92	3.96
24.0	8.48 4.58	3.90	3.94
26.0	8.43 4.60	3.83	3.88
28.0	8.42 4.61	3.81	3.86
30.0	8.39 4.70	3.69	3.74
32.0	8.30 4.82	3.48	3.54
35.0	7.95 5.06	2.89	2.94
40.0	7.36 5.59	1.77	1.81

C. Polabstand = 2,0 cm.

Längen- koordinate	Magnetometer- ablesungen	Magnetometer- ausschlag	Korrigierter Ausschlag
8.0	8.00		
	5.05	2.95	2.95
10.0	7.98		
	5.05	2.93	2.93
12.0	7.98		
	5.05	2.93	2.94
14.0	7.96		
	5.05	2.88	2.89
16.0	7.95		
	5.08	2.87	2.88
18.0	7.93		
	5.08	2.85	2.87
20.0	7.92		
	5.09	2.83	2.85
22.0	7.91		
	5.10	2.81	2.84
24.0	7.89		
	5.10	2.79	2.82
26.0	7.88		
	5.11	2.77	2.80
28.0	7.95		
	6.32	1.63	[1.65]
30.0	7.80		
	5.14	2.66	2.70
32.0	7.72		
	5.23	2.49	2.53
35.0	7.59		
	5.41	2.18	2.22
40.0	7.22		
	5.71	1.51	1.54

Die Ergebnisse der Messungen gehen aus der graphischen Tabelle hervor.

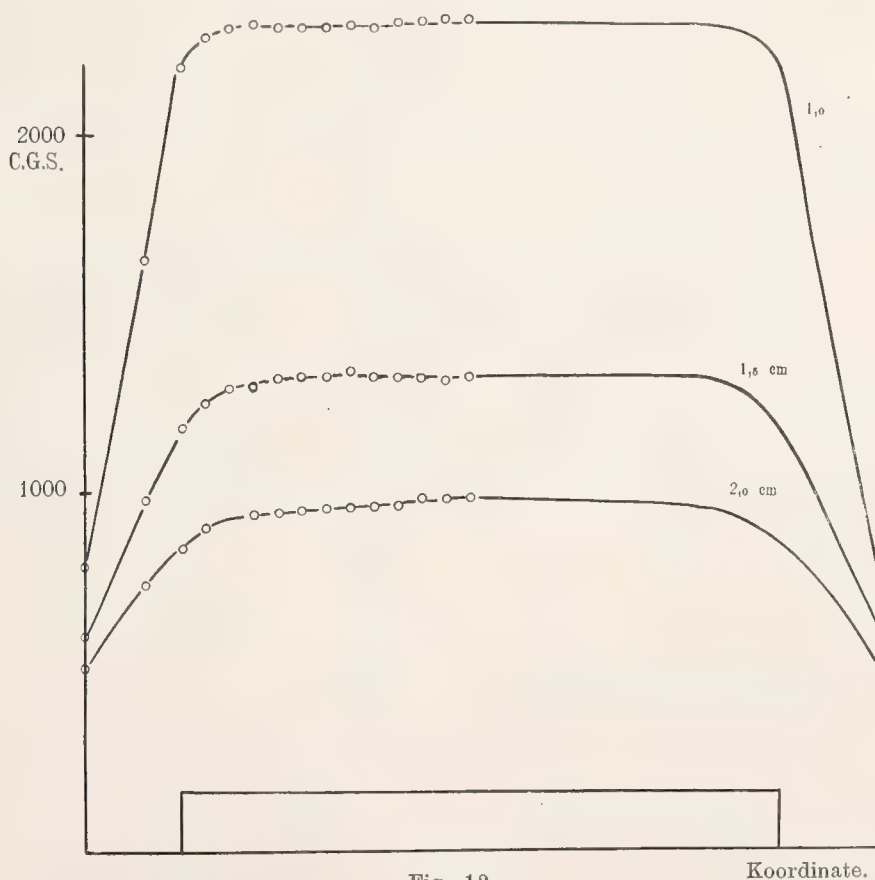


Fig. 12.

Koordinate.



Wie aus ihr zu ersehen ist, bekommt man durch diese Form gute Konzentrationswirkung und ebenso ein innerhalb weite Grenzen konstantes Feld.

### XIII. Kegelförmige Polschuhe.

Die am häufigsten verwandte Polschuhform ist die zuerst von STEFAN<sup>1</sup> angegebene eines abgestumpften Kegels. Etwas später haben EWING und LOW auf die Benutzung derartiger Polstücke ihre bekannte Untersuchungsmethode bei hohen Feldstärken gegründet. Die zu Anfang dieser Abteilung angeführten Formeln ergeben als den günstigsten Kegelwinkel zur Erzeugung der grössten Feldintensität:

$$\varphi_1 = 35^\circ 16',$$

(wo  $\varphi_1$  den in der untenstehenden, graphischen Tabelle bezeichneten Winkel bedeutet). Dabei ist das Feld in der Spitze des Kegels berechnet. Will man dagegen im Interferrikum ein möglichst konstantes Feld haben, ergibt sich als günstigster Winkel:

$$\varphi_2 = 50^\circ 46'.$$

Diese Werte sind nur unter Voraussetzung vollständiger Sättigung zu erhalten. Da aber diese Bedingung niemals völlig erfüllt wird, geben EWING und LOW anstatt der berechneten Winkel die folgenden an:

$$\varphi_1 = 30^\circ,$$

$$\varphi_2 = 45^\circ.$$

Um diese Folgerung der Theorie zu prüfen hat DU BOIS<sup>2</sup> die Maximalintensität bei verschiedenen Kegelwinkeln untersucht und sie in Übereinstimmung mit der Theorie gefunden, d. h. der günstigste Winkel zur Erreichung der grössten Intensität liegt etwa bei  $\varphi = 30^\circ$ , wo es sich jedoch, wie DU BOIS bemerkt, um ein sehr flaches Maximum handelt.

Um diese Verhältnisse bei schwächerer Magnetisierung zu studieren und spez. die Einwirkung des Kegelwinkels auf die Form des Feldes zu ermitteln, wurde die Feldintensität bei verschiedenen Öffnungswinkeln der Kegel gemessen. Die erste Messungsreihe wurde bei Flachpolen aufgenommen, deren Durchmesser 55 mm. betrug. Dann wurden die Polschuhe zu den gewünschten Winkeln abgedreht und das Feld ermittelt. Um mit einander vergleichbare Resultate zu erhalten wurden die Polabstände ebenso wie die abgestumpften Flächen konstant gehalten, und zwar betrug der Polabstand und der Durchmesser der fraglichen zirkulären Fläche 12 mm.

<sup>1</sup> STEFAN: loc. cit.

<sup>2</sup> DU BOIS: Magnetische Kreise p. 288.

Magnetisierungsstrom = 2,00 Amp.

Polabstand = 12 mm.

Magnetometerstrom = 0,50 milliamp.

Skalenabstand = 155,3 cm.

A.  $\operatorname{tg} \varphi = 0$ ;  $\varphi = 0$ .

Längen- koordinate	Magnetometer- ablesungen	Ausschlag	Korrigierter Ausschlag
7	9.71 4.67	5.04	5.04
9	9.70 4.66	5.04	5.05
11	9.69 4.66	5.03	5.05
13	9.69 4.66	5.03	5.05
15	9.69 4.66	5.03	5.06
17	9.68 4.63	5.05	5.09
19	9.66 4.62	5.04	5.08
21	9.63 4.63	5.00	5.05
23	9.62 4.63	4.99	5.05
25	9.61 4.63	4.98	5.04
30	9.53 4.59	4.94	5.01
35	9.38 4.72	4.66	4.75
40	8.60 5.60	3.00	3.07

B.  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{65}{430}$ ;  $\varphi = 8^{\circ} 36'$ .

7	9.59 4.59	5.00	5.00
9	9.55 4.55	5.00	5.01
11	9.51 4.53	4.98	4.99
13	9.51 4.52	4.99	5.01
15	9.51 4.64	4.87	4.89
17	9.42 4.72	4.70	4.73
19	9.30 4.78	4.52	4.56
21	9.20 4.84	4.36	4.40
23	9.11 4.98	4.13	4.17
25	9.23 5.21	4.02	4.07
30	9.14 5.53	3.61	3.66
35	8.89 5.79	3.10	3.16
40	8.19 5.89	2.30	2.35

$$C. \quad tg \varphi = \frac{117}{430}; \quad \varphi = 15^{\circ} 13'.$$

Längen- koordinate	Magnetometer- ablesungen	Ausschlag	Korrigierter Ausschlag
7	9.39 4.29	5.10	5.10
9	9.39 4.22	5.17	5.18
11	9.32 4.18	5.14	5.16
13	9.30 4.20	5.10	5.12
15	9.21 4.29	4.92	4.94
17	9.10 4.39	4.71	4.74
19	8.91 4.50	4.41	4.45
21	8.78 4.69	4.09	4.13
23	8.66 4.80	3.86	3.90
25	8.55 4.92	3.63	3.67
30	8.28 5.20	3.08	3.13
35	8.00 5.48	2.52	2.57
40	7.71 5.79	1.92	1.96

$$D. \quad tg \varphi = \frac{175}{430}; \quad \varphi = 22^{\circ} 9'.$$

7	9.71 4.53	5.18	5.18
9	9.70 4.44	5.26	5.27
11	9.68 4.41	5.27	5.29
13	9.65 4.42	5.23	5.25
15	9.56 4.50	5.06	5.09
17	9.35 4.66	4.69	4.72
19	9.14 4.80	4.34	4.37
21	8.98 5.00	3.98	4.02
23	8.81 5.22	3.59	3.63
25	8.70 5.41	3.29	3.33
30	8.40 5.70	2.70	2.74
35	8.15 5.98	2.17	2.21
40	7.90 6.20	1.70	1.74



$$\text{E. } \operatorname{tg} \varphi = \frac{240}{430}; \quad \varphi = 29^{\circ} 10'.$$

Längen- koordinate	Magnetometer ablesungen	Ausschlag	Korrigierter Ausschlag
7	9.79		
	4.53	5.26	5.26
9	9.79		
	4.42	5.37	5.38
11	9.72		
	4.39	5.33	5.35
13	9.67		
	4.42	5.25	5.27
15	9.58		
	4.52	5.06	5.09
17	9.32		
	4.71	4.61	4.64
19	9.09		
	4.93	4.16	4.19
21	8.88		
	5.20	3.68	3.71
23	8.70		
	5.41	3.29	3.32
25	8.53		
	5.59	2.94	2.98
30	8.23		
	5.89	2.34	2.38
35	7.98		
	6.60	1.88	1.92
40	7.78		
	6.30	1.48	1.48

$$\text{F. } \operatorname{tg} \varphi = \frac{312}{430}; \quad \varphi = 35^{\circ} 58'.$$

7	9.78		
	5.58	5.20	5.20
9	9.72		
	4.42	5.30	5.31
11	9.61		
	4.40	5.21	5.23
13	9.58		
	4.41	5.17	5.19
15	9.50		
	4.61	4.89	4.91
17	9.29		
	4.79	4.50	4.53
19	9.02		
	5.11	3.91	3.94
21	8.80		
	5.37	3.43	3.46
23	8.64		
	5.60	3.04	3.07
25	8.47		
	5.72	2.75	2.78
30	8.12		
	6.03	2.09	2.12
35	7.10		
	6.25	1.65	1.68
40	7.71		
	6.35	1.36	1.51

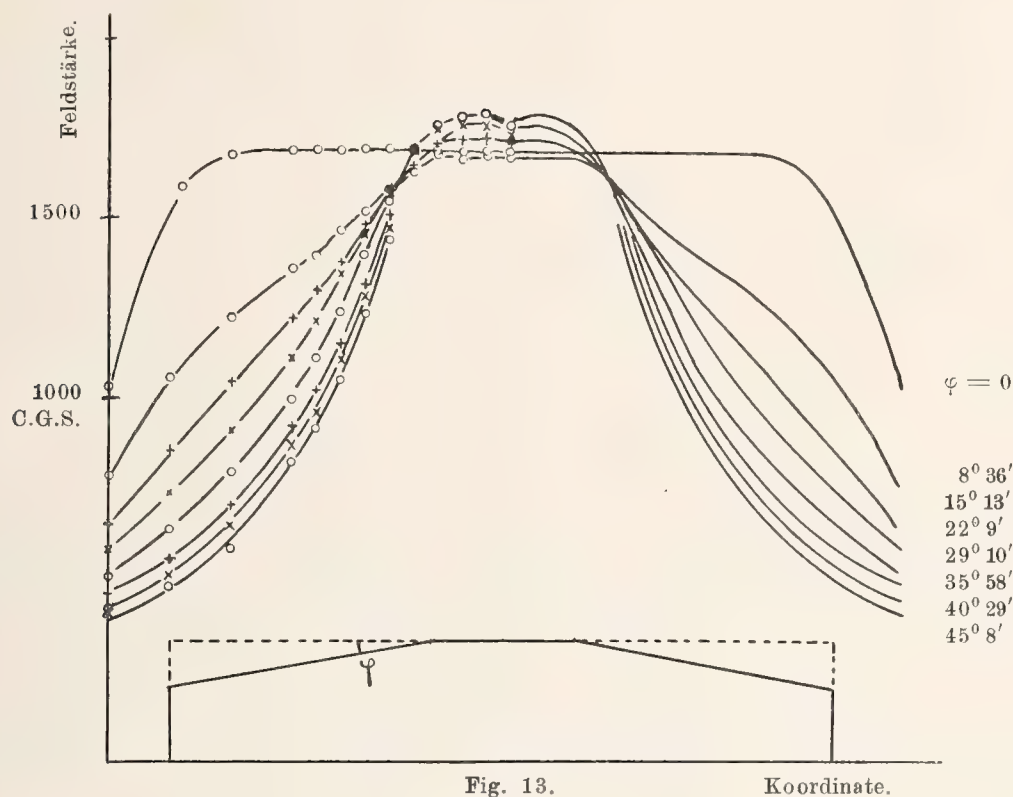
$$G. \quad tg \varphi = \frac{367}{430}; \quad \varphi = 40^{\circ} 29'.$$

Längen- koordinate	Magnetometer ablesungen	Ausschlag	Korrigierter Ausschlag
7	9.79		
	4.60	5.19	5.19
9	9.79		
	4.47	5.32	5.33
11	9.71		
	4.41	5.30	5.32
13	9.62		
	4.41	5.21	5.23
15	9.51		
	4.58	4.93	4.95
17	9.22		
	4.82	4.40	4.43
19	8.99		
	5.15	3.84	3.87
21	8.73		
	5.43	3.30	3.33
23	8.55		
	5.69	2.86	2.89
25	8.39		
	5.81	2.58	2.61
30	8.07		
	6.13	1.94	1.97
35	7.82		
	6.31	1.51	1.54
40	7.69		
	6.48	1.21	1.24

$$H. \quad tg \varphi = \frac{432}{430}; \quad \varphi = 45^{\circ} 8'.$$

7	9.77		
	4.62	5.15	5.15
9	9.72		
	4.49	5.23	5.24
11	9.70		
	4.43	5.27	5.29
13	9.63		
	4.48	5.15	5.17
15	9.47		
	4.67	4.80	4.82
17	9.18		
	4.89	4.29	4.32
19	8.88		
	5.20	3.68	3.71
21	8.62		
	5.50	3.12	3.15
23	8.41		
	5.70	2.71	2.74
25	8.25		
	5.90	2.35	2.38
30	7.92		
	6.18	1.74	1.77
35	7.73		
	6.33	1.40	1.43
40	7.61		
	6.41	1.20	1.23

Die Ergebnisse der Messungen werden in der untenstehenden graphischen Tabelle wiedergegeben.



Da die Polschuhe vor der ersten Abdrehung ausgeglüht waren, liegt die bei Flachpolen gefundene Intensitätskurve ein wenig höher als die erste Kegelpolkurve. Aus den Kurven sind die bemerkenswerten Resultate zu erzielen, dass schon ein sehr kleiner Winkel genügt, um eine wesentliche Konzentrationswirkung zu erhalten.

Bei den letzten drei Kurven (entsprechend den Winkeln:  $\varphi = 35^{\circ} 58'$ ,  $40^{\circ} 29'$ ,  $45^{\circ} 8'$ ) sind die oberen Teile in die Figur nicht eingetragen, da sie mit der bei  $\varphi = 29^{\circ} 10'$  erhaltenen Kurve beinahe zusammenfallen. Aus diesem Teil der Kurven ist eine Depression in der Mitte des Feldes zu ersehen, deren Grösse bei höheren Werten von  $\varphi$  am grössten ist.



### III.

#### Magnetische Eisenuntersuchung.

In magnetischer Hinsicht werden verschiedene ferromagnetische Materialien durch den Verlauf der  $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$  Kurve charakterisiert ( $\mathfrak{H}$  = Feldstärke,  $\mathfrak{M}$  = Magnetisierungsintensität). Die gewöhnliche Methode zur Aufnahme dieser Kurve besteht in der Bestimmung der Magnetisierungsintensität an langgestreckten Rotationsellipsoiden, die durch Einlegen in eine lange Spule einer bekannten Feldstärke ausgesetzt sind. Die Magnetisierungsintensität wird im allgemeinen mit Hilfe einer in Verlängerung der Rotationsachse aufgehängten Magnetenadel bestimmt. Die direkte Wirkung der Stromspule wird gewöhnlich durch eine andere Spule kompensiert.

Zur Untersuchung der in der vorliegenden Arbeit verwendeten Eisensorten wurde der beschriebene Magnetfeldmesser zur Bestimmung der Magnetisierungsintensität benutzt. Da aber die Empfindlichkeit dieses Instrumentes selbstverständlich viel kleiner als die des Magnetometers ist, muss der Feldmesser dem Ellipsoid näher gebracht werden, um hinreichende Ausschläge zu liefern. Zu diesem Zwecke wurde das Messinstrument in der Äquatorialebene des Ellipsoids ausserhalb der Spule in einem festen Halter gesetzt (Fig. 14). Da der Feldmesser keine Eisenteile enthält und das Magnetfeld des kleinen Messsolenoides vernachlässigbar klein ist, können hierdurch keine schädlichen Wirkungen entstehen.

#### XIV. Theorie der Methode.

Um die Magnetisierungsintensität des Ellipsoids aus den beobachteten Feldstärken in einem äusseren Punkt zu berechnen verfahren wir folgendermassen.  $u, v, \varphi$  sollen rotationselliptische Koordinaten bedeuten; dann ist

$$(1) \quad \begin{cases} x = a\sqrt{u^2 - 1} \sqrt{1 - v^2} \cos \varphi, \\ y = a\sqrt{u^2 - 1} \sqrt{1 - v^2} \sin \varphi, \\ z = auv. \end{cases}$$

Durch Elimination von  $v$  erhält man

$$(2) \quad \frac{x^2 + y^2}{a^2(u^2 - 1)} + \frac{z^2}{a^2 u^2} = 1;$$

und ebenso durch Elimination von  $u$

$$(3) \quad \frac{z^2}{a^2 v^2} - \frac{x^2 + y^2}{a^2(1 - v^2)} = 1.$$

Die erste Gleichung stellt für constante Werte von  $u$  verlängerte konfokale Rotationsellipsoide dar, die zweite bedeutet für  $v$  const. konfokale Rotationshyperboloiden, die ausserdem mit den Ellipsoiden konfokal sind. Um den ganzen Raum einzuschliessen variiert man  $u$  von 1 bis  $\infty$  und  $v$  von  $-1$  bis  $+1$ .

Aus der dritten Gleichung (1) erhalten wir ferner

$$(4) \quad dz = avdu + audv.$$

Die Bedeutung von  $a$  ergibt sich einfach aus einer der Gleichungen (2) oder (3). Nach (2) ist  $au$  die grosse Halbachse,  $a\sqrt{u^2 - 1}$  die kleine Halbachse; die lineare Exzentrizität somit

$$\sqrt{a^2 u^2 - a^2(u^2 - 1)} = a$$

• Unter Verwendung der angeführten Bezeichnungen ist bekanntlich die innere bzw. die äussere Potentiale

$$(5) \quad V_i = C_1 u \cdot v; \quad V_a = C_2 \left[ \frac{u}{2} \lg \frac{u-1}{u+1} + 1 \right] v.$$

Die Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  bestimmen sich aus den Grenzbedingungen folgendermassen; für  $u = u_0$ , muss sein  $V_i = V_a$

$$(6) \quad C_1 u_0 = C_2 \left[ \frac{u_0}{2} \lg \frac{u_0-1}{u_0+1} + 1 \right].$$

und

$$\mu \frac{\partial V_i}{\partial n} - \frac{\partial V_a}{\partial n} = (\mu - 1) \mathfrak{H}_{on},$$

wo  $\mathfrak{H}_{on}$  die Normalkomponente des ungestörten Spulenfeldes bedeutet:

$$(7) \quad \mu C_1 - C_2 \left[ \frac{1}{2} \lg \frac{u_0-1}{u_0+1} + \frac{u_0}{u_0^2 - 1} \right] = a (\mu - 1) \mathfrak{H}_0$$

War  $\mathfrak{H}_0$  das ursprüngliche Spulenfeld, so kann das innerhalb des Ellipsoides vorhandene Feld  $\mathfrak{H}$  folgendermassen geschrieben werden

$$(8) \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 - P\mathfrak{M}$$

wo  $\mathfrak{M}$  die Magnetisierungsintensität;  $P$  den Entmagnetisierungsfaktor bedeutet.

$$(9) \quad P = 4\pi (u_0^2 - 1) \left[ \frac{u_0}{2} \lg \frac{u_0+1}{u_0-1} - 1 \right]$$

Wenn also die Magnetisierungsintensität bekannt ist, kann das Feld  $\mathfrak{H}$  aus dem berechenbaren Spulenfeld  $\mathfrak{H}_0$  und den Dimensionen des Ellipsoides bestimmt werden. Es erübrigt sich die Berechnung von  $\mathfrak{M}$  aus der in einem Punkt der Aequatorialebene des Ellipsoides gemessenen Feldstärke.

Die Äquatorialebene ist durch den Wert

$$v = 0$$

definiert. Mit Hilfe des Feldmessers wird die Feldstärkekomponente senkrecht zu dieser Ebene bestimmt d. h.

$$(10) \quad K = - \left( \frac{\partial V_a}{\partial z} \right)_{v=0}$$

Nach Gleichung (4) ist aber dann  $dz = a u dv$ . Es wird somit

$$(11) \quad K = - \frac{1}{a} \left( \frac{\partial V_a}{u \partial v} \right)_{v=0}$$

$$(12) \quad K = - \frac{1}{a u} C_2 \left[ \frac{u}{2} \lg \frac{u-1}{u+1} + 1 \right]$$

Den Wert von  $C_2$  erhalten wir aus (6) und (7) durch Multiplikation mit  $\mu$  bzgl.  $-u_0$ . Addieren wir die Gleichungen, bekommen wir somit:

$$C_2 \left[ \frac{u_0}{2} \lg \frac{u_0-1}{u_0+1} + \frac{u_0^2}{u_0^2-1} - \frac{\mu u_0}{2} \lg \frac{u_0-1}{u_0+1} - \mu \right] = - a u_0 (\mu - 1) \mathfrak{H}_0$$

$$C_2 \left[ \frac{u_0}{2} (\mu - 1) \lg \frac{u_0-1}{u_0+1} + (\mu - 1) - \frac{1}{u_0^2-1} \right] = a u_0 (\mu - 1) \mathfrak{H}_0$$

$$C_2 \left[ (\mu - 1) \left( \frac{u_0}{2} \lg \frac{u_0-1}{u_0+1} + 1 \right) - \frac{1}{u_0^2-1} \right] = a u_0 (\mu - 1) \mathfrak{H}_0$$

$$(13) \quad C_2 = \frac{a u_0 (\mu - 1) \mathfrak{H}_0}{(\mu - 1) T - \frac{1}{u_0^2-1}}$$

wo

$$(14) \quad T = \frac{u_0}{2} \lg \frac{u_0-1}{u_0+1} + 1;$$

bemerken wir noch dass

$$(15) \quad \mathfrak{M} = \frac{\mu-1}{4\pi} \mathfrak{H}$$

und

$$(16) \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 - P \cdot \mathfrak{M},$$

also

$$(17) \quad \begin{aligned} \frac{\mu-1}{4\pi} \mathfrak{H}_0 &= \mathfrak{M} \left( 1 + \frac{\mu-1}{4\pi} P \right) \\ &= \mathfrak{M} [1 - (\mu-1)(u_0^2-1) T] \end{aligned}$$

mit Rücksicht auf Gl. (9).



Der Ausdruck für die Kraft  $K$  wird dann

$$(18) \quad K = - \frac{1}{au} C_2 \cdot R$$

$$R = \frac{u}{2} \lg \frac{u-1}{u+1} + 1$$

$$K = - \frac{4\pi u_0 \mathfrak{M} [1 - (\mu - 1) (u_0^2 - 1) T]}{u \left[ (\mu - 1) T - \frac{1}{u_0^2 - 1} \right]} R$$

$$(19) \quad K = \frac{4\pi u_0}{u} (u_0^2 - 1) \mathfrak{M} \cdot R$$

Die Kraft  $K$  ist also der Magnetisierung proportional. In der letzten Gleichung sind jetzt alle Grössen ausser  $\mathfrak{M}$  bekannt. Nennen wir die grosse Halbachse des Ellipsoids  $A$  und die kleine Halbachse  $B$ , dann ist

$$(20) \quad u_0 = \frac{A}{\sqrt{A^2 - B^2}}$$

Den Wert von  $u$  bestimmen wir aus der Gl. (2), durch Nullsetzen von  $z$  und Einführung des gemessenen Abstandes  $R$  für  $\sqrt{x^2 + y^2}$

$$\frac{R^2}{a^2 (u^2 - 1)} = 1.$$

Wir bekommen somit

$$u = \sqrt{1 + \frac{R^2}{a^2}}$$

$a$  ist aber gleich  $\sqrt{A^2 - B^2}$ ; also

$$(21) \quad u = \sqrt{1 + \frac{R^2}{A^2 - B^2}}.$$

Wir fassen schliesslich die nötigen Formeln zusammen. Ist die Kraft  $K$  bestimmt, so ergibt sich die Magnetisierung aus der Formel:

$$(22) \quad K = S \cdot \mathfrak{M},$$

wo

$$(23) \quad S = - \frac{4\pi u_0}{u} (u_0^2 - 1) \left[ \frac{u}{2} \lg \frac{u+1}{u-1} - 1 \right].$$

Aus dem so bestimmten Wert von  $\mathfrak{M}$  erhalten wir durch Berücksichtigung der gleichfalls bekannten Feldintensität der Spule,  $\mathfrak{H}_0$ :

$$(24) \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 - P \mathfrak{M},$$

wo

$$(25) \quad P = 4\pi (u_0^2 - 1) \left[ \frac{u_0}{2} \lg \frac{u_0+1}{u_0-1} - 1 \right]$$

Weiter ist

$$(26) \quad u_0 = \frac{A}{\sqrt{A^2 - B^2}}; \quad u = \sqrt{1 + \frac{R^2}{A^2 - B^2}}.$$

### XV. Messungen.

Das hier beschriebene Verfahren der magnetischen Eisenuntersuchung wurde zur Charakterisierung des Eichmagneten, an einem Ellipsoid aus demselben Material [Dannemora 1,02] benutzt. Die Versuchsanordnung zeigt Fig. 14. Wegen der ziem-

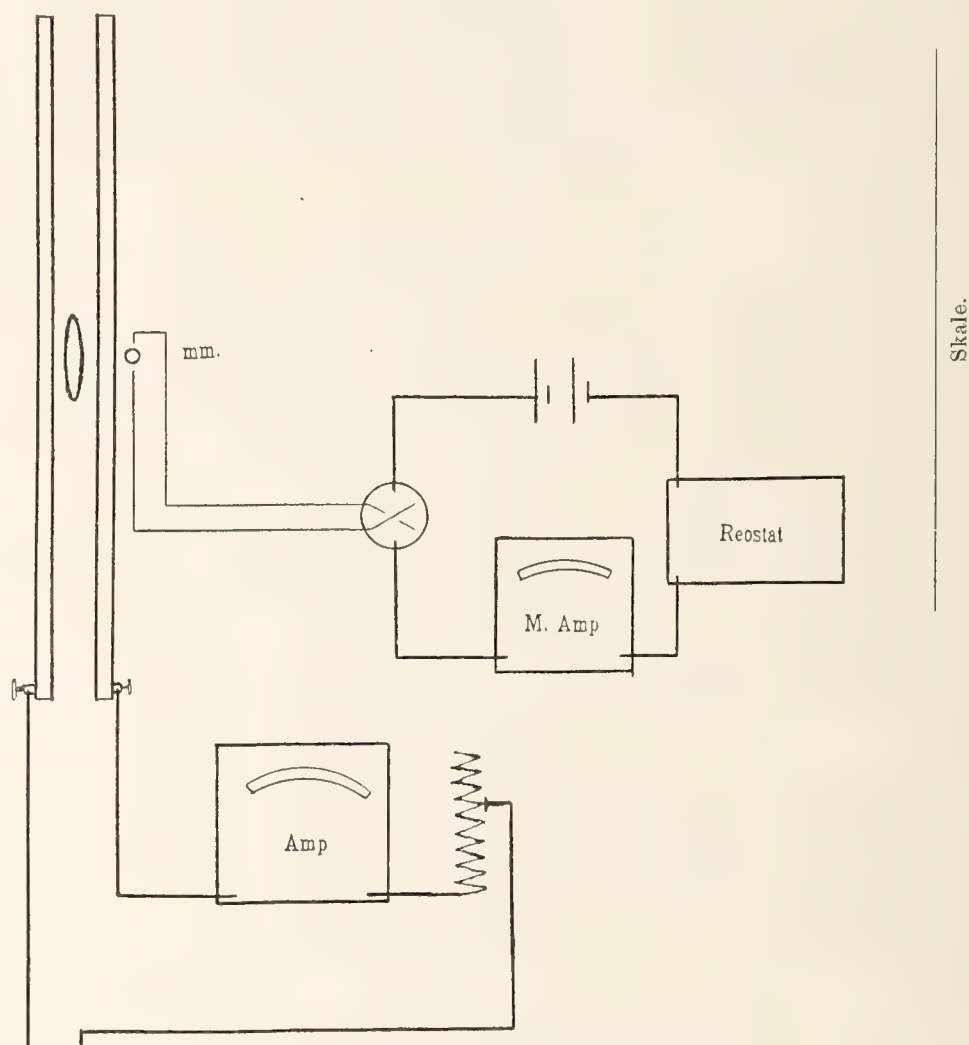


Fig. 14.

lich ungünstigen Wickelungsverhältnisse der verfügbaren Spule [der Wicklungsdraht bestand aus dünnem Kupferdraht mit sehr dicker Isolation] mussten starke Ströme (bis 10 Amp.) benutzt werden, die starken Intensitätsschwankungen unterworfen waren. Eine etwa mangelnde Übereinstimmung in den Resultaten ist also hauptsächlich diesen Umstand zuzuschreiben. Aber auch in einer anderen Hinsicht war die Spule für diesen Zweck ungeeignet. Wegen der dicken Isolation konnte

der Feldmesser dem Ellipsoid nicht so nahe gebracht werden, wie erwünscht war. — Für den hier vorliegenden Zweck, die Charakterisierung des Materials, ist aber die erhaltene Genauigkeit völlig ausreichend; will man aber die Methode zu genaueren Messungen verwenden, so ist selbstverständlich eine zweckmässigere Spule zu benutzen. Gegenüber der gewöhnlichen Magnetometermethode besitzt die beschriebene grosse Vorteile, wenigstens wenn man auf die höchste Genauigkeit verzichtet. Ausser der Bequemlichkeit die in der Verwendung des Feldmessers gegenüber der des Magnetometers liegt ist eine Kompensation des Spulenfeldes nicht nötig. Die sehr kleine Wirkung der Spule am Orte des Feldmessers wird am bequemsten durch eine kleine graphische Scheerung berücksichtigt wie später gezeigt werden wird. Ein anderer Vorteil ist die Unabhängigkeit vom erdmagnetischen Felde.

In folgender Tabelle sind die Messungen an der obengenannten Stahlorte wiedergegeben

Ellipsoid A.

Zeit	Magnetisie- rungsstrom- stärke	Magnetometer- stromstärke	Magnetometerablesungen		Magnetometer- ausschlag
6.27	3.00	80.0	5.87 5.87	6.20	0.33
6.29	4.00	80.0	5.79 5.79	6.28	0.49
6.31	5.00	80.0	5.71 5.71	6.32	0.61
6.33	6.00	80.0	5.66 5.66	6.40	0.74
6.35	7.00	80.0	5.59 5.59	6.50	0.91
6.37	8.00	80.0	5.51 5.51	6.53	1.02
6.39	9.00	80.0	5.47 5.47	6.62	1.15
6.41	10.00	80.0	5.39 5.39	6.69	1.30
6.42	9.00	80.0	5.42 5.42	6.66	1.24
6.43	8.00	80.0	5.49 5.49	6.61	1.12



Zeit	Magnetisie- rungsstrom- stärke	Magnetometer- stromstärke	Magnetometerablesungen		Magnetometer- ausschlag
6.44	7.00	80.0	5.51	6.58	1.07
			5.51		
6.45	6.00	80.0	5.59	6.50	0.91
			5.59		
6.46	5.00	80.0	5.63	6.46	0.83
			5.63		
6.47	4.00	80.0	5.69	6.40	0.70
			5.70		
6.48	3.00	80.0	5.75	6.33	0.58
			5.75		
6.49	0.00	80.0	5.98	6.12	0.14
			5.98		
6.50	3.00	80.0	5.91	6.20	0.29
			5.91		
6.51	4.00	80.0	5.83	6.29	0.46
			5.83		
6.52	5.00	80.0	5.77	6.35	0.58
			5.77		
6.53	6.00	80.0	5.69	6.40	0.71
			5.69		
6.54	7.00	80.0	5.62	6.50	0.88
			5.62		
6.55	8.00	80.0	5.57	6.60	1.03
			5.57		
6.56	9.00	80.0	5.48	6.67	1.19
			5.48		
6.57	10.00	80.0	5.41	6.71	1.30
			5.41		
6.58	9.00	80.0	5.48	6.68	1.20
			5.48		
6.59	8.00	80.0	5.50	6.62	1.12
			5.50		

Zeit	Magnetisie- rungsstrom- stärke	Magnetometer- stromstärke	Magnetometerablesungen		Magnetometer- ausschlag
7.00	7.00	80.0	5.55 5.55	6.60	1.05
7.01	6.00	80.0	5.61 5.61	6.52	0.91
7.02	5.00	80.0	5.67 5.67	6.49	0.82
7.03	4.00	80.0	5.71 5.71	6.41	0.70
7.04	3.00	80.0	5.78 5.78	6.38	0.60
7.05	0.00	80.0	5.99 5.99	6.16	0.17
7.06	3.00	80.0	5.91 5.91	6.21	0.30
7.07	4.00	80.0	5.85 5.85	6.29	0.44
7.08	5.00	80.0	5.79 5.79	6.37	0.58
7.09	6.00	80.0	5.70 5.70	6.41	0.71
7.10	7.00	80.0	5.61 5.61	6.50	0.89
7.11	8.00	80.0	5.56 5.56	6.60	1.04
7.12	9.00	80.0	5.50 5.50	6.64	1.14
7.13	10.00	80.0	5.41 5.41	6.71	1.30

In die graphische Tabelle (Fig. 15) sind die in der zweiten und fünften Kolumne stehenden Werte eingetragen. Die letzten als Ordinate wiedergegebenen Werte sind zwar nach Gl. (22) der Magnetisierungsintensität proportional, wenn wir von der kleinen obengenannten Korrektur absehen; die Abscissen dagegen geben nicht die Werte der Feldstärke  $\mathfrak{H}$  an, sondern eine dem ungestörten Spulenfeld  $\mathfrak{H}_0$  proportionale Grösse.

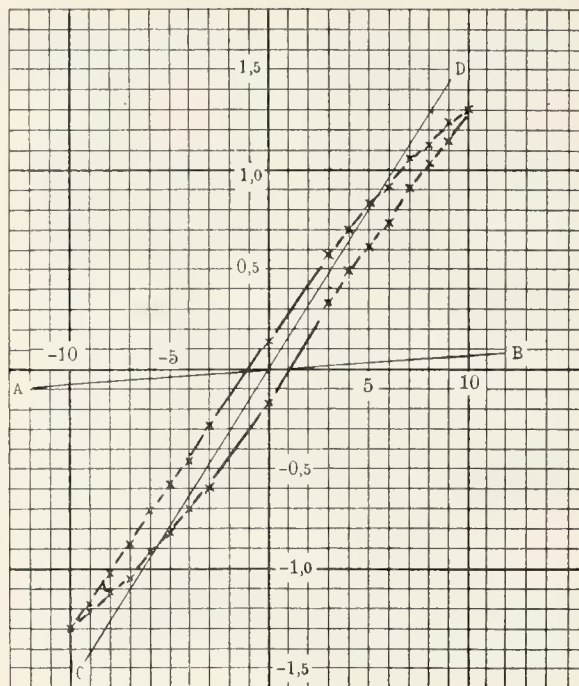


Fig. 15.

Die richtigen Werte erhalten wir am einfachsten durch ein Scheerungsverfahren. Nach Gl. (22) ergibt sich aus der Feldstärke  $K$  die Magnetisierungsintensität. Nach Einsetzen der Werte von  $A$ ,  $B$  und  $R$  in (26)

$$A = 8,69 \text{ cm},$$

$$B = \frac{1}{2\pi} 5,00 \text{ cm},$$

$$R = 6,00 \text{ cm},$$

kann die Grösse  $S$  berechnet werden. Wir finden

$$S = -0,0362.$$

Der Wert von  $\mathfrak{H}$  ergibt sich jetzt aus (24) für 10 Amp. Magnetisierungsstrom:

$$\mathfrak{H} = 166 - 135 = 31$$

$P$  ist dabei 0,222.

Legen wir in Figur 15 durch den Ursprung eine Gerade  $CD$ , die für den höchsten Ordinate einen Wert eine Abscisse gleich 135 C. G. S.-Einheiten (d. h. in der Abscisseneinheit = 7,7) hat, so haben wir die Feldstärkenwerte von dieser Linie aus zu rechnen.



Eine entsprechende Scheerung AB berücksichtigt die Korrektur wegen des Spulenfeldes.

Das zur Untersuchung der Kegelpole verwandte Schmiedeeisen (Avesta 0,25) ergab folgende Werte:

## Ellipsoid B.

Zeit	Magnetisie- rungsstrom- stärke	Magnetometer- stromstärke	Magnetometerablesungen		Magnetometer- ausschlag
3.02	3.00	80.0	5.90 5.90	6.40	0.50
3.04	4.00	80.0	5.81 5.81	6.49	0.68
3.06	5.00	80.0	5.73 5.73	6.56	0.83
3.08	6.00	80.0	5.66 5.66	6.67	1.01
3.10	7.00	80.0	5.60 5.60	6.73	1.18
3.12	8.00	80.0	5.51 5.51	6.82	1.31
3.14	9.00	80.0	5.42 5.42	6.90	1.48
3.16	10.00	80.0	5.34 5.34	6.99	1.65
3.17	9.00	80.0	5.40 5.40	6.90	1.50
3.18	8.00	80.0	5.49 5.49	6.82	1.33
3.19	7.00	80.0	5.54 5.54	6.72	1.18
3.20	6.00	80.0	5.63 5.63	6.65	1.02
3.21	5.00	80.0	5.70 5.70	6.59	0.89
3.22	4.00	80.0	5.80 5.80	6.50	0.70

Zeit	Magnetisie- rungsstrom- stärke	Magnetometer- stromstärke	Magnetometerablesungen		Magnetometer- ausschlag
3.23	3.00	80.0	5.89 5.89	6.40	0.51
3.29	3.00	80.0	5.91 5.91	6.40	0.49
3.30	4.00	80.0	5.82 5.82	6.50	0.68
3.31	5.00	80.0	5.76 5.76	6.60	0.84
3.32	6.00	80.0	5.68 5.68	6.68	1.00
3.33	7.00	80.0	5.59 5.59	6.77	1.18
3.34	8.00	80.0	5.50 5.50	6.88	1.33
3.35	9.00	80.0	5.41 5.41	6.91	1.50
3.36	10.00	80.0	5.36 5.36	7.00	1.64
3.37	9.00	80.0	5.40 5.40	6.90	1.50
3.38	8.00	80.0	5.51 5.51	6.87	1.36
3.39	7.00	80.0	5.59 5.59	6.79	1.20
3.40	6.00	80.0	5.70 5.70	6.70	1.00
3.41	5.00	80.0	5.79 5.79	6.62	0.83
3.42	4.40	80.0	5.84 5.86	6.55	0.69
3.43	3.00	80.0	5.91 5.91	6.48	0.43
3.44	0.00	80.0	6.19 6.19	6.21	0.03

Die Werte des ungestörten Feldes und der Magnetisierung sind in der folgenden graphischen Tabelle wiedergegeben.

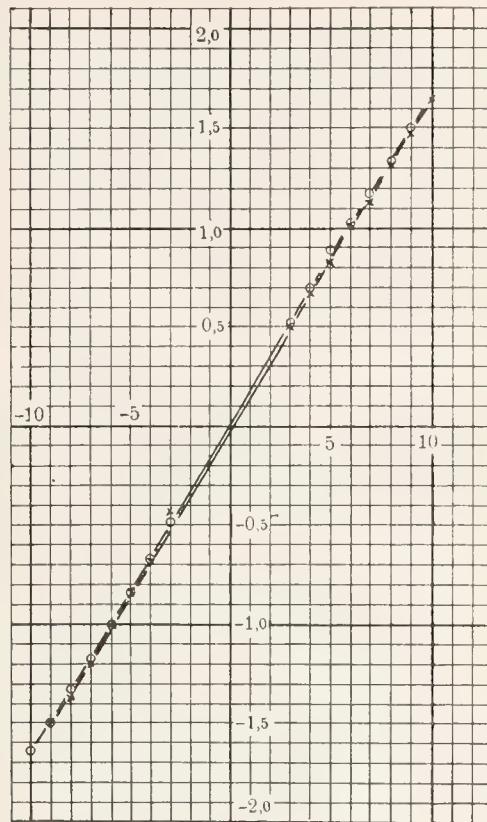


Fig. 16.

An die Darlegung der Verwendungsarten des Drehspulmagnetometers mögen einige vorläufige Bemerkungen über Messungen von Wechselstromgrößen angeschlossen werden. — Wird der Feldmessersolenoid mit demselben Wechselstromgetrieben wie die Magnetisierungsspirale, so erhalten wir einen Integraleffekt

$$\text{prop.} \int_0^{\tau} \mathfrak{M} \mathfrak{H}_0 dt;$$

es wird nämlich die Stromrichtung im Solenoid gleichzeitig mit der Magnetisierung umgekehrt

Durch Veränderung ist es aber möglich eine interessantere Funktion zu registrieren. Zu diesem Zwecke wird der Solenoid mit einem in einem Lufttransformator phasenverschobenen Strom beschickt. Wäre dann die Hysterese des Ellipsoides gleich Null so würde der Feldmesser keinen Ausschlag geben. Der Ausschlag wird in diesem Falle:

$$\text{prop.} \int_0^{\tau} \mathfrak{M} \cdot \frac{\partial \mathfrak{H}_0}{\partial t} dt;$$



wird der Strom sinusförmig angenommen, dann ist es auch die Magnetisierung  $\mathfrak{M}$ ;  $\frac{\partial \mathfrak{H}_0}{\partial t}$  dagegen ist dem Cosinus proportional: der Integral somit Null. Besitzt das Eisen Hysteresis, so wird die Magnetisierung gegen den Strom ein wenig verschoben und man bekommt einen Ausschlag, der der Hysteresis zuzuschreiben ist. Wir wollen kurz die Bedeutung des Ausschlages berechnen. Nehmen wir den Wechselstrom sinusförmig an; dann ist erstens das ungestörte Spulenfeld  $\mathfrak{H}_0$  sinusförmig, zweitens die Solenoidenstromstärke prop.  $\frac{\partial \mathfrak{H}_0}{\partial t}$ , d. h. cosinusförmig.

Der Ausschlag  $\alpha$  ist dem Produkt aus Magnetisierung  $\mathfrak{M}$  und Solenoidstromstärke  $\frac{\partial \mathfrak{H}_0}{\partial t}$  prop.

$$\int_0^{\tau} \mathfrak{M} \frac{\partial \mathfrak{H}_0}{\partial t} dt$$

Nach bekannten Formeln ist

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 - P\mathfrak{M},$$

also

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{H}_0}{\partial t} - P \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}$$

und

$$4\pi\mathfrak{M} = \mathfrak{B} - \mathfrak{H},$$

$$\alpha \text{ prop. } \int_0^{\tau} \mathfrak{M} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} dt + P \int_0^{\tau} \mathfrak{M} \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} dt$$

Setzen wir in erster Annäherung die Permeabilität als konstant voraus, so ist  $\mathfrak{M}$  prop.  $\mathfrak{B}$ , also der erste Term der Magnetisierungsarbeit prop. Ist der Entmagnetisierungsfaktor  $P$  hinreichend gross, wird somit der Ausschlag ein Mass der Hysteresisarbeit. Wollen wir aber den zweiten Term mit berücksichtigen, so ist lediglich durch den Solenoid ein Strom prop.  $\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}$  zu senden. Dies wird unter den gemachten Voraussetzungen einfach dadurch erreicht, dass wir durch Umlegen einiger Wicklungen um den Ellipsoid einen schwachen Induktionsstrom abnehmen.

---

## IV.

### Zusammenfassung der Resultate.

1. Es wurde die Konstruktion eines Magnetfeldmessers nach dem Drehspulenprinzip angegeben und geprüft. Das Instrument zeigte den Stromstärken proportionale Ausschläge bis 0,01 Amp.

2. Mit dem Feldmesser können Feldstärken von 1 C. G. S. aufwärts bestimmt werden.

Die Genauigkeit beträgt bei Feldstärken grösser als 100 C. G. S. wenigstens 0,5 %.

3. Zur Eichung des Instrumentes dienten zwei Methoden:

A. Ein berechenbares Spulenfeld.

B. Ein permanenter Magnet (dessen Feld nach A bestimmt war).

4. In Zusammenhänge mit der ersten der genannten Eichmethoden wurde das Feld längs der Spulenachse ermittelt und in Übereinstimmung mit der Theorie gefunden.

5. Es wurde eine neue bei kleineren Spiegeln verwendbare Ablesungsmethode angegeben.

6. Mit Hilfe der Feldmesser wurde die Feldform bei einem Ruhmkorffschen Elektromagneten mit verschiedenen Polansätzen ermittelt. Die Ergebnisse sind in graphischen Tabellen wiedergegeben.

7. Zur magnetischen Untersuchung der verwandten Materialien wurde eine abgeänderte Magnetometermethode benutzt; hierbei wird die Magnetisierungsintensität durch Feldmessung in der Äquatorialebene des Ellipsoides bestimmt. Die zur Berechnung der wirklichen Feldstärke nötigen Formeln wurden entwickelt.

8. Hinzukamen einige vorläufige Bemerkungen über die Verwendung von Wechselstrom im Solenoide zur Untersuchung der magnetischen Grössen bei Wechselmagnetisierung.

Es ist mir eine angenehme Pflicht dem Direktor des Institutes Herrn Prof. Dr. J. R. RYDBERG für die wohlwollende Förderung dieser Arbeit meinen herzlichsten Dank auszusprechen. Bei der Ausführung einiger der numerischen Rechnungen hat mich mein Freund Herr mag. phil. ROB OLSSON freundlich unterstützt. Schliesslich sei es mir gestattet der Königl. Physiographischen Gesellschaft zu Lund für die ökonomische Unterstützung der Arbeit aufrichtig zu danken.





## Inhaltsübersicht.

I. Einleitung .....	3
I. Der Drehspulmagnetometer.....	4
II. Konstruktion des Magnetfeldmessers .....	5
III. Ablesungsmethoden .....	6
IV. Eichungsverfahren.....	9
V. Versuchsanordnung .....	10
VI. Sekundäre Eichung .....	20
II. Spezielle Magnetfelder.....	23
VII. Die Messungen .....	24
VIII. Feldstärke als Funktion des Magnetisierungsstromes.....	25
IX. Feldform als Funktion des Magnetisierungsstromes .....	26
X. Die Form des Feldes bei Flachpolen .....	32
XI. Die Wirkung cylindrischer Durchbohrungen.....	35
XII. Meisselförmige Polschuhe .....	41
XIII. Kegelförmige Polschuhe.....	44
III. Magnetische Eisenuntersuchung.....	50
XIV. Theorie der Methode.....	50
XV. Messungen .....	54
IV. Zusammenfassung der Resultate .....	63

---



# EXTENSION DE LA MÉTHODE DE LAPLACE

AUX ÉQUATIONS

$$\sum_{i=0}^{n-1} A_{1i}(x, y) \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^n A_{0i}(x, y) \frac{\partial^i z}{\partial y^i} = 0$$

PAR

LOUISE PETRÉN







## INTRODUCTION.

Les premiers résultats importants sur l'intégration de l'équation

$$(1) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0,$$

où les coefficients  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sont des fonctions de  $x$  et de  $y$ , sont dus à EULER. EULER <sup>1)</sup> a montré que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) admette une intégrale intermédiaire du premier ordre est que les coefficients  $a$ ,  $b$ ,  $c$  satisfassent à une des relations

$$(2) \quad \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c = 0, \quad (3) \quad \frac{\partial b}{\partial y} + ab - c = 0.$$

Si  $\frac{\partial a}{\partial x} + ab - c = 0$ , l'équation (1) peut se mettre sous la forme

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + b \right) \left( \frac{\partial z}{\partial y} + az \right) = 0$$

et l'équation admet l'intégrale  $e^{-\int a dy} X$ ,  $X$  étant une fonction arbitraire de  $x$ ; de même si  $\frac{\partial b}{\partial y} + ab - c = 0$ , l'équation (1) peut se mettre sous la forme

$$\left( \frac{\partial}{\partial y} + a \right) \left( \frac{\partial z}{\partial x} + bz \right) = 0$$

et l'équation admet l'intégrale  $e^{-\int b dx} Y$ ,  $Y$  étant une fonction arbitraire de  $y$ . Dans les deux cas considérés l'intégration de l'équation (1) se ramène à l'intégration successive de deux équations différentielles linéaires du premier ordre, intégration qui n'exige que des quadratures. De plus, EULER nous a donné des exemples d'équations du type (1) dont on peut trouver sous forme explicite une intégrale dépendant d'une fonction arbitraire, sans qu'il existe d'intégrale intermédiaire du premier ordre; les intégrales explicites en question sont de la forme

$$(4) \quad \alpha_0 X^{(m)} + \alpha_1 X^{(m-1)} + \dots + \alpha_{m-1} X' + \alpha_m X$$

ou de la forme

$$(5) \quad \beta_0 Y^{(r)} + \beta_1 Y^{(r-1)} + \dots + \beta_{r-1} Y' + \beta_r Y,$$

<sup>1)</sup> EULER Institutiones Calculi Integralis, T. III, Pars prima, Sectio secunda, Cap II.

$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}, \alpha_m, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{r-1}, \beta_r$  étant des fonctions déterminées de  $x$  et de  $y$ ,  $X^{(i)}$  et  $Y^{(i)}$  les dérivées d'ordre  $i$  de  $X$  et de  $Y$  respectivement,  $m$  et  $r$  des nombres déterminés. EULER est le premier qui a donné des intégrales du type considéré, et dans les derniers temps on les a nommées d'après lui: des intégrales de la forme d'Euler<sup>1)</sup>.

Dans un Mémoire<sup>2)</sup>, présenté à l'Académie des Sciences de Paris 1773, LAPLACE donna une méthode pour reconnaître si l'équation (1) admet une intégrale de la forme (4) ou (5); si l'équation admet une intégrale de la forme (4) ou (5), on obtient cette intégrale par la méthode de Laplace, et l'intégration de l'équation (1) peut être ramenée à l'intégration de deux équations différentielles linéaires du premier ordre. La méthode de Laplace consiste à ramener, par l'application répétée de l'une ou de l'autre de deux transformations, l'intégration de l'équation (1) à l'intégration d'une équation de même type qui admet une intégrale intermédiaire du premier ordre et, par conséquent, est immédiatement intégrable. Les deux transformations de Laplace sont

$$(6) \quad z_1 = \frac{\partial z}{\partial y} + az, \quad (7) \quad z_{-1} = \frac{\partial z}{\partial x} + bz.$$

En appliquant la transformation (6), l'équation (1) peut s'écrire

$$(8) \quad \frac{\partial z_1}{\partial x} + bz_1 = hz, \quad h = \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c.$$

Si  $h \neq 0$ , l'élimination de  $z$  entre les équations (6) et (8) conduit à l'équation

$$(9) \quad \frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} + a_1 \frac{\partial z_1}{\partial x} + b_1 \frac{\partial z_1}{\partial y} + c_1 z_1 = 0,$$

$$\text{où l'on a} \quad a_1 = a - \frac{\partial \log h}{\partial y}, \quad b_1 = b, \quad c_1 = c - \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} - b \frac{\partial \log h}{\partial y}.$$

Il résulte des équations (6) et (8) que si l'une des équations (1) et (9) admet une intégrale de la forme d'Euler, il en est de même de l'autre équation; les intégrales des deux équations (1) et (9) se correspondent une à une, de toute intégrale de l'une des équations on obtient sans intégration une solution de l'autre équation. Si l'équation (1) admet l'intégrale

$$z = \alpha_0 X^{(m)} + \alpha_1 X^{(m-1)} + \dots + \alpha_{m-1} X' + \alpha_m X,$$

l'équation (9) admet une intégrale de même type, laquelle renferme les dérivées de  $X$  d'ordre  $m-1$  au plus parce que  $\frac{\partial \alpha_0}{\partial y} + a \alpha_0 = 0$ . Il en résulte que si l'équation (1) admet une intégrale de la forme (4), on est conduit, par l'application de la transformation (6)  $m$  fois au plus, à une équation qui est de même type que l'équation (1) et qui admet une intégrale de la forme  $\alpha X$  ( $\alpha$  étant une fonction

<sup>1)</sup> Le Roux est le premier qui a donné le nom d'intégrale de la forme d'Euler aux intégrales qui s'expriment linéairement à l'aide d'une fonction arbitraire d'une variable caractéristique et des dérivées de cette fonction en nombre déterminé. Journal de Mathématiques pures et appliquées, 5<sup>ième</sup> série, T. IV, 1898, page 401.

<sup>2)</sup> Oeuvres complètes de Laplace, Tome IX, pages 5—68.



déterminée de  $x$  et de  $y$ ) et dont on obtient l'intégrale générale par l'intégration successive de deux équations différentielles linéaires du premier ordre. Si l'équation (1) admet une intégrale de la forme (5), on peut de la même manière, par l'application de la transformation (7)  $r$  fois au plus, ramener l'intégration de l'équation (1) à l'intégration de deux équations différentielles linéaires du premier ordre. Mais si l'équation (1) n'admet pas une solution de la forme (4) ou (5), la méthode de Laplace ne réussit pas.

L'équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre

$$(10) \quad A \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + D \frac{\partial z}{\partial x} + E \frac{\partial z}{\partial y} + Fz = 0,$$

où  $A, B, C, D, E, F$  sont des fonctions de  $x$  et de  $y$ , peut, si l'équation admet deux systèmes de caractéristiques distincts, être ramenée à une équation du type (1), en effectuant un changement de variables indépendantes. Les caractéristiques de l'équation (10) sont

$$f(x, y) = \text{const.}, \text{ où } A \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + B \frac{df}{dx} \frac{df}{dy} + C \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 = 0;$$

on dit aussi que  $f(x, y)$  est une variable caractéristique; la condition nécessaire et suffisante pour que les deux systèmes de caractéristiques ne coïncident pas, est  $B^2 - 4AC \neq 0$ . Si  $B^2 - 4AC = 0$ , on peut, en faisant un changement de variables indépendantes, ramener l'équation (10) à la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0$$

et pour que l'équation (10) admette une intégrale de la forme d'Euler, on doit avoir  $b = 0$ . Mais pour reconnaître si l'équation (10) est intégrable par la méthode de Laplace, il n'est pas nécessaire de faire un changement de variables indépendantes. LEGENDRE <sup>1)</sup> a donné une méthode, analogue à celle de Laplace, qu'on peut appliquer directement à l'équation (10). Pour que l'équation (10) soit intégrable par la méthode de Laplace (Legendre), il faut et il suffit que l'équation admette une intégrale de la forme d'Euler. L'avantage du procédé de Legendre est qu'il permet de reconnaître si l'équation est intégrable sans effectuer la détermination des caractéristiques. Si l'équation (10) admet une intégrale de la forme d'Euler, on peut, après avoir déterminé les caractéristiques, ramener l'intégration de l'équation à des quadratures; on obtient pour l'intégrale générale une expression dans laquelle une fonction arbitraire figure sous des signes de quadrature qu'il est impossible de faire disparaître, si l'équation n'admet pas deux intégrales de la forme d'Euler.

IMSCHENETSKY <sup>2)</sup> a depuis présenté le procédé de Legendre sous une forme très

<sup>1)</sup> Histoire de l'Académie des Sciences de Paris, 1787: Mémoire sur l'intégration de quelques équations aux différences partielles, § IV, pages 319—323.

<sup>2)</sup> Grunert's Archiv der Mathematik und Physik, Bd. 54, 1872: Intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction de deux variables, §. 11. Traduit du russe: Mémoire de Kasan 1868.

simple. — IMSCHENETSKY <sup>1)</sup> a aussi donné une extension de la méthode de Laplace à l'équation

$$(11) \quad Gs + Hp + K = 0,$$

$G, H, K$  étant des fonctions de  $q, z, x, y$ ; la désignation  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \frac{\partial z}{\partial x} = p, \frac{\partial z}{\partial y} = q$  étant employée. IMSCHENETSKY applique à l'équation (11) la transformation

$$(12) \quad z_1 = F(q, z, x, y),$$

où  $F(q, z, x, y)$  satisfait à l'équation  $G \frac{\partial F}{\partial z} = H \frac{\partial F}{\partial q}$ . L'équation (11) peut se mettre sous la forme

$$z_1 = F(q, z, x, y), \quad p_1 = \frac{\partial F}{\partial x} - \mu K,$$

la désignation  $\mu = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{H} = \frac{\frac{\partial F}{\partial q}}{G}$ ,  $p_1 = \frac{\partial z}{\partial x}$ , étant employée. Ecrivons

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \mu K = F_1(q, z, x, y).$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F_1}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial F_1}{\partial z} = 0$$

est la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (11) admette une intégrale intermédiaire du premier ordre dépendant d'une fonction arbitraire de  $y$ . Si

$$\frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F_1}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial F_1}{\partial z} = 0,$$

on obtient l'intégrale générale de l'équation (11) par l'intégration successive de deux équations différentielles du premier ordre. Si

$$\frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F_1}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial F_1}{\partial z} \neq 0,$$

les équations

$$z_1 = F(q, z, x, y), \quad p_1 = F_1(q, z, x, y)$$

peuvent être résolues par rapport à  $z$  et à  $q$ , et l'on obtient les équations

$$z = f(p_1, z_1, x, y), \quad q = f_1(p_1, z_1, x, y);$$

l'élimination de  $z$  entre ces deux équations conduit à l'équation

$$(13) \quad \frac{\partial f}{\partial p_1} s_1 + \frac{\partial f}{\partial z_1} q_1 + \frac{\partial f}{\partial y} - f_1 = 0,$$

la désignation  $s_1 = \frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y}$ ,  $q_1 = \frac{\partial z_1}{\partial y}$  étant employée. Les deux équations (11) et (13) peuvent être intégrées en même temps; de toute solution de l'une des équations on obtient

<sup>1)</sup> Même ouvrage, §. 9.

sans intégration une solution de l'autre équation. Comme l'équation (13) est linéaire par rapport à  $s_1$  et à  $q_1$ , il existe toujours une transformation d'Imschenetsky de la forme  $u = \varphi(p_1, z_1, x, y)$  qui peut être appliquée à l'équation (13), mais comme cette transformation conduit de nouveau à l'équation proposée, elle est sans intérêt. Pour pouvoir appliquer la transformation (12) d'Imschenetsky à l'équation (13), il faut que l'équation (13) soit linéaire par rapport à  $s_1$  et à  $p_1$ . Ce n'est donc que dans des cas exceptionnels qu'on peut appliquer la transformation (12) d'Imschenetsky plusieurs fois à une équation (11). Supposons que l'équation (13) soit linéaire par rapport à  $s_1$  et à  $p_1$ . Il se peut que l'équation (13) admette une intégrale intermédiaire du premier ordre dépendant d'une fonction arbitraire de  $y$ ; sinon on peut appliquer la transformation (12) d'Imschenetsky à l'équation (13). On peut continuer de cette manière, jusqu'à ce qu'on obtienne éventuellement une équation qui admet une intégrale intermédiaire du premier ordre et dont on peut ramener l'intégration à l'intégration de deux équations différentielles du premier ordre, ou qu'on obtienne éventuellement une équation à laquelle on ne peut plus appliquer la transformation (12) d'Imschenetsky. Dans le dernier cas, la méthode d'Imschenetsky ne réussit pas. Ainsi la méthode d'Imschenetsky consiste à ramener — par l'application répétée de la transformation (12) — une équation (11) qui n'admet pas d'intégrale intermédiaire du premier ordre dépendant d'une fonction arbitraire de  $y$  à une équation de même type qui admet une intégrale intermédiaire de cette espèce. Lorsque l'équation (11) est de la forme (1), les transformations d'Imschenetsky sont évidemment identiques à celles de Laplace <sup>1)</sup> <sup>2)</sup>. —

<sup>1)</sup> Aussi d'autres équations du type (11) ont été intégrées, antérieurement à Imschenetsky, en appliquant des transformations en effet identiques à celles d'Imschenetsky. Je cite par exemple l'équation  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{kz}$ ,  $k$  étant une constante, intégrée par J. Liouville (Voir: GOURSAT, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre, T. I, page 97).

<sup>2)</sup> Il me semble que les transformations d'Imschenetsky méritent d'être examinées de plus près. En effet, si l'équation (11) peut être ramenée par  $m$  transformations (12) à une équation qui admet une intégrale intermédiaire du premier ordre, l'on obtient pour l'équation (11) une intégrale de la forme  $z = \varphi(x, y, X, X', \dots, X^{(m)})$ , où  $\varphi$  est une fonction déterminée des arguments, et il existe une équation de la forme

$$\Phi \left( \frac{\partial^{m+1} z}{\partial y^{m+1}}, \frac{\partial^m z}{\partial y^m}, \dots, \frac{\partial z}{\partial y}, z, x, y \right) = Y$$

qui forme un système en involution avec l'équation (11). Et si l'équation (11) admet une solution de la forme  $z = \varphi(x, y, X, X', \dots, X^{(m)})$ , on obtient, en appliquant la transformation (12)  $m$  fois au plus, une équation qui admet une intégrale intermédiaire du premier ordre dépendant d'une fonction arbitraire de  $y$ . Il en suit que, par la méthode d'Imschenetsky, l'intégration de l'équation (11) peut être ramenée à l'intégration de deux équations différentielles du premier ordre, pourvu que l'équation (11) admette une intégrale de la forme  $z = \varphi(x, y, X, X', \dots, X^{(m)})$ . Si l'équation (11) n'admet pas d'intégrale de la forme  $z = \varphi(x, y, X, X', \dots, X^{(m)})$ , la méthode ne réussit pas. Il serait intéressant d'examiner quelle forme l'équation (11) prend pour admettre une solution de la forme  $z = \varphi(x, y, X, X', \dots, X^{(m)})$ , autrement dit à quelles conditions  $G, H, K$  doivent satisfaire pour que l'équation (11) puisse être ramenée par  $m$  transformations (12) à une équation qui admet une intégrale intermédiaire du premier ordre. — Les transformations d'Imschenetsky sont très peu mentionnées dans la littérature. GOURSAT (Leçons, T. II, page 263) en parle, il est vrai, mais sans motiver leur emploi et sans indiquer leur rapport à la méthode de Laplace. FORSYTH (Theory of



TEIXEIRA <sup>1)</sup> a depuis essayé d'étendre la méthode d'Imschenetsky à l'équation

$$A \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + D = 0,$$

où  $A, B, C, D$  sont des fonctions de  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, z, x, y$ .

MOUTARD a traité un problème qui a beaucoup de rapport à la méthode de Laplace. Dans un Mémoire, présenté à l'Académie des Sciences de Paris 1870 <sup>2)</sup>, MOUTARD a examiné quelles sont les équations de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, z, x, y\right)$$

pour lesquelles l'intégrale générale est de la forme

$$z = F(x, y, X, X', \dots X^{(m)}, Y, Y', \dots Y^{(r)}),$$

où  $F$  est une fonction déterminée des arguments. Dans ce Mémoire MOUTARD a montré que les seules équations de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, z, x, y\right),$$

susceptibles d'admettre une intégrale générale de cette espèce et qui ne sont réduites par un changement de variables ni à l'équation (1), ni à l'équation de J. Liouville  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^z$ , sont toutes — à l'exception de deux cas très simples — réductibles à la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(Ae^z) - \frac{\partial}{\partial y}(Be^{-z}),$$

où  $A$  et  $B$  sont des fonctions de  $x$  et de  $y$ , assujetties elles-mêmes à vérifier certaines conditions (Le théorème de Moutard). L'intégration de la dernière équation est ramenée à dépendre uniquement de l'intégration de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + ABz,$$

laquelle est de la forme (1). Ainsi le problème est réduit à l'équation (1). Ensuite MOUTARD a montré comment on peut construire l'équation la plus générale de la

Differential Equations, Part IV) ne les mentionne pas du tout. J. HAGEN (Synopsis der hoeheren Mathematik, Bd III, page 425) écrit quant à la transformation d'Imschenetsky appliquée à l'équation (11): »Seine Substitution erfordert eine Quadratur. In den neuen Veränderlichen nimmt die Gleichung wieder die Gestalt der ursprünglichen Gleichung an. Die Substitution kann daher wiederholt werden, bis man auf eine Gleichung stösst, welche die Integrationsbedingen erfüllt». Tous les points sont faux.

<sup>1)</sup> Comptes Rendus, T. XCIII, 1881, page 702. Bulletin de l'Académie de Belgique, 3<sup>ème</sup> série, T. III 1882, pages 486—498.

<sup>2)</sup> Voir Comptes Rendus, T. LXX, 1870, pages 1068—1070.

forme (1) pour laquelle l'intégrale générale est de l'espèce considérée. Mais le Mémoire original de Moutard a disparu en 1871, et ce n'est que l'Introduction <sup>1)</sup>, dans laquelle le contenu est indiqué et où les résultats nommés ci-dessus sont exposés (quoique non démontrés <sup>2)</sup>), et la troisième Partie <sup>3)</sup> relative à l'équation spéciale

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + cz = 0$$

qui ont été publiées.

Plus tard DARBOUX a repris l'étude de la méthode de Laplace appliquée à l'équation (1). Dans ses études très belles et très complètes, DARBOUX <sup>4)</sup> a notablement perfectionné et simplifié la méthode. Aujourd'hui la méthode de Laplace est ordinairement reproduite d'après DARBOUX <sup>5)</sup>. C'est aussi des notations de Darboux que je me suis servi.

DARBOUX a montré la propriété d'invariants des fonctions

$$h = \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c, \quad k = \frac{\partial b}{\partial y} + ab - c.$$

Les fonctions  $h$  et  $k$  ne changent pas, si l'on effectue la substitution  $z = \lambda \bar{z}$ ,  $\lambda$  étant une fonction quelconque de  $x$  et de  $y$ . Et si l'on fait le changement de variables  $x = \varphi(\bar{x})$ ,  $y = \psi(\bar{y})$ , les fonctions  $h$  et  $k$  ne subissent pas d'autre changement qu'une multiplication par le facteur  $\varphi'(\bar{x})\psi'(\bar{y})$ . En appliquant les transformations de Laplace à l'équation (1), les invariants des équations transformées ne dépendent que des invariants  $h$  et  $k$ . Les invariants  $h_1$  et  $k_1$  de l'équation (9) sont

$$h_1 = 2h - k - \frac{\partial^2 \log h}{\partial x \partial y}, \quad k_1 = h;$$

et les invariants  $h_{-1}$  et  $k_{-1}$  de l'équation en  $z_{-1}$  sont

$$k_{-1} = 2k - h - \frac{\partial^2 \log k}{\partial x \partial y}, \quad h_{-1} = k.$$

Ainsi pour reconnaître si l'équation (1) est intégrable par la méthode de Laplace, il n'est pas nécessaire de former les deux séries d'équations qu'on obtient par l'application répétée des transformations de Laplace à l'équation (1); on peut au lieu de cela calculer de proche en proche les invariants des équations

<sup>1)</sup> Comptes Rendus, T. LXX, 1870, pages 834—838. Imprimée depuis dans le Journal de l'Ecole Polytechnique, Cahier 56, 1886, pages 1—5.

<sup>2)</sup> Le théorème de Moutard a été depuis démontré par Cosserat dans: DARBOUX, Leçons sur la théorie générale des surfaces, Partie IV, pages 405—422. Voir aussi: FORSYTH, Theory of Differential Equations, Part IV, Ch. XV. — Le théorème de Moutard peut aussi être démontré à l'aide des transformations d'Imschenetsky.

<sup>3)</sup> Journal de l'Ecole Polytechnique, Cahier 45, 1878, pages 1—11.

<sup>4)</sup> DARBOUX, Leçons sur la théorie générale des surfaces. Partie II. Livre IV. Ch. II—IX pages 23—218.

<sup>5)</sup> Voir: GOURSAT, Leçons. T. II, pages 1—39.

FORSYTH, Theory of Differential Equations. Part IV. Vol. VI. pages 39—158.

$$h_1, h_2, h_3, \dots, k_{-1}, k_{-2}, k_{-3}, \dots$$

en partant des invariants  $h$  et  $k$  et en employant les formules de récurrence :

$$\begin{cases} h_{i+1} + h_{i-1} = 2h_i - \frac{\partial^2 \log h_i}{\partial x \partial y}, & (i \geq 0) \\ k_{i+1} = h_i \end{cases}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) soit intégrable par la méthode de Laplace est que, dans ces séries d'invariants, il y ait un invariant qui est nul. L'équation (1) admet une intégrale de la forme (4), si  $h_m = 0$ , et une intégrale de la forme (5), si  $k_{-r} = 0$ .

DARBOUX a fait avec succès des études approfondies sur les équations (1) dont la méthode de Laplace fournit l'intégrale générale. Il a donné la forme générale des équations (1) qui admettent une intégrale de la forme d'Euler et des équations (1) qui admettent une intégrale du type (4) et une intégrale du type (5). Ce dernier problème avait déjà été résolu par MOUTARD, mais, comme je l'ai dit, son manuscrit ayant été détruit, on ne sait comment il a résolu le problème.

Ensuite DARBOUX a étudié la relation entre les intégrales de l'équation (1) et de l'équation adjointe

$$(14) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial x}(au) - \frac{\partial}{\partial y}(bu) + cu = 0$$

et montré que si l'intégrale générale de l'une des équations (1) et (14) s'obtient par la méthode de Laplace, on peut de cette intégrale directement déduire l'intégrale générale de l'autre équation. — R. LIOUVILLE<sup>1)</sup> avait déjà indiqué la propriété remarquable des deux équations (1) et (14), à savoir qu'elles ont les mêmes invariants mais en ordre inverse, et que les deux équations peuvent être intégrées en même temps par la méthode de Laplace ; si l'une des équations est ramenée, en appliquant la transformation (6)  $m$  fois, à une équation qui admet une intégrale de la forme  $\alpha X$ , l'autre équation est ramenée, en appliquant la transformation (7)  $m$  fois, à une équation qui admet une intégrale de la forme  $\beta Y$ . — Par là j'ai seulement cité quelques-uns des résultats les plus importants qu'a obtenus DARBOUX et qui nous intéressent ici par leur rapport à la méthode de Laplace.

La méthode de Laplace a été très simplifiée par l'emploi de la notation des invariants, mais aussi le calcul des invariants  $h_1, h_2, h_3, \dots, k_{-1}, k_{-2}, k_{-3}, \dots$  peut être très compliqué. Pour cela on a essayé de trouver des critères plus simples pour constater que l'équation (1) admet une intégrale de la forme d'Euler. Le critérium qui a la plus grande importance est celui de Goursat.

GOURSAT<sup>2)</sup> a montré que si l'équation (1) admet  $m + 2$  intégrales entre lesquelles il n'existe aucune relation linéaire et homogène à coefficients constants, mais

<sup>1)</sup> Journal de l'Ecole Polytechnique, Cahier 56, 1886: Formes intégrables des équations linéaires du second ordre, IV, pages 49—50.

<sup>2)</sup> American Journal of Mathematics, Vol. XVIII, 1896: Sur les équations linéaires et la méthode de Laplace, pages 347—364. De même: GOURSAT, Leçons. T. II, Chap. V, pages 21—31.



une relation linéaire et homogène dont les coefficients sont des fonctions de  $x$ , l'équation (1) admet une solution de la forme

$$\alpha_0 X^{(m)} + \alpha_1 X^{(m-1)} + \dots + \alpha_{m-1} X' + \alpha_m X.$$

Si l'on compare la méthode de Laplace (Legendre) pour intégrer l'équation (10) à la méthode générale de Darboux <sup>1)</sup> pour intégrer l'équation

$$(15) \quad F \left[ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, z, x, y \right] = 0,$$

appliquée à l'équation (10), l'on trouve que les deux méthodes réussissent en même temps, c'est-à-dire elles donnent l'intégrale générale des équations (10) qui admettent une intégrale de la forme d'Euler <sup>2)</sup>. En effet, la méthode de Laplace (Legendre) et celle de Darboux, appliquée à l'équation (10), ont toutes deux pour but de trouver une intégrale intermédiaire dépendant d'une fonction arbitraire, c'est-à-dire de former une équation contenant une fonction arbitraire et telle que toutes les intégrales de l'équation (10) soient aussi des intégrales de cette équation. En d'autres termes, les deux méthodes s'appliquent avec succès à l'équation (10), s'il existe une équation avec une fonction arbitraire qui forme un système en involution avec l'équation proposée pour toutes les formes possibles de la fonction arbitraire <sup>3)</sup>. La méthode de Laplace mène plus directement au but. Comme la méthode de Darboux donne toutes les intégrales explicites <sup>4)</sup> dépendant d'une fonction arbitraire, chaque intégrale explicite dépendant d'une fonction arbitraire de l'équation (10) est une intégrale de la forme d'Euler.

Des méthodes qui servent à reconnaître si l'équation (10) est intégrable par la méthode de Laplace (Legendre) sont d'importance non seulement pour l'équation (10) et pour les équations dont l'intégration peut être ramenée à l'intégration d'une équation du type (10), mais aussi pour l'équation générale aux dérivées partielles du second ordre, en tant qu'il s'agit de reconnaître si la méthode de Darboux fournit l'intégrale générale de l'équation (15). DARBOUX <sup>4)</sup> a montré que si sa méthode fournit l'intégrale générale de l'équation (15), l'équation auxiliaire

<sup>1)</sup> Pour la première fois donnée dans Comptes Rendus, T. LXX, 1870, pages 675—678, 746—749; Annales de l'École normale, T. VII, 1870, pages 163—173.

Voir: GOURSAT, Leçons. T. II, Chap. VII.

FORSYTH, Theory of Differential Equations, Part. IV, Ch. XVIII.

<sup>2)</sup> GOURSAT, Leçons. T. II, Chap. VII, pages 174—182.

<sup>3)</sup> Une intégrale explicite dépendant d'une fonction arbitraire est de la forme

$$\begin{cases} x = F_1(\alpha, f(\alpha), f'(\alpha), \dots, f^{(m)}(\alpha), \beta), \\ y = F_2(\alpha, f(\alpha), f'(\alpha), \dots, f^{(m)}(\alpha), \beta), \\ z = F_3(\alpha, f(\alpha), f'(\alpha), \dots, f^{(m)}(\alpha), \beta), \end{cases}$$

où  $f$  désigne la fonction arbitraire, c'est-à-dire  $x, y, z$  s'expriment par des fonctions déterminées de deux variables auxiliaires  $\alpha, \beta$ , d'une fonction arbitraire de  $\alpha$  et de ses dérivées en nombre fini.

<sup>4)</sup> DARBOUX, Leçons, Partie IV, Note XI. De même: GOURSAT, Leçons. T. II, Note I, pages 334—336.

$$\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}} \frac{\partial^2 z'}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}} \frac{\partial^2 z'}{\partial x \partial y} + \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}} \frac{\partial^2 z'}{\partial y^2} + \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial z}{\partial x}} \frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial z}{\partial y}} \frac{\partial z'}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} z' = 0,$$

qui est du type (10),  $z'$  étant la variable indépendante, est intégrable par la méthode de Laplace (Legendre) <sup>1)</sup>.

Il est naturel d'essayer d'étendre la méthode de Laplace et les recherches en relation avec celle-ci faites sur l'équation linéaire du second ordre aux équations linéaires d'un ordre supérieur. Deux essais dans ce sens ont déjà été faits.

LE ROUX <sup>2)</sup> a essayé d'étendre la méthode de Laplace à l'équation linéaire d'ordre  $n$ :

$$(16) \quad \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} A_{ij} \frac{\partial^{i+j} z}{\partial x^i \partial y^j} = 0,$$

les coefficients  $A_{ij}$  étant des fonctions de  $x$  et de  $y$ . Les caractéristiques de l'équation (16) sont

$$f_i(x, y) = \text{const.}, \text{ où } \frac{\partial f_i}{\partial x} + u_i \frac{\partial f_i}{\partial y} = 0, (i = 1, 2, \dots, n)$$

$u_i (i = 1, 2, \dots, n)$  étant les  $n$  racines de l'équation

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i A_{i, n-i} u^i = 0;$$

on dit aussi que  $f_i(x, y)$  est une variable caractéristique. Par un changement de variables indépendantes on peut faire disparaître le terme en  $\frac{\partial^n z}{\partial x^n}$ . Ainsi on peut, sans diminuer la généralité, supposer  $A_{n0} = 0$ .  $x$  est alors une variable caractéristique et l'équation (16) s'écrit

$$(16') \quad \varphi_p \frac{\partial^p z}{\partial x^p} + \varphi_{p-1} \frac{\partial^{p-1} z}{\partial x^{p-1}} + \dots + \varphi_1 \frac{\partial z}{\partial x} + \varphi_0 z = 0,$$

où  $\varphi_i = \sum_{j=0}^{n-i} A_{ij} \frac{\partial^j}{\partial y^j} (i = 0, 1, \dots, p); p \leq n-1$ . Si l'équation (16') admet une intégrale de la forme (4),  $\alpha_0$  doit être une intégrale de l'équation  $\varphi_p \alpha = 0$ . En partant de la supposition que le caractère essentiel de la transformation de Laplace qui correspond à la variable caractéristique  $x$  soit qu'elle ramène l'intégrale (4) à une intégrale de même type qui ne contient plus les dérivées de  $X$  que jusqu'à l'ordre  $m-1$  au plus, LE ROUX considère chaque transformation du type

<sup>1)</sup> De cette façon l'on peut souvent trouver quelle forme une équation doit avoir pour être intégrable par la méthode de Darboux. Je cite comme exemple l'équation  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(z)$ , examinée par Lie [Voir GOURSAT, Leçons. T. II, pages 182—186.]; le problème est résolu beaucoup plus facilement en comparant l'équation à l'équation auxiliaire.

<sup>2)</sup> Bulletin de la Société Mathématique de France, T. 27, 1899, pages 237—262: Extension de la méthode de Laplace aux équations linéaires aux dérivées partielles d'ordre supérieur au second.

$$(17) \quad \theta_1 = \alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{z}{\alpha_0} \right), \text{ où } \varphi_p \alpha_0 = 0,$$

comme une transformation de Laplace à l'équation (16'), les transformations (17) étant les plus simples qui puissent avoir le caractère essentiel en question. LE ROUX considère aussi la transformation complètement déterminée

$$(18) \quad \theta = \varphi_p z$$

comme une transformation de Laplace correspondant à la variable caractéristique  $x$ , parce que la transformation (18) est composée de transformations du type (17). — Lorsque  $A_{pj} = 0$  ( $j = 1, 2, \dots, n - p$ ), la transformation (18) est réduite à  $\theta = A_{p0} z$ , et l'équation (16') n'admet pas d'intégrale du type (4). — LE ROUX forme de la même manière les transformations de Laplace qui correspondent aux autres systèmes de caractéristiques. LE ROUX a trouvé que l'application d'une transformation (17) à l'équation (16') conduit ordinairement, non à une équation de même type, mais à un système de plusieurs équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur à  $n$ ; et par l'application répétée de la transformation en question on serait de règle conduit à un système d'équations très compliqué.

PISATI <sup>1)</sup> a plus tard montré que, parmi les équations (16'), ce n'est en général que l'équation

$$(19) \quad \varphi_1 \frac{\partial z}{\partial x} + \varphi_0 z = 0, \text{ où } \varphi_1 = \sum_{j=0}^{n-1} A_{1j} \frac{\partial^j}{\partial y^j}; \varphi_0 = \sum_{j=0}^n A_{0j} \frac{\partial^j}{\partial y^j},$$

qui est ramenée par la transformation (17) à une équation de même type et de même ordre au plus. De plus, PISATI a prouvé que si l'équation (19) admet  $m + 1$  intégrales entre lesquelles il n'existe aucune relation linéaire et homogène à coefficients constants, mais une relation linéaire et homogène dont les coefficients sont des fonctions de  $x$ , on obtient, en appliquant la transformation

$$\theta = \varphi_1 z$$

$m - 1$  fois (doit être:  $m - 1$  fois au plus) de suite, une équation qui admet une intégrale de la forme  $\alpha X$ . (Pisati a exclu le cas où  $A_{1, n-1} = 0$ , mais la thèse est valable pour ce cas aussi.) Pour l'équation

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + A_{11} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + A_{10} \frac{\partial z}{\partial x} + A_{02} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + A_{01} \frac{\partial z}{\partial y} + A_{00} z = 0,$$

PISATI a défini les fonctions des coefficients qui ne changent pas avec la substitution  $z = \lambda \bar{z}$ ; PISATI a aussi donné les conditions que ces invariants doivent vérifier pour que l'équation admette une ou deux intégrales de la forme  $\alpha X$ .

C'est l'équation (19) que j'ai étudiée de plus près — d'ailleurs indépendamment

<sup>1)</sup> Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, T. 20, 1905, pages 344—374: Sulla estensione del metodo di Laplace alle equazioni differenziali lineari di ordine qualunque con due variabili indipendenti.



du mémoire de PISATI, qui ne m'est parvenu qu'en 1908 — et j'ai trouvé que presque tous les résultats obtenus par DARBOUX pour l'équation (1) peuvent être étendus à l'équation (19).

Pour l'équation (19) d'ordre  $n$ , il existe, si  $A_{1, n-1} \neq 0$ , deux systèmes de caractéristiques distincts:

$$x = \text{const.}$$

est un système de caractéristiques multiple d'ordre  $n - 1$  et

$$f(x, y) = \text{const.}, \text{ où } A_{1, n-1} \frac{\partial f}{\partial x} + A_{0, n} \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

est un système de caractéristiques simple; si  $A_{1, n-1} = 0$ ,

$$x = \text{const.}$$

est un système de caractéristiques multiple d'ordre  $n$ . Dans mes recherches j'ai traité à part le cas où tous les systèmes de caractéristiques coïncident et celui où  $n - 1$  seuls coïncident.

S'il y a deux systèmes de caractéristiques distincts, nous pouvons en effectuant un changement de variables indépendantes choisir les nouvelles variables indépendantes de la manière que  $y$  sera une variable caractéristique simple et  $x$  une variable caractéristique d'ordre  $n - 1$ , et l'équation (19) pourra s'écrire:

$$(20) \quad \begin{cases} \sum_{i=0}^q \left( A_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \right) = 0, \\ A_q = 1, \quad q + 1 = n, \end{cases}$$

où  $A_i, B_i$  sont des fonctions de  $x$  et de  $y$ . L'équation (20) a été l'objet de recherches dans les quatre premiers chapitres.

Dans le chapitre premier, je donne un exposé de la méthode de Laplace étendue à l'équation (20). La méthode de Laplace appliquée à l'équation (20) doit être une méthode pour reconnaître si l'équation (20) admet une intégrale de la forme d'Euler, et dans ce cas une méthode qui permet de déterminer cette intégrale ou ces intégrales. Lorsque l'équation (20) admet une intégrale de la forme d'Euler, celle-ci doit être ou du type (4) ou du type (5); l'équation ne peut admettre que  $q$  intégrales distinctes du type (4) et seulement une intégrale du type (5). D'après LE ROUX, il y a deux transformations de Laplace complètement déterminées: la transformation

$$(21) \quad z_q = \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i},$$

qui correspond au système de caractéristiques multiple  $x = \text{const.}$ , et la transformation

$$(21') \quad \theta = \frac{\partial z}{\partial x} + B_q z,$$

qui correspond au système de caractéristiques simple  $y = \text{const.}$  — Si l'on applique la transformation (21) à l'équation (20), on obtient des résultats qui sont tout à fait analogues à ceux obtenus pour la transformation (6)

appliquée à l'équation (1), et on a le droit de considérer la transformation (21) comme une transformation de Laplace à l'équation (20). Si l'équation (20) admet une intégrale de la forme (4), on obtient, en appliquant la transformation (21)  $m$  fois au plus, une équation de même type et de même ordre qui admet une intégrale de la forme  $\alpha X$ , et l'ordre de l'équation transformée peut être immédiatement diminué d'une unité. Chaque intégrale du type (4) peut être obtenue en appliquant la transformation (21) un nombre suffisant de fois; pour obtenir les intégrales du type (4), il ne faut que l'intégration d'équations différentielles linéaires du premier ordre (en cas exceptionnel d'ordre supérieur). Lorsque l'équation (20) admet  $s$  intégrales distinctes du type (4), l'intégration de l'équation (20) peut être ramenée, par l'application répétée de la transformation (21), à l'intégration d'une équation du type (20) et d'ordre  $n - s$  et à l'intégration d'équations différentielles linéaires. — Si l'on applique la transformation (21') à l'équation (20),  $\theta$  est de règle déterminée par  $n - 1$  équations linéaires aux dérivées partielles d'ordre  $2(n - 1)$ , et une application répétée de la transformation en question amènerait de règle un système compliqué d'équations. Mais j'ai trouvé une transformation linéaire

$$(22) \quad z - q = \sum_{i=0}^{q-1} \left( T_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + U_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \right),$$

où  $T_i$  et  $U_i$  sont des fonctions complètement déterminées des coefficients de l'équation (20), laquelle est analogue à la transformation (7) de Laplace. En appliquant la transformation (22) à l'équation (20), on est conduit à une équation de même type et de même ordre, pourvu que l'équation (20) ne soit pas de la forme

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \gamma \sum_{i=0}^{q-1} \left( T_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + U_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \right) \right] = 0,$$

$\gamma$  étant une fonction de  $x$  et de  $y$ . Et si l'équation (20) est de cette dernière forme, l'ordre de l'équation peut être immédiatement diminué d'une unité. Lorsque l'équation (20) admet une intégrale du type (5), on obtient celle-ci à l'aide de la transformation (22) et par l'intégration d'équations différentielles linéaires de règle du premier ordre. La transformation (22) est inverse à la transformation (21), de même que la transformation (7) est inverse à la transformation (6). C'est la transformation (22) qui doit être considérée comme la transformation de Laplace complètement déterminée correspondant au système de caractéristiques  $y = \text{const.}$  — Je désigne l'équation (20) par la lettre  $(E)$ . Par l'application répétée de la transformation (21) à l'équation (20), on obtient une série d'équations de même type et d'ordre  $n$  au plus; ces équations sont désignées par  $(E_1)$ ,  $(E_2)$ ,  $(E_3)$ , .... Et par l'application répétée de la transformation (22) à l'équation (20), on obtient une série d'équations de même type et d'ordre  $n$  au plus; ces équations sont désignées par  $(E_{-1})$ ,  $(E_{-2})$ ,  $(E_{-3})$ , .... — En examinant le rapport qu'il y a entre l'équation (20) et l'équation adjointe



$$(23) \quad \sum_{i=0}^q \left( \frac{1}{x} - 1 \right)^{i+1} \left[ \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} (A_i u) - \frac{\partial^i}{\partial y^i} (B_i u) \right] = 0,$$

j'ai obtenu des résultats qui renferment ceux obtenus pour les équations (1) et (14). La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (20) admette une intégrale du type (5) est que l'équation adjointe (23) admette  $q$  intégrales distinctes du type (4); si l'équation (23) admet  $q$  intégrales distinctes

$$\alpha_{0i} X_i^{(m_i)} + \alpha_{1i} X_i^{(m_i-1)} + \dots + \alpha_{m_i-1,i} X_i' + \alpha_{m_i,i} X_i, \quad (i = 1, 2, \dots, q)$$

$X_i$  étant des fonctions arbitraires de  $x$  et  $\alpha_{0i}, \alpha_{1i}, \dots, \alpha_{m_i-1,i}, \alpha_{m_i,i}$  des fonctions déterminées de  $x$  et de  $y$ , l'équation (20) admet une intégrale de la forme

$$\beta_0 Y^{(r)} + \beta_1 Y^{(r-1)} + \dots + \beta_{r-1} Y' + \beta_r Y, \quad \text{où } r = \sum_{i=1}^q m_i.$$

Lorsque l'équation adjointe (23) admet  $s$  intégrales distinctes du type (4), l'on peut par l'application répétée de la transformation (22) diminuer l'ordre de l'équation (20) de  $s$  unités. Si l'une des équations (20) et (23) admet une intégrale du type (5) et que, par conséquent, l'autre équation admette  $q$  intégrales distinctes du type (4), l'intégration de l'équation (20) et de l'équation (23) peut être ramenée par la méthode de Laplace à l'intégration d'équations différentielles linéaires. Aussi dans d'autres cas, l'intégration des équations (20) et (23) peut être ramenée par la méthode de Laplace à l'intégration d'équations différentielles linéaires; une condition nécessaire (pas suffisante) pour ceci est que l'équation (20) admette  $s$  intégrales distinctes du type (4) et que l'équation (23) admette au moins  $q - s$  intégrales distinctes du type (4); la condition nécessaire et suffisante est donnée dans la proposition 12. — Lorsque l'équation (20) admet une intégrale de la forme d'Euler, il existe pour l'équation adjointe (23) une intégrale intermédiaire dépendant d'une fonction arbitraire. La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (20) admette une intégrale de la forme (4) est que l'équation (23) admette une intégrale intermédiaire de la forme

$$\sum_{j=0}^{q-1} \sum_{i=0}^{m+1} a_{ij} \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} = X,$$

où les coefficients  $a_{ij}$  sont des fonctions de  $x$  et de  $y$ ; toute intégrale de l'équation (23) est aussi intégrale de cette équation. Et la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (20) admette une intégrale de la forme (5) est que l'équation (23) admette une intégrale intermédiaire de la forme

$$\sum_{i=0}^{q+r} b_i \frac{\partial^i u}{\partial y^i} = Y,$$

où les coefficients  $b_i$  sont des fonctions de  $x$  et de  $y$ .

Dans le chapitre II, j'ai défini  $2q$  fonctions des coefficients de l'équation (20) qui forment un système complet d'invariants. Deux équations qui admettent les



mêmes valeurs des invariants qui forment un système complet peuvent se ramener l'une à l'autre par la substitution  $z = \lambda \bar{z}$ . J'ai donné les relations que les invariants doivent vérifier pour que l'équation (20) admette  $s$  intégrales distinctes  $\alpha_i X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ), de même les relations que les invariants doivent vérifier pour que l'équation adjointe (23) admette  $s$  intégrales distinctes  $\alpha_i X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ). Ensuite j'ai donné les relations qu'il y a entre les invariants de l'équation (20) et ceux de l'équation  $(E_1)$ , quand celle-ci est d'ordre  $n$  et quand elle est d'ordre inférieur à  $n$ ; par là sont données aussi les relations qu'il y a entre les invariants de l'équation (20) et ceux de l'équation  $(E_{-1})$ . Ainsi il n'est pas nécessaire de former les équations  $(E_1)$ ,  $(E_2)$ ,  $(E_3)$ ,  $\dots$  et  $(E_{-1})$ ,  $(E_{-2})$ ,  $(E_{-3})$ ,  $\dots$  pour reconnaître si l'équation (20) ou l'équation (23) admettent une intégrale de la forme d'Euler. Au lieu de cela, on peut calculer les invariants des équations  $(E_1)$ ,  $(E_2)$ ,  $(E_3)$ ,  $\dots$ ,  $(E_{-1})$ ,  $(E_{-2})$ ,  $(E_{-3})$ ,  $\dots$  en partant des invariants de l'équation (20), mais cela sera ordinairement très compliqué. — Dans des cas spéciaux, on peut cependant aisément trouver les valeurs des invariants des équations  $(E_1)$ ,  $(E_2)$ ,  $\dots$ ,  $(E_{-1})$ ,  $(E_{-2})$ ,  $\dots$ . Comme exemple j'ai traité l'équation

$$\sum_{i=0}^q \left[ a_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + (b_i + c a_i y) \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \right] = 0, \quad (a_q = 1; b_q = 0; a_{q-1} = 0; c \neq 0)$$

où  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c$  sont des constantes; tous les invariants de cette équation sont des constantes. La condition nécessaire et suffisante pour que cette équation admette  $s$  intégrales distinctes du type (4) est que l'équation algébrique

$$\sum_{i=0}^q d_i (mc)^i = 0,$$

où les coefficients  $d_i$  sont des fonctions complètement déterminées des invariants de l'équation donnée et où  $m$  est la quantité inconnue, ait  $s$  racines qui sont des nombres entiers positifs (zéro inclusivement). Et la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation adjointe admette  $s$  intégrales distinctes du type (4) est que cette équation algébrique ait  $s$  racines qui sont des nombres entiers négatifs (zéro exclusivement). — Comme j'ai dit (page 11), PISATI a généralisé le critérium de Goursat. J'ai obtenu des résultats un peu plus complets. Si l'équation (20) admet  $m+1$  intégrales  $\zeta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m+1$ ) entre lesquelles il existe une relation, et une seule, de la forme

$$\zeta_{m+1} = \sum_{i=1}^m f_i(x) \zeta_i,$$

les  $m+1$  intégrales déterminent une équation de la forme

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i \frac{\partial^i \zeta}{\partial y^i} = 0,$$

les coefficients  $\lambda_i$  étant des fonctions de  $x$  et de  $y$ , laquelle forme un système en involution avec l'équation (20). On peut toujours supposer qu'il n'existe pas de relation de la forme

$$\sum_{i=1}^m c_i f_i(x) = c_{m+1},$$

$c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m+1$ ) étant des constantes. Les deux équations

$$\sum_{i=1}^q A_i \frac{\partial^i \zeta}{\partial y^i} = 0, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial^i \zeta}{\partial y^i} = 0$$

admettent au moins une solution commune. Si les deux équations admettent seulement une solution commune, l'équation (20) admet une intégrale de la forme

$$\alpha_0 X^{(m-1)} + \alpha_1 X^{(m-2)} + \dots + \alpha_{m-2} X' + \alpha_{m-1} X,$$

et cette intégrale peut être déduite directement des intégrales  $\zeta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m+1$ ).

Si les équations en question admettent  $s$  solutions distinctes en commun, l'équation (20) admet  $s$  intégrales distinctes du type (4), et ces intégrales sont de la forme

$$\alpha_{0i} X_i^{(m_i-1)} + \alpha_{1i} X_i^{(m_i-2)} + \dots + \alpha_{m_i-2, i} X_i' + \alpha_{m_i-1, i} X_i, \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

où  $\sum_{i=1}^s m_i = m$ .

Dans le chapitre III, j'ai examiné les équations (20) qui admettent  $n$  intégrales distinctes de la forme d'Euler. L'intégrale générale des équations en question est représentée par la formule

$$(24) \quad z = M \begin{vmatrix} X_1 & X_1' & \dots & X_1^{(m_1)} & X_2 & X_2' & \dots & X_2^{(m_2)} & \dots & X_q & X_q' & \dots & X_q^{(m_q)} & Y & Y' & \dots & Y^{(r)} \\ x_{11} & x_{11}' & \dots & x_{11}^{(m_1)} & x_{12} & x_{12}' & \dots & x_{12}^{(m_2)} & \dots & x_{1q} & x_{1q}' & \dots & x_{1q}^{(m_q)} & y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(r)} \\ x_{21} & x_{21}' & \dots & x_{21}^{(m_2)} & x_{22} & x_{22}' & \dots & x_{22}^{(m_2)} & \dots & x_{2q} & x_{2q}' & \dots & x_{2q}^{(m_q)} & y_2 & y_2' & \dots & y_2^{(r)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{h1} & x_{h1}' & \dots & x_{h1}^{(m_1)} & x_{h2} & x_{h2}' & \dots & x_{h2}^{(m_2)} & \dots & x_{hq} & x_{hq}' & \dots & x_{hq}^{(m_q)} & y_h & y_h' & \dots & y_h^{(r)} \end{vmatrix},$$

$h = r + q + \sum_{i=1}^q m_i$ ;  $x_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ) étant des fonctions déterminées de  $y$  et  $M$

une fonction déterminée de  $x$  et de  $y$ . Inversement, chaque expression de la forme (24), le coefficient de  $Y^{(r)}$  n'étant pas nul, représente l'intégrale générale d'une équation du type (20) et d'ordre  $n$  au plus; la condition nécessaire et suffisante pour qu'une expression de la forme (24), le coefficient de  $Y^{(r)}$  n'étant pas nul, soit l'intégrale générale d'une équation du type (20) et d'ordre  $n-s$  est qu'il existe  $s$  — et pas plus de  $s$  — relations distinctes de la forme

$$\sum_{i=1}^q f_i(x) \alpha_{0i} = 0,$$

$\alpha_{0i}$  étant les coefficients de  $X_i^{(m_i)}$  dans le déterminant (24). Si nous supposons que l'intégrale générale de l'équation (20) soit donnée sous la forme (24), l'on peut en déduire directement l'intégrale générale de l'équation  $(E_i)$  ( $i \leq 0$ ), du moins si l'équation  $(E_i)$  est d'ordre  $n$ ; aussi l'intégrale générale de l'équation adjointe (23) peut être déduite de l'intégrale (24).

Enfin dans le chapitre IV, j'ai examiné les équations (20) qui admettent une intégrale du type (5). L'intégrale générale des équations en question est représentée par la formule

$$(25) \quad \left| \begin{array}{cccccccccccc} \theta & \alpha_1 & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial^{m_1-1} \alpha_1}{\partial x^{m_1-1}} & \alpha_2 & \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial^{m_2-1} \alpha_2}{\partial x^{m_2-1}} & \dots & \alpha_q & \frac{\partial \alpha_q}{\partial x} & \dots & \frac{\partial^{m_q-1} \alpha_q}{\partial x^{m_q-1}} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x \partial y} & \dots & \frac{\partial^{m_1} \alpha_1}{\partial x^{m_1-1} \partial y} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x \partial y} & \dots & \frac{\partial^{m_2} \alpha_2}{\partial x^{m_2-1} \partial y} & \dots & \frac{\partial \alpha_q}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_q}{\partial x \partial y} & \dots & \frac{\partial^{m_q} \alpha_q}{\partial x^{m_q-1} \partial y} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^h \theta}{\partial y^h} & \frac{\partial^h \alpha_1}{\partial y^h} & \frac{\partial^{h+1} \alpha_1}{\partial x \partial y^h} & \dots & \frac{\partial^{h+m_1-1} \alpha_1}{\partial x^{m_1-1} \partial y^h} & \frac{\partial^h \alpha_2}{\partial y^h} & \frac{\partial^{h+1} \alpha_2}{\partial x \partial y^h} & \dots & \frac{\partial^{h+m_2-1} \alpha_2}{\partial x^{m_2-1} \partial y^h} & \dots & \frac{\partial^h \alpha_q}{\partial y^h} & \frac{\partial^{h+1} \alpha_q}{\partial x \partial y^h} & \dots & \frac{\partial^{h+m_q-1} \alpha_q}{\partial x^{m_q-1} \partial y^h} \end{array} \right| \equiv r(\theta),$$

$h = \sum_{i=1}^q m_i$ ;  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$  et  $M$  étant des fonctions déterminées de  $x$  et de  $y$ ;  $\theta$

étant l'intégrale générale de l'équation

$$\left| \begin{array}{cccc} \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} & \dots & \frac{\partial^{q+1} \theta}{\partial x \partial y^q} \\ \alpha_1 & \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial^q \alpha_1}{\partial y^q} \\ \alpha_2 & \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial^q \alpha_2}{\partial y^q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_q & \frac{\partial \alpha_q}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_q}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial^q \alpha_q}{\partial y^q} \end{array} \right| = 0.$$

Inversement, chaque expression (25) où  $\theta$  est définie de cette manière représente l'intégrale générale d'une équation du type (20) et d'ordre  $n$  au plus. Lorsque  $s$  — et pas plus de  $s$  — relations distinctes de la forme

$$\sum_{i=1}^q f_i(x) G \left( \frac{\partial^{m_i} \alpha_i}{\partial x^{m_i}} \right) = 0$$

existent, l'expression (25) est l'intégrale générale d'une équation du type (20) et d'ordre  $n - s$ . Si nous supposons que l'intégrale générale de l'équation (20) soit donnée sous la forme (25), l'on peut en déduire directement l'intégrale générale de l'équation  $(E_i)$  ( $i \geq 0$ ), du moins si l'équation  $(E_i)$  est d'ordre  $n$ . — Je n'ai pas réussi à donner la formule générale de l'intégrale générale des équations (20) qui admettent  $q$  intégrales distinctes du type (4); par suite je n'ai pas réussi à déduire de l'intégrale (25) la solution générale de l'équation adjointe (23).

Dans le dernier chapitre, V, j'applique la méthode de Laplace à celles des équations (19) pour lesquelles tous les systèmes de caractéristiques coïncident. J'écris les équations en question

$$(26) \quad \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^n B_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} = 0 \quad (A_q = 1; B_n \neq 0; q + 1 < n).$$

Si l'équation (26) admet une intégrale de la forme d'Euler, celle-ci doit être du type (4), puisque  $x$  est la variable caractéristique; l'équation (26) admet au plus  $q$



intégrales distinctes de ce type; par conséquent, l'intégrale générale ne peut pas être représentée par des intégrales de la forme d'Euler. Comme il n'existe qu'un système de caractéristiques pour l'équation (26), il n'y a qu'une transformation de Laplace complètement déterminée, c'est-à-dire la transformation (21). Si l'on applique la transformation (21) à l'équation (26), on obtient les mêmes résultats qui ont été obtenus pour l'équation (20). Chaque intégrale de la forme d'Euler peut être obtenue par l'application répétée de la transformation (21); pour obtenir les intégrales de la forme d'Euler, il ne faut que l'intégration d'équations différentielles linéaires du premier ordre (en cas exceptionnel d'ordre supérieur). Si l'équation (26) admet  $s$  intégrales distinctes du type (4), l'intégration de l'équation (26) peut être ramenée, par l'application répétée de la transformation (21), à l'intégration d'une équation de même type et d'ordre  $n - s$  et à l'intégration d'équations différentielles linéaires. — Il y a aussi une transformation complètement déterminée

$$(27) \quad z_{-q} = \sum_{i=0}^{q-1} T_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^{n-1} U_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i}$$

— la transformation inverse à la transformation (21) — par laquelle l'équation (26) est ramenée à une équation de même type et de même ordre, pourvu que l'équation (26) ne soit pas de la forme

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \gamma \left( \sum_{i=0}^{q-1} T_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^{n-1} U_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \right) \right] = 0.$$

Si l'on applique la transformation (27) à l'équation (26) et la transformation (21) à l'équation adjointe

$$(28) \quad \sum_{i=0}^q (-1)^{i+1} \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} (A_i u) + \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{\partial^i}{\partial y^i} (B_i u) = 0,$$

l'on obtient deux équations qui sont encore adjointes. Lorsque l'équation adjointe (28) admet  $s$  intégrales distinctes de la forme d'Euler, l'on peut par l'application répétée de la transformation (27) diminuer l'ordre de l'équation (26) de  $s$  unités. — L'intégration de l'équation (26) ne peut jamais être ramenée par la méthode de Laplace à l'intégration d'équations différentielles.

---

# I.

Pour l'équation linéaire aux dérivées partielles (20)

$$\sum_{i=0}^q \left( A_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \right) = 0 \quad (A_q = 1; \quad q + 1 = n),$$

il existe deux systèmes de caractéristiques distinctes:  $y$  est une variable caractéristique simple et  $x$  une variable caractéristique d'ordre  $q$ . Si l'équation admet une intégrale explicite dépendant d'une fonction arbitraire dont l'argument est une fonction déterminée de  $x$  et de  $y$ , la fonction arbitraire doit être ou une fonction de  $x$  ou une fonction de  $y$ , et comme l'équation est linéaire, l'intégrale doit être de la forme d'Euler. La méthode de Laplace étendue à l'équation (20) doit être une méthode pour reconnaître si l'équation admet une intégrale de la forme d'Euler, et dans ce cas une méthode qui permet de déterminer cette intégrale ou ces intégrales.

Pour abréger, je nomme une intégrale de la forme d'Euler dépendant d'une fonction arbitraire de  $x$ , c'est-à-dire une intégrale du type (4): une  $X$ -intégrale; de même, je nomme une intégrale du type (5): une  $Y$ -intégrale. Si l'intégrale (4) ne peut se réduire par rapport à  $m$  (c'est-à-dire si l'intégrale ne peut se mettre sous une telle forme qu'elle contienne une fonction arbitraire de  $x$  et ses dérivées jusqu'à l'ordre  $m - 1$  seulement), on dit que l'intégrale est de rang  $m + 1$ . DARBOUX est le premier qui ait employé cette dénomination. Si l'intégrale (4), où  $\alpha_0 \neq 0$ , est de rang  $m + 1 - p$ , il faut qu'elle puisse s'écrire

$$\left( \bar{\alpha}_0 \frac{\partial^{m-p}}{\partial x^{m-p}} + \bar{\alpha}_1 \frac{\partial^{m-p-1}}{\partial x^{m-p-1}} + \dots + \bar{\alpha}_{m-p} \right) \left( x_0 X^{(p)} + x_1 X^{(p-1)} + \dots + x_p X \right),$$

où  $\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_{m-p}$  sont des fonctions déterminées de  $x$  et de  $y$ , et  $x_0, x_1, \dots, x_p$  des fonctions déterminées de  $x$ . Il en suit que la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale (4), où  $\alpha_0 \neq 0$ , soit de rang  $m + 1$  est que l'intégrale (4) ne s'annule pour d'autre valeur de la fonction arbitraire  $X$  que pour  $X = 0$ .

Supposons que  $s$   $X$ -intégrales de rang  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_s + 1$  soient données. Les  $s$   $X$ -intégrales peuvent s'écrire

$$(29) \quad \zeta_i = \alpha_{0i} X_i^{(m_i)} + \alpha_{1i} X_i^{(m_i-1)} + \dots + \alpha_{m_i i} X_i \quad \left( \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, s \\ m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_s \end{array} \right),$$

où  $\alpha_{0i}, \alpha_{1i}, \dots, \alpha_{m_i i}$  sont des fonctions déterminées de  $x$  et de  $y$ ,  $\alpha_{0i} \neq 0$ , tandis qu'aucune des intégrales  $\zeta_i$  ne s'annule pour d'autre valeur de la fonction arbitraire  $X_i$  que pour  $X_i = 0$ . Si les  $s$   $X$ -intégrales (29) ne peuvent être remplacées par  $s-1$   $X$ -intégrales, je dis que les  $s$   $X$ -intégrales (29) sont distinctes. Maintenant nous allons chercher la condition nécessaire et suffisante pour que les  $s$   $X$ -intégrales (29) ne puissent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur.

S'il existe entre  $\alpha_{0i}$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) une relation linéaire et homogène dont les coefficients sont des fonctions de  $x$ , ou, autrement dit, une relation de la forme

$$\sum_{i=1}^j f_i(x) \alpha_{0i} = 0, \quad \text{où } f_j(x) \neq 0, \quad (j \leq s)$$

et que nous fassions la substitution

$$(30) \quad \begin{cases} X_i = \bar{X}_i + f_i(x) \bar{X}_j^{(m_j - m_i)} & (i = 1, 2, \dots, j-1), \\ X_j = f_j(x) \bar{X}_j, \end{cases}$$

le coefficient de  $\bar{X}_j^{(m_j)}$  dans l'intégrale  $\sum_{i=1}^j \zeta_i$  s'annulera; par suite les  $j$   $X$ -intégrales  $\zeta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, j-1, j$ ) peuvent être remplacées par  $j$   $X$ -intégrales de rang  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_{j-1} + 1, m_j$  au plus.

Si l'intégrale  $\sum_{i=1}^j \zeta_i$  s'annule pour

$$X_i = f_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, j), \quad \text{où } f_j(x) \neq 0, \quad (j \leq s)$$

et que nous effectuions la substitution

$$(31) \quad \begin{cases} X_i = \bar{X}_i + f_i(x) \bar{X}_j & (i = 1, 2, \dots, j-1), \\ X_j = f_j(x) \bar{X}_j, \end{cases}$$

le coefficient de  $\bar{X}_j$  dans l'intégrale  $\sum_{i=1}^j \zeta_i$  s'annulera; par suite les  $j$   $X$ -intégrales  $\zeta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, j-1, j$ ) peuvent être remplacées par  $j$   $X$ -intégrales de rang  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_{j-1} + 1, m_j$  au plus.

Une condition nécessaire pour que les  $s$   $X$ -intégrales (29) ne puissent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur est par suite qu'il n'existe pas de relation de la forme

$$\sum_{i=1}^s f_i(x) \alpha_{0i} = 0$$

et que l'intégrale  $\sum_{i=1}^s \zeta_i$  ne s'annule pour d'autre système de valeurs des fonctions arbitraires  $X_i$  que pour  $X_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ). Nous verrons que c'est là aussi une condition suffisante.

Supposons qu'il n'existe pas de relation de la forme  $\sum_{i=1}^s f_i(x) \alpha_{0i} = 0$  et que



l'intégrale  $\sum_{i=1}^s \zeta_i$  ne s'annule que pour  $X_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ). Si l'on fait une substitution de la forme

$$(31') \quad X_i = \bar{X}_i + \sum_{j=i+1}^s \sum_{h=0}^{m_j} f_{ijh}(x) \bar{X}_j^{(h)} \quad (i = 1, 2, \dots, s),$$

les  $s$   $X$ -intégrales (29) seront remplacées par  $s$   $X$ -intégrales

$$\bar{\alpha}_{0i} \bar{X}_i^{(m_i)} + \bar{\alpha}_{1i} \bar{X}_i^{(m_i-1)} + \dots + \bar{\alpha}_{m_i i} \bar{X}_i \quad (i = 1, 2, \dots, s),$$

où

$$\bar{\alpha}_{0j} = \alpha_{0j} + \sum_{i=1}^{j-1} f_{ijm_j - m_i}(x) \alpha_{0i} \neq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s).$$

Et en général, si les  $s$  fonctions arbitraires  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) sont remplacées par des fonctions linéaires et homogènes de  $s$  fonctions arbitraires  $\bar{X}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) et de leurs dérivées, les coefficients étant des fonctions déterminées de  $x$ , les  $s$   $X$ -intégrales (29) seront remplacées par  $s$   $X$ -intégrales

$$\bar{\zeta}_i = \bar{\alpha}_{0i} \bar{X}_i^{(n_i)} + \bar{\alpha}_{1i} \bar{X}_i^{(n_i-1)} + \dots + \bar{\alpha}_{n_i i} \bar{X}_i \quad \left( \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, s \\ n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_s \end{array} \right),$$

où  $\bar{\alpha}_{0i} \neq 0$  et où  $n_i \geq m_i$  (il faut, bien entendu, que la substitution en question ne donne pas de relation entre les fonctions  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ )). Nous en concluons que les  $s$   $X$ -intégrales (29) ne peuvent être remplacées par des intégrales de rang inférieur. En effet, si les  $s$   $X$ -intégrales (29) pouvaient être remplacées par des intégrales de rang inférieur, on pourrait écrire l'intégrale  $\sum_{i=1}^s \zeta_i$  sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^s \zeta_i = \sum_{i=1}^s \bar{\zeta}_i, \\ \bar{\zeta}_i = \bar{\alpha}_{0i} \bar{X}_i^{(n_i)} + \bar{\alpha}_{1i} \bar{X}_i^{(n_i-1)} + \dots + \bar{\alpha}_{n_i i} \bar{X}_i, \end{array} \right.$$

où  $\sum_{i=1}^s n_i < \sum_{i=1}^s m_i$  et où  $\bar{X}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) sont des fonctions linéaires et homogènes de  $X_1, X_2, \dots, X_s$  et de leurs dérivées, les coefficients étant des fonctions déterminées de  $x$ ; l'intégrale  $\sum_{i=1}^s \bar{\zeta}_i$  s'annule pour  $\bar{X}_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ), et comme nous sommes partis de ce que l'intégrale  $\sum_{i=1}^s \zeta_i$  ne s'annule que pour  $X_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ), il en suit que toutes les fonctions  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) sont des fonctions linéaires et homogènes de  $X_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_s$  et de leurs dérivées, les coefficients étant des fonctions déterminées de  $x$ , mais cela est contraire à la supposition  $\sum_{i=1}^s n_i < \sum_{i=1}^s m_i$ .

Lorsque les  $s$   $X$ -intégrales (29) peuvent être remplacées par  $s - 1$   $X$ -intégrales, il est aisé de voir qu'une relation de la forme  $\sum_{i=1}^s f_i(x) \alpha_{0i} = 0$  existe; de même, lorsque les  $s$   $X$ -intégrales (29) peuvent être remplacées par  $s - r$   $X$ -intégrales, il faut qu'il existe  $r$  relations distinctes de la forme  $\sum_{i=1}^s f_i(x) \alpha_{0i} = 0$ .

*Proposition 1.* La condition nécessaire et suffisante pour que les  $s$   $X$ -intégrales

$$\zeta_i = \alpha_{0i} X_i^{(m_i)} + \alpha_{1i} X_i^{(m_i-1)} + \dots + \alpha_{m_i i} X_i \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

ne puissent être remplacées par des intégrales de rang inférieur à  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots$

$m_s + 1$  est qu'il n'existe pas de relation de la forme  $\sum_{i=1}^s f_i(x) \alpha_{0i} = 0$  et que l'intégrale

$\sum_{i=1}^s \zeta_i$  ne s'annule pour d'autre système de valeurs des fonctions arbitraires  $X_i$  que

pour  $X_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ). Une condition nécessaire pour que les  $s$   $X$ -intégrales puissent être remplacées par  $s - r$   $X$ -intégrales est qu'il existe  $r$  relations distinctes

de la forme  $\sum_{i=1}^s f_i(x) \alpha_{0i} = 0$ .

La méthode de Laplace, appliquée à l'équation (10), consiste à ramener l'intégration de l'équation proposée à l'intégration d'une équation de même type qui admet une intégrale de la forme d'Euler de rang 1; et pour que la méthode réussisse, il faut et il suffit que l'équation admette une intégrale de la forme d'Euler.

Maintenant que nous allons appliquer cette méthode à l'équation (20), il est naturel de chercher d'abord les conditions qui doivent être remplies pour que l'équation (20) admette une ou plusieurs intégrales de la forme d'Euler de rang 1 et, s'il y en a, d'examiner à quel point l'intégration de l'équation peut être simplifiée.

La condition pour que l'équation (20) admette une  $X$ -intégrale de rang 1, s'obtient en substituant  $z = \alpha_0 X$  dans l'équation (20). Nous aurons alors

$$(32) \quad X' \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} + X \sum_{i=0}^q \left( A_i \frac{\partial^{i+1} \alpha_0}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} \right) = 0.$$

La condition pour que l'équation (20) admette l'intégrale  $\alpha_0 X$  est que  $\alpha_0$  satisfasse aux deux équations

$$(33) \quad \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0, \quad (34) \quad \sum_{i=0}^q \left( A_i \frac{\partial^{i+1} \alpha_0}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} \right) = 0,$$

parce que l'équation (32) doit être vérifiée quelle que soit la fonction  $X$ . En différenciant l'équation (33) par rapport à  $x$  et en tenant compte de l'équation (34), nous obtiendrons l'équation

$$\sum_{i=0}^q \left( \frac{\partial A_i}{\partial x} - B_i \right) \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0.$$

Il en résulte que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (20) admette une  $X$ -intégrale de rang 1 est que les deux équations différentielles (33) et

$$(35) \quad \sum_{i=0}^{q-1} P_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0, \quad \text{où } P_i = \frac{\partial A_i}{\partial x} + A_i B_q - B_i,$$

admettent une intégrale commune (la solution triviale  $\alpha_0 = 0$ , bien entendu, non comptée), résultat déjà obtenu par PISATI.

De la même manière, nous pouvons montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (20) admette  $s$   $X$ -intégrales distinctes de rang 1 est

que les deux équations différentielles (33) et (35) admettent  $s$  solutions distinctes en commun (je dis que les intégrales  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) de l'équation  $\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha}{\partial y^i} = 0$  sont distinctes, s'il n'existe entre  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) aucune relation de la forme  $\sum_{i=1}^s f_i(x) \alpha_i = 0$ ).

Comme on le sait, nous pouvons reconnaître si les deux équations (33) et (35) admettent des intégrales communes — et dans ce cas combien — par des différentiations et des opérations algébriques. En différentiant l'équation (33)  $j-2$  fois par rapport à  $y$  et l'équation (35)  $j-1$  fois par rapport à  $y$  et en éliminant entre ces  $2j-1$  équations

$$\sum_{i=0}^{h+q} a_{ih} \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0, \quad (h = 0, 1, \dots, j-2), \quad \text{où} \quad a_{ih} = \sum_{k=0}^h \frac{h!}{k! (h-k)!} \frac{\partial^{h-k} A_{i-k}}{\partial y^{h-k}},$$

$$\sum_{i=0}^{h+q-1} p_{ih} \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0, \quad (h = 0, 1, \dots, j-1), \quad \text{où} \quad p_{ih} = \sum_{k=0}^h \frac{h!}{k! (h-k)!} \frac{\partial^{h-k} P_{i-k}}{\partial y^{h-k}},$$

les  $2j-2$  quantités  $\frac{\partial^{q+j-2} \alpha_0}{\partial y^{q+j-2}}, \frac{\partial^{q+j-3} \alpha_0}{\partial y^{q+j-3}}, \dots, \frac{\partial^{q-j+1} \alpha_0}{\partial y^{q-j+1}}$ , nous obtiendrons l'équation

$$(36) \quad \sum_{i=0}^{q-j} P_{ij} \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0, \quad \text{où}$$

$$P_{ij} = \begin{vmatrix} p_{q+j-2, j-1} & p_{q+j-3, j-1} & p_{q+j-4, j-1} & \dots & p_{q-j+1, j-1} & p_{i, j-1} \\ 0 & p_{q+j-3, j-2} & p_{q+j-4, j-2} & \dots & p_{q-j+1, j-2} & p_{i, j-2} \\ 0 & 0 & p_{q+j-4, j-3} & \dots & p_{q-j+1, j-3} & p_{i, j-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{q-j+1, 0} & p_{i, 0} \\ a_{q+j-2, j-2} & a_{q+j-3, j-2} & a_{q+j-4, j-2} & \dots & a_{q-j+1, j-2} & a_{i, j-2} \\ 0 & a_{q+j-3, j-3} & a_{q+j-4, j-3} & \dots & a_{q-j+1, j-3} & a_{i, j-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{q-j+1, 0} & a_{i, 0} \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} (i = 0, 1, \dots, q-j) \\ (j = 1, 2, \dots, q) \end{matrix}$$

[d'après cette désignation nous avons  $P_{i1} = P_i$  ( $i = 0, 1, \dots, q-1$ )]. Entre les coefficients  $P_{ij}$  ( $i = 0, 1, \dots, q-j$ ) il existe encore les relations suivantes

$$P_{i, j+1} (P_{r+1, j-1})^2 = \begin{vmatrix} P_{r, j} & P_{r-1, j} + P'_{r, j} & P_{i-1, j} + P'_{i, j} \\ 0 & P_{r, j} & P_{i, j} \\ P_{r+1, j-1} & P_{r, j-1} & P_{i, j-1} \end{vmatrix},$$



$$P_{i,j+2}(P_{r+1,j-1})^4 =$$

$P_{r,j}$	$P_{r-1,j} + 2P'_{r,j}$	$P_{r-2,j} + 2P'_{r-1,j} + P''_{r,j}$	$P_{r-3,j} + 2P'_{r-2,j} + P''_{r-1,j}$	$P_{i-2,j} + 2P'_{i-1,j} + P''_{i,j}$
0	$P_{r,j}$	$P_{r-1,j} + P'_{r,j}$	$P_{r-2,j} + P'_{r-1,j}$	$P_{i-1,j} + P'_{i,j}$
0	0	$P_{r,j}$	$P_{r-1,j}$	$P_{i,j}$
$P_{r+1,j-1}$	$P_{r,j-1} + P'_{r+1,j-1}$	$P_{r-1,j-1} + P'_{r,j-1}$	$P_{r-2,j-1} + P'_{r-1,j-1}$	$P_{i-1,j-1} + P'_{i,j-1}$
0	$P_{r+1,j-1}$	$P_{r,j-1}$	$P_{r-1,j-1}$	$P_{i,j-1}$

etc., où  $r = q - j$  et où la désignation  $\frac{\partial P}{\partial y} = P'$ ,  $\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = P''$  est employée. La condition nécessaire et suffisante pour que les deux équations (33) et (35) admettent  $s$  solutions distinctes communes est que l'on ait

$$\sum_{i=0}^{q-j} P_{ij} \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} \equiv 0 \quad (j = q - s + 1, q - s + 2, \dots, q)$$

ou autrement dit, que l'on ait

$$P_{ij} = 0 \quad \left( \begin{matrix} i = 0, 1, \dots, q - j \\ j = q - s + 1, q - s + 2, \dots, q \end{matrix} \right);$$

et cette condition est identique à la condition

$$P_{i,q-i} = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, s - 1).$$

Supposons  $P_{i,q-i} = 0$  ( $i = 0, 1, \dots, s - 1$ ),  $P_{s,q-s} \neq 0$ . Il en suit que les deux équations (33) et (35) admettent  $s$  — et pas plus de  $s$  — intégrales distinctes communes, lesquelles sont obtenues par l'intégration de l'équation différentielle (36) où  $j = q - s$ ; l'équation (20) admet par suite  $s$  — et pas plus de  $s$  —  $X$ -intégrales distinctes de rang 1, lesquelles sont obtenues par l'intégration de l'équation (36) où  $j = q - s$ , et l'équation (20) peut par suite se mettre sous la forme

$$(37) \quad \sum_{i=0}^{q-s} \left( M_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + N_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) \sum_{h=0}^s \frac{P_{h,q-s}}{P_{s,q-s}} \frac{\partial^h \alpha}{\partial y^h} = 0,$$

$M_i$  et  $N_i$  étant des fonctions de  $x$  et de  $y$ , qu'il n'y a pas trop d'intérêt à définir.

*Proposition 2.* La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (20) admette  $s$   $X$ -intégrales distinctes de rang 1 est que les deux équations différentielles

$$\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha}{\partial y^i} = 0, \quad \sum_{i=0}^{q-1} P_i \frac{\partial^i \alpha}{\partial y^i} = 0, \quad \text{où } P_i = \frac{\partial A_i}{\partial x} + A_i B_q - B_i,$$

admettent  $s$  intégrales distinctes communes, et cette condition est identique aux conditions

$$P_{i,q-i} = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, s - 1)$$

(pour la désignation  $P_{ij}$  voir page 23). Supposons

$$P_{i,q-i} = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, s - 1), \quad P_{s,q-s} \neq 0.$$

Les  $s$   $X$ -intégrales de rang 1 peuvent être obtenues par l'intégration de l'équation

$$\sum_{i=0}^s P_{i,q-s} \frac{\partial^i \alpha}{\partial y^i} = 0;$$

l'équation (20) peut s'écrire

$$\sum_{i=0}^{q-s} \left( M_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + N_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) \sum_{h=0}^s \frac{P_{h, q-s}}{P_{s, q-s}} \frac{\partial^h z}{\partial y^h} = 0,$$

et l'intégration de l'équation (20) se ramène à l'intégration des deux équations

$$\sum_{i=0}^{q-s} \left( M_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + N_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z_s = 0, \quad \sum_{h=0}^s P_{h, q-s} \frac{\partial^h z}{\partial y^h} = P_{s, q-s} z_s.$$

Le cas où  $s = q$  est d'un intérêt spécial. La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (20) admette  $q$   $X$ -intégrales distinctes de rang 1 est que l'on ait

$$\frac{\partial A_i}{\partial x} + A_i B_q - B_i = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, q-1).$$

Si ces conditions sont vérifiées, l'équation (20) peut s'écrire

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + B_q \right) \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} = 0,$$

et l'on obtient par suite l'intégrale générale par l'intégration successive de deux équations différentielles, dont la première est du premier ordre et la seconde d'ordre  $q$ .

Pour reconnaître si l'équation (20) admet une  $Y$ -intégrale de rang 1, nous substituons  $z = \beta Y$  dans l'équation (20). Lorsque l'équation (20) admet l'intégrale  $\beta Y$ , l'équation

$$\sum_{i=0}^q \left( A_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) (\beta Y) = 0$$

doit être vérifiée quelle que soit la fonction  $Y$ . Il en suit que  $\beta$  est déterminée

par l'équation  $\left( \frac{\partial}{\partial x} + B_q \right) \beta = 0$ , et que l'équation (20) peut s'écrire

$$\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \left( \frac{\partial z}{\partial x} + B_q z \right) = 0.$$

L'équation adjointe de cette dernière équation peut s'écrire

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - B_q \right) \sum_{i=0}^q (-1)^{i+1} \frac{\partial^i}{\partial y^i} (A_i u) = 0,$$

et cette équation admet  $q$   $X$ -intégrales distinctes de rang 1. Il en suit que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (20) admette une  $Y$ -intégrale de rang 1 est que l'équation adjointe (23) admette  $q$   $X$ -intégrales distinctes de rang 1.

L'équation adjointe (23) peut s'écrire

$$(38) \quad \sum_{i=0}^q \left( C_i \frac{\partial^{i+1} u}{\partial x \partial y^i} + D_i \frac{\partial^i u}{\partial y^i} \right) = 0, \quad \text{où}$$

$$(38') \quad C_i = (-1)^{q-i} \sum_{j=0}^{q-i} (-1)^j \frac{(i+j)!}{i! j!} \frac{\partial^j A_{i+j}}{\partial y^j}, \quad \frac{\partial C_i}{\partial x} - D_i = (-1)^{q-i} \sum_{j=0}^{q-i} (-1)^j \frac{(i+j)!}{i! j!} \frac{\partial^j B_{i+j}}{\partial y^j}.$$

Supposons que l'équation adjointe (23) admette  $s$  — et pas plus de  $s$  —  $X$ -intégrales distinctes de rang 1 ou, autrement dit, supposons que les deux équations différentielles

$$(38'') \quad \sum_{i=0}^q C_i \frac{\partial^i \gamma}{\partial y^i} = 0, \quad (38''') \quad \sum_{i=0}^{q-1} Q_i \frac{\partial^i \gamma}{\partial y^i} = 0, \quad \text{où } Q_i = \frac{\partial C_i}{\partial x} + C_i D_q - D_i,$$

admettent  $s$  intégrales distinctes communes. L'équation (23) peut alors s'écrire

$$\sum_{i=0}^{q-s} (-1)^{i+1} \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} \left( R_i \sum_{h=0}^s \frac{Q_{h, q-s}}{Q_{s, q-s}} \frac{\partial^h u}{\partial y^h} \right) + \sum_{i=0}^{q-s} (-1)^i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \left( S_i \sum_{h=0}^s \frac{Q_{h, q-s}}{Q_{s, q-s}} \frac{\partial^h u}{\partial y^h} \right) = 0,$$

où les coefficients  $Q_{ij}$  sont formés des coefficients  $C_0, C_1, \dots, C_q, Q_0, Q_1, \dots, Q_{q-1}$  de la même manière que les coefficients  $P_{ij}$  (page 23) ont été formés des coefficients  $A_0, A_1, \dots, A_q, P_0, P_1, \dots, P_{q-1}$ ; les coefficients  $R_i$  et  $S_i$  sont des fonctions de  $x$  et de  $y$ ;  $R_{q-s} = 1$ . L'équation (20) peut par suite se mettre sous la forme

$$(39) \quad \sum_{h=0}^s (-1)^h \frac{\partial^h}{\partial y^h} \left[ \frac{Q_{h, q-s}}{Q_{s, q-s}} \sum_{i=0}^{q-s} \left( R_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + S_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \right) \right] = 0$$

Si nous avons obtenu  $s$  intégrales distinctes  $\gamma_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) de l'équation

$$\sum_{i=0}^s \frac{Q_{i, q-s}}{Q_{s, q-s}} \frac{\partial^i \gamma}{\partial y^i} = 0,$$

nous pouvons en déduire, sans intégration,  $s$  intégrales distinctes  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) de l'équation adjointe

$$\sum_{i=0}^s (-1)^i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \left( \frac{Q_{i, q-s}}{Q_{s, q-s}} \lambda \right) = 0,$$

et l'équation (20) peut se mettre sous la forme

$$(39') \quad \sum_{i=0}^{q-s} \left( R_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + S_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \right) = \sum_{i=1}^s \lambda_i X_i.$$

Il en suit que, si les  $s$   $X$ -intégrales de rang 1 de l'équation (23) sont données, l'équation (20) peut être ramenée sans intégration à la forme (39'), ou autrement dit: une intégrale intermédiaire (39') d'ordre  $n - s$  de l'équation (20), dépendant de  $s$  fonctions arbitraires, peut être directement obtenue.

*Proposition 3.* La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (20) admette une  $Y$ -intégrale de rang 1 est que l'équation adjointe admette  $q$   $X$ -intégrales distinctes de rang 1. Si l'équation (20) admet une  $Y$ -intégrale de rang 1, l'équation peut s'écrire

$$\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \left( \frac{\partial z}{\partial x} + B_{q-s} z \right) = 0,$$

et l'intégrale générale s'obtient directement par l'intégration successive de deux équations différentielles, la première d'ordre  $q$  et la seconde du premier ordre. Si l'équation adjointe (23) admet  $s$  — et pas plus de  $s$  —  $X$ -intégrales distinctes de rang 1, l'équation (20) peut, sans intégration, être ramenée à la forme

$$\sum_{h=0}^s (-1)^h \frac{\partial^h}{\partial y^h} \left[ \frac{Q_{h, q-s}}{Q_{s, q-s}} \sum_{i=0}^{q-s} \left( R_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + S_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \right) \right] = 0, \quad \text{où } R_{q-s} = 1,$$



et, par l'intégration de l'équation différentielle

$$\sum_{h=0}^s (-1)^h \frac{\partial^h}{\partial y^h} \left( \frac{Q_{h, q-s}}{Q_{s, q-s}} \lambda \right) = 0,$$

à la forme

$$\sum_{i=0}^{q-s} \left( R_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + S_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \right) = \sum_{i=1}^s \lambda_i X_i.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'une des équations (20) et (23) admette une intégrale de la forme d'Euler de rang 1 est ainsi que les équations admettent une intégrale intermédiaire d'ordre inférieur à  $n$ . — Lorsque l'une des équations (20) et (23) admet  $q$   $X$ -intégrales distinctes de rang 1 et que, par suite, l'autre équation admette une  $Y$ -intégrale de rang 1, l'intégrale générale de l'équation (20) s'obtient directement par l'intégration successive de deux équations différentielles linéaires. Aussi dans d'autres cas, l'on peut obtenir l'intégrale générale de l'équation (20) directement par l'intégration successive d'équations différentielles linéaires, c'est-à-dire si l'équation (20) peut se mettre sous la forme

$$\sum_{h=0}^{q-s} G_h \frac{\partial^h}{\partial y^h} \left( \frac{\partial}{\partial x} + B_q \right) \sum_{i=0}^s F_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} = 0,$$

où les coefficients  $G_h$  et  $F_i$  sont des fonctions de  $x$  et de  $y$ ;  $F_s = G_{q-s} = 1$ . Une condition nécessaire en est que l'équation (20) admette au moins  $s$   $X$ -intégrales distinctes de rang 1 et que l'équation adjointe (23) admette au moins  $q - s$   $X$ -intégrales distinctes de rang 1. Supposons que l'équation (20) admette les  $s$   $X$ -intégrales distinctes  $\alpha_{0i} X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ), où  $q \geq s \geq 0$ . Nous écrivons

$$\delta = \begin{vmatrix} \alpha_{01} & \alpha'_{01} & \dots & \alpha_{01}^{(q-1)} \\ \alpha_{02} & \alpha'_{02} & \dots & \alpha_{02}^{(q-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{0q} & \alpha'_{0q} & \dots & \alpha_{0q}^{(q-1)} \end{vmatrix}, \quad \gamma_{0i} = \frac{\partial \log \delta}{\partial \alpha_{0i}^{(q-1)}} \quad (i = 1, 2, \dots, q),$$

où  $\alpha_{0i}$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) sont  $q$  intégrales distinctes de l'équation (33) et où l'on a employé la désignation  $\frac{\partial^j \alpha_{0i}}{\partial y^j} = \alpha_{0i}^{(j)}$ . Une condition suffisante pour que l'équation (20) puisse se mettre sous la forme en question est que l'équation adjointe (23) admette les intégrales  $\gamma_{0i} X_i$  ( $i = s+1, s+2, \dots, q$ ). Et si l'équation (20) n'admet pas d'autres  $X$ -intégrales de rang 1 que les intégrales  $\alpha_{0i} X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ), il faut, pour que l'intégrale générale de l'équation (20) s'obtienne directement par l'intégration successive d'équations différentielles linéaires, que l'équation adjointe (23) admette les intégrales  $\gamma_{0i} X_i$  ( $i = s+1, s+2, \dots, q$ ).

Supposons maintenant que l'équation (20) n'admette pas d'intégrale intermédiaire d'ordre inférieur à  $n$ , ou, autrement dit, que ni l'équation (20) ni l'équation (23) n'admettent une intégrale de la forme d'Euler de rang 1. Nous ne pouvons immédiatement diminuer l'ordre de l'équation (20). Nous allons rechercher s'il est possible de trouver des transformations linéaires — analogues aux transformations

de Laplace — par lesquelles nous pourrions, dans certains cas, ramener l'équation (20) à une équation de même type et de même ordre qui admet une intégrale intermédiaire d'ordre inférieur à  $n$ . Nous ne pouvons nous attendre que cela soit possible pour une équation quelconque de type (20); nous savons que, dans le cas où  $q = 1$ , ce n'est possible qu'à condition que l'équation admette une intégrale de la forme d'Euler.

D'après LE ROUX (voir pages 10, 11), il existe pour l'équation (20) deux transformations de Laplace du premier ordre, c'est-à-dire la transformation

$$(40) \quad z_1 = \alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{z}{\alpha_0} \right), \quad \text{où} \quad \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0,$$

qui correspond au système de caractéristiques  $x = \text{const.}$ , et la transformation complètement déterminée (21')

$$\theta = \frac{\partial z}{\partial x} + B_q z,$$

qui correspond au système de caractéristiques  $y = \text{const.}$  Il est naturel de rechercher si par l'emploi répété de l'une de ces transformations, l'on peut, dans certains cas, ramener l'équation (20) à une équation de même type et de même ordre qui admet une intégrale intermédiaire d'ordre inférieur à  $n$ .

PISATI (voir page 11) a déjà montré que, par la transformation (40), l'équation (20) est ramenée à une équation de même type et de même ordre au plus. Je nomme la transformation (40), appliquée à l'équation (20), une transformation  $(t_1)$ . — Quant à la transformation (21'), nous trouverons d'autres transformations linéaires qui à meilleur droit peuvent être considérées comme des transformations de Laplace correspondant au système de caractéristiques  $y = \text{const.}$

Nous allons maintenant appliquer la transformation (40) à une équation (20) qui n'admet pas l'intégrale  $\alpha_0 X$ , ou, autrement dit, pour laquelle nous avons

$$\sum_{i=0}^q \left( A_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) \alpha_0 \neq 0.$$

En effectuant la substitution  $z = \alpha_0 \bar{z}$ , l'équation (20) s'écrit

$$(41) \quad \sum_{i=0}^q \left( \bar{A}_i \frac{\partial^{i+1} \bar{z}}{\partial x \partial y^i} + \bar{B}_i \frac{\partial^i \bar{z}}{\partial y^i} \right) = 0, \quad \text{où}$$

$$(41') \quad \bar{A}_i = \frac{1}{\alpha_0} \sum_{h=0}^{q-i} \frac{(i+h)!}{i! h!} A_{i+h} \frac{\partial^h \alpha_0}{\partial y^h}, \quad \bar{B}_i = \frac{1}{\alpha_0} \sum_{h=0}^{q-i} \frac{(i+h)!}{i! h!} \left( A_{i+h} \frac{\partial}{\partial x} + B_{i+h} \right) \frac{\partial^h \alpha_0}{\partial y^h}.$$

Les conditions

$$\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0, \quad \sum_{i=0}^q \left( A_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) \alpha_0 \neq 0,$$

nous donnent  $\bar{A}_0 = 0$ ,  $\bar{B}_0 \neq 0$ . En appliquant ensuite la transformation  $z_1 = \alpha_0 \frac{\partial \bar{z}}{\partial y}$ , l'équation (20) peut se mettre sous la forme

$$(42) \quad \sum_{i=1}^q \left( \bar{A}_i \frac{\partial^i}{\partial x \partial y^{i-1}} + \bar{B}_i \frac{\partial^{i-1}}{\partial y^{i-1}} \right) \frac{z_1}{\alpha_0} + \bar{B}_0 \frac{z}{\alpha_0} = 0.$$

L'élimination de  $z$  entre les deux équations (40) et (42) conduit à l'équation

$$(43) \quad \alpha_0 \bar{B}_0 \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{\bar{B}_0} \sum_{i=1}^q \left( \bar{A}_i \frac{\partial^i}{\partial x \partial y^{i-1}} + \bar{B}_i \frac{\partial^{i-1}}{\partial y^{i-1}} \right) \frac{z_1}{\alpha_0} \right] + \bar{B}_0 z_1 = 0,$$

laquelle est du même type et du même ordre que l'équation (20).

Il résulte des équations (40) et (42) que l'intégration de l'une des équations (20) et (43) entraîne celle de l'autre.

Supposons que l'équation (20) admette la  $X$ -intégrale

$$\zeta = \alpha_0 X^{(m)} + \alpha_1 X^{(m-1)} + \dots + \alpha_m X,$$

et supposons que cette intégrale soit de rang  $m+1$ , c'est-à-dire que l'intégrale ne s'annule pour d'autre valeur de la fonction  $X$  que pour  $X=0$ . Il résulte directement de l'équation (40) que l'équation (43) admet une  $X$ -intégrale qui est de rang  $m$  au plus, c'est-à-dire l'intégrale

$$\zeta_1 = \alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \right) X^{(m-1)} + \dots + \alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\alpha_m}{\alpha_0} \right) X.$$

Si nous substituons l'intégrale  $\zeta$  dans l'équation (20), nous obtiendrons (du coefficient de  $X^{(m)}$ )

$$(44) \quad \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha_1}{\partial y^i} + \sum_{i=0}^q \left( A_i \frac{\partial^{i+1} \alpha_0}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} \right) = 0;$$

il en suit que  $\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha_1}{\partial y^i} \neq 0$  et, comme  $\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0$ , nous aurons  $\alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \right) \neq 0$ . Le coefficient de  $X^{(m-1)}$  dans l'intégrale  $\zeta_1$  n'est donc pas nul. Nous allons voir que l'intégrale  $\zeta_1$  est, en effet, de rang  $m$ . Si nous supposons que l'intégrale  $\zeta_1$  soit de rang inférieur à  $m$ , il faudrait qu'il existe une valeur, différente de zéro, de la fonction arbitraire  $X$  pour laquelle l'intégrale  $\zeta_1$  s'annulerait, et si l'intégrale  $\zeta_1$  s'annulait pour  $X=f(x)$ , où  $f(x) \neq 0$ , il résulterait de l'équation

$$\sum_{i=1}^q \left( \bar{A}_i \frac{\partial^i}{\partial x \partial y^{i-1}} + \bar{B}_i \frac{\partial^{i-1}}{\partial y^{i-1}} \right) \frac{\zeta_1}{\alpha_0} + \bar{B}_0 \frac{\zeta}{\alpha_0} = 0,$$

laquelle s'obtient de l'équation (42) et qui doit être vérifiée quelle que soit la fonction  $X$ , qu'aussi l'intégrale  $\zeta$  s'annulerait pour  $X=f(x)$ , ce qui est contraire à l'hypothèse. — Je nomme une  $X$ -intégrale dans laquelle le coefficient de la plus haute dérivée de  $X$  est  $\alpha$ : une  $X$ -intégrale qui correspond à  $\alpha$ . — Le rang de la  $X$ -intégrale qui correspond à  $\alpha_0$  est ainsi diminué d'une unité par la transformation (40).



Supposons que l'équation (20) admette  $s$   $X$ -intégrales distinctes de rang  $m_1 + 1$ ,  $m_2 + 1, \dots, m_s + 1$  qui ne puissent être remplacées par  $s$   $X$ -intégrales de rang inférieur. Que les  $s$   $X$ -intégrales de l'équation (20) soient les intégrales (29);  $\alpha_{0i}$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) sont  $s$  intégrales distinctes de l'équation (33), et l'intégrale  $\sum_{i=1}^s \zeta_i$  ne s'annule pour d'autre système de valeurs des fonctions  $X_i$  que pour  $X_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ).

Supposons de plus qu'il existe entre  $\alpha_0$  et  $\alpha_{0i}$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) une relation de la forme

$$\alpha_0 = \sum_{i=1}^j f_i(x) \alpha_{0i}, \text{ où } f_j(x) \neq 0, \quad (j \leq s).$$

En effectuant la substitution (30) nous remplaçons la  $X$ -intégrale qui correspond à  $\alpha_{0j}$  par une  $X$ -intégrale de même rang qui correspond à  $\alpha_0$ ; les  $s - 1$   $X$ -intégrales qui restent ne changent pas avec cette substitution. Nous pouvons supposer que la substitution en question ait déjà été faite, et ainsi nous avons

$$\alpha_0 = \alpha_{0j}.$$

De l'équation (40) il résulte directement que, de chacune des intégrales  $\zeta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ), on obtient une  $X$ -intégrale de l'équation (43) qui est de rang  $m_i + 1$  au plus, à savoir l'intégrale

$$(\zeta_i)_1 = \alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\alpha_{0i}}{\alpha_0} \right) X_i^{(m_i)} + \alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\alpha_{1i}}{\alpha_0} \right) X_i^{(m_i-1)} + \dots + \alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\alpha_{m_i i}}{\alpha_0} \right) X_i.$$

Nous avons déjà vu que l'intégrale  $(\zeta_j)_1$  est de rang  $m_j$ . Les  $s - 1$   $X$ -intégrales  $(\zeta_i)_1$  ( $i \neq j$ ) qui restent sont de rang  $m_i + 1$ , parce que le coefficient  $\alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\alpha_{0i}}{\alpha_0} \right)$  ( $i \neq j$ ) n'est pas nul et que l'intégrale  $(\zeta_i)_1$  ne s'annule pour d'autre valeur de la fonction  $X_i$  que pour  $X_i = 0$ , ce qui résulte de l'équation (42). Il résulte de la proposition 1 que la condition nécessaire et suffisante pour que les  $s$   $X$ -intégrales  $(\zeta_i)_1$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) ne puissent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur à  $m_1 + 1$ ,  $m_2 + 1, \dots, m_{j-1} + 1$ ,  $m_j$ ,  $m_{j+1} + 1, \dots, m_s + 1$  est qu'il n'existe aucune relation de la forme

$$(44') \quad \sum_{i=1}^s f_i(x) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\alpha_{0i}}{\alpha_0} \right) + f(x) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\alpha_{1j}}{\alpha_0} \right) = 0,$$

(la relation triviale  $f_j(x) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\alpha_{0j}}{\alpha_0} \right) = 0$  non comptée) et que l'intégrale  $\sum_{i=1}^s (\zeta_i)_1$  ne s'annule que pour  $X_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ). Il suit de l'équation

$$\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha_{1j}}{\partial y^i} + \sum_{i=0}^q \left( A_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) \alpha_{0j} = 0$$

(qui est obtenue de la même manière que l'équation (44)) qu'aucune relation de la forme

$$\alpha_{1j} = \sum_{i=1}^s f_i(x) \alpha_{0i}$$

ne peut exister, et par suite aucune relation de la forme

$$\sum_{i=1}^s f_i(x) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\alpha_{0i}}{\alpha_0} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\alpha_{1j}}{\alpha_0} \right) = 0$$

ne peut exister. Et une relation de la forme

$$\sum_{i=1}^s f_i(x) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\alpha_{0i}}{\alpha_0} \right) = 0$$

serait contraire à l'hypothèse. Ainsi aucune relation de la forme (44') ne peut exister. Il résulte de l'équation (42) que l'intégrale  $\sum_{i=1}^s (\zeta_i)_1$  ne s'annule que pour  $X_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ), puisque l'intégrale  $\sum_{i=1}^s \zeta_i$  ne s'annule que pour  $X_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ). Nous avons ainsi obtenu le résultat suivant: les  $s$   $X$ -intégrales  $(\zeta_i)_1$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) sont de rang  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_{j-1} + 1, m_j, m_{j+1} + 1, \dots, m_s + 1$ , et elles ne peuvent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur.

Si nous supposons, au contraire, qu'il n'existe pas de relation de la forme

$$\alpha_0 = \sum_{i=1}^s f_i(x) \alpha_{0i},$$

nous pouvons de la même manière montrer que les  $s$   $X$ -intégrales distinctes  $(\zeta_i)_1$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) de l'équation (43) sont de rang  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_j + 1, \dots, m_s + 1$  et ne peuvent être remplacées par  $s$   $X$ -intégrales de rang inférieur.

Il résulte des équations (40) et (42) que, si l'équation (20) n'admet que les  $s$   $X$ -intégrales distinctes  $\zeta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ), l'équation (43) n'admet que les  $s$   $X$ -intégrales distinctes  $(\zeta_i)_1$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ).

Supposons maintenant que l'équation (20) admette une  $Y$ -intégrale de rang  $r + 1$ , ou autrement dit: une intégrale de la forme

$$\zeta = \beta_0 Y^{(r)} + \beta_1 Y^{(r-1)} + \dots + \beta_r Y \quad (\beta_0 \neq 0)$$

qui ne s'annule pour d'autre valeur de la fonction arbitraire  $Y$  que pour  $Y = 0$ . L'équation (43) admet l'intégrale

$$\zeta_1 = \alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\alpha_0} (\beta_0 Y^{(r)} + \beta_1 Y^{(r-1)} + \beta_r Y).$$

Comme l'intégrale  $\zeta$  ne s'annule que pour  $Y = 0$ , il suit de l'équation (42) que l'intégrale  $\zeta_1$  ne peut s'annuler non plus pour d'autre valeur de la fonction arbitraire que pour  $Y = 0$ . L'intégrale  $\zeta_1$  est par suite de rang  $r + 2$ . Et inversement, si l'équation (43) admet une  $Y$ -intégrale de rang  $r + 2$ , l'équation (20) admet une  $Y$ -intégrale de rang  $r + 1$ . L'équation (43) ne peut admettre une  $Y$ -intégrale de rang 1.

Supposons enfin que l'équation (20) admette une  $Y$ -intégrale de rang  $r + 1$  et  $q$   $X$ -intégrales distinctes de rang  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_q + 1$  qui ne puissent

être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur. Les  $q$   $X$ -intégrales peuvent s'écrire

$$\zeta_i = \alpha_{0i} X_i^{(m_i)} + \alpha_{1i} X_i^{(m_i-1)} + \dots + \alpha_{m_i i} X_i \quad \left( \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, q \\ m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_q \end{matrix} \right),$$

où  $\alpha_{0i}$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) sont  $q$  intégrales distinctes de l'équation (33) et où l'intégrale  $\sum_{i=1}^q \zeta_i$  ne s'annule que pour  $X_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ). Comme  $\alpha_0$  est une intégrale de l'équation (33), une relation de la forme

$$\alpha_0 = \sum_{i=1}^j f_i(x) \alpha_{0i}, \quad \text{où } f_i(x) \neq 0, \quad (j \leq q).$$

doit exister. L'équation (43) admet par suite une  $Y$ -intégrale de rang  $r + 2$  et  $q$   $X$ -intégrales distinctes de rang  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_{j-1} + 1, m_j, m_{j+1} + 1, \dots, m_q + 1$ , lesquelles ne peuvent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur. Je nomme, d'après Darboux, la somme  $r + \sum_{i=1}^q m_i$  le nombre caractéristique de l'équation (20). Nous avons ainsi obtenu le résultat suivant: Lorsque l'une des deux équations (20) et (43) admet  $n$  intégrales distinctes de la forme d'Euler, le cas est le même pour l'autre équation, et le nombre caractéristique est le même pour les deux équations.

*Proposition 4.* Par la transformation

$$z_1 = \alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{z}{\alpha_0} \right), \quad \text{où } \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0; \quad \sum_{i=0}^q \left( A_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) \alpha_0 \neq 0,$$

l'équation (20) est ramenée à l'équation (43), laquelle est du même type et du même ordre que l'équation (20). L'intégration de l'une des équations (20) et (43) entraîne celle de l'autre; de toute intégrale de l'une des équations l'on obtient sans intégration une intégrale de l'autre équation. Si l'une des équations admet  $s$   $X$ -intégrales distinctes, le cas est le même pour l'autre équation. — Supposons que l'équation (20) admette  $s$   $X$ -intégrales distinctes de rang  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_s + 1$  qui ne puissent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur; les  $s$   $X$ -intégrales peuvent s'écrire

$$\zeta_i = \alpha_{0i} X_i^{(m_i)} + \alpha_{1i} X_i^{(m_i-1)} + \dots + \alpha_{m_i i} X_i \quad \left( \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, s \\ m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_s \end{matrix} \right);$$

s'il n'existe aucune relation de la forme  $\alpha_0 = \sum_{i=1}^s f_i(x) \alpha_{0i}$ , l'équation (43) admet  $s$   $X$ -intégrales distinctes de rang  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_s + 1$  qui ne peuvent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur, et s'il existe entre  $\alpha_0$  et  $\alpha_{0i}$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) une relation de la forme

$$\alpha_0 = \sum_{i=1}^j f_i(x) \alpha_{0i}, \quad \text{où } f_j(x) \neq 0, \quad (j \leq s),$$

l'équation (43) admet  $s$   $X$ -intégrales distinctes de rang  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_{j-1} + 1, m_j, m_{j+1} + 1, \dots, m_s + 1$  qui ne peuvent être remplacées par des  $X$ -intégrales de



rang inférieur. — Si l'équation (20) admet une  $Y$ -intégrale de rang  $r + 1$ , l'équation (43) admet une  $Y$ -intégrale de rang  $r + 2$ , et inversement. L'équation (43) ne peut admettre une  $Y$ -intégrale de rang 1. — Si l'intégrale générale de l'une des équations (20) et (43) est représentée par  $n$  intégrales de la forme d'Euler, le cas est le même pour l'autre équation, et le nombre caractéristique est le même pour les deux équations.

Maintenant nous allons appliquer la transformation (40) à une équation (20) qui admet l'intégrale  $\alpha_0 X$ . L'équation (20) pouvant s'écrire sous la forme (41) où  $\bar{A}_0 = \bar{B}_0 = 0$ , la transformation (40) conduit immédiatement à l'équation

$$(45) \quad \sum_{i=1}^q \left( \bar{A}_i \frac{\partial^i}{\partial x \partial y^{i-1}} + \bar{B}_i \frac{\partial^{i-1}}{\partial y^{i-1}} \right) \frac{z_1}{\alpha_0} = 0.$$

Supposons que l'équation (20), outre l'intégrale  $\alpha_0 X$ , admette  $s$   $X$ -intégrales distinctes de rang  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_s + 1$ , et supposons que les  $s + 1$   $X$ -intégrales ne puissent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur. Soient les  $s$   $X$ -intégrales de l'équation (20) les intégrales (29); il ne peut exister aucune relation de la forme

$$\sum_{i=1}^s f_i(x) \alpha_{0i} + f(x) \alpha_0 = 0,$$

et l'intégrale  $\sum_{i=1}^s \zeta_i + \alpha_0 X$  ne s'annule pour d'autre système de valeurs des fonctions arbitraires que pour  $X_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ),  $X = 0$ . L'équation (45) admet les  $s$   $X$ -intégrales

$$(\zeta_i)_1 = \alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\alpha_{0i}}{\alpha_0} \right) X_i^{(m_i)} + \alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\alpha_{1i}}{\alpha_0} \right) X_i^{(m_i-1)} + \dots + \alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\alpha_{m_i i}}{\alpha_0} \right) X_i \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

de rang  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_s + 1$  au plus. Il n'existe pas de relation de la forme

$$\sum_{i=1}^s f_i(x) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\alpha_{0i}}{\alpha_0} \right) = 0,$$

et l'intégrale  $\sum_{i=1}^s (\zeta_i)_1$  ne s'annule pour d'autre système de valeurs des fonctions arbitraires que pour  $X_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ); il en suit que les  $s$  intégrales  $(\zeta_i)_1$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) sont de rang  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_s + 1$  et qu'elles ne peuvent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur. Si l'équation (20) n'admet que les  $s + 1$   $X$ -intégrales  $\zeta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) et  $\alpha_0 X$ , l'équation (45) n'admet que les  $s$   $X$ -intégrales  $(\zeta_i)_1$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ). De chaque  $X$ -intégrale de l'équation (45) on obtient par une quadrature une  $X$ -intégrale de l'équation (20).

Supposons que l'équation (20) admette une  $Y$ -intégrale de rang  $r + 1$ . Il en suit que l'équation (45) admet une  $Y$ -intégrale qui est de rang  $r + 2$  au plus et qui peut être de rang inférieur à  $r + 2$ . Si l'équation (45) admet une  $Y$ -intégrale, il n'en suit nullement qu'il existe une  $Y$ -intégrale pour l'équation (20).

*Proposition 5.* La transformation  $z_1 = \alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{z}{\alpha_0} \right)$ , appliquée à une équation (20) qui admet l'intégrale  $\alpha_0 X$ , conduit immédiatement à l'équation (45). Si nous sup-

posons que l'équation (20), outre l'intégrale  $\alpha_0 X$ , admette  $s$   $X$ -intégrales de rang  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_s + 1$  et que les  $s + 1$   $X$ -intégrales ne puissent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur, il en suit que l'équation (45) admet  $s$   $X$ -intégrales de rang  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_s + 1$  qui ne peuvent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur, et inversement. Si l'équation (20) admet une  $Y$ -intégrale de rang  $r + 1$ , l'équation (45) admet une  $Y$ -intégrale de rang  $r + 2$  *au plus*. Mais si l'équation (45) admet une  $Y$ -intégrale, il n'en suit nullement qu'il existe une  $Y$ -intégrale pour l'équation (20). Si l'intégrale générale de l'équation (20) est représentée par une somme d'intégrales de la forme d'Euler, le cas est le même pour l'équation (45); le nombre caractéristique peut être moindre pour l'équation (45). Mais si l'intégrale générale de l'équation (45) est représentée par des intégrales de la forme d'Euler, il n'en suit nullement que le cas est le même pour l'équation (20).

Des preuves des propositions 4 et 5 il résulte que, si l'équation (20) admet les  $s$   $X$ -intégrales (29), la condition nécessaire et suffisante pour que les  $s$   $X$ -intégrales (29) de l'équation (20) ne puissent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur à  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_s + 1$  est qu'il n'existe pas de relation de la forme

$$\sum_{i=1}^s \sum_{j=0}^{m_i} f_{ji}(x) \alpha_{ji} = 0$$

entre les coefficients  $\alpha_{ji} \left( \begin{matrix} j = 0, 1, \dots, m_i \\ i = 1, 2, \dots, s \end{matrix} \right)$ .

En appliquant la transformation (40) à l'équation (20), nous avons obtenu des résultats qui sont tout à fait analogues aux résultats obtenus par l'application de la transformation (6) à l'équation (1), et on a le droit de considérer la transformation (40), appliquée à l'équation (20), comme une transformation de Laplace.

Il résulte de la proposition 4 que si l'équation (20) admet une  $X$ -intégrale de rang  $m + 1$ , nous pouvons en appliquant  $m$  transformations  $(t_1)$ , [voir page 28] convenablement choisies, ramener l'équation (20) à une équation de même type et de même ordre qui admet une  $X$ -intégrale de rang 1, et l'ordre de l'équation transformée peut être immédiatement diminué d'une unité. Si l'équation (20) admet  $s$   $X$ -intégrales distinctes de rang  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_s + 1$  qui ne peuvent être remplacées par  $s$   $X$ -intégrales de rang inférieur, nous pouvons de même en appliquant  $\sum_{i=1}^s (m_i + 1)$  transformations  $(t_1)$ , convenablement choisies, ramener l'équation (20) à une équation de même type et d'ordre  $n - s$ . Mais il existe une différence essentielle entre la transformation de Laplace (6)

$$z_1 = \frac{\partial z}{\partial y} + az$$

de l'équation (1) et une transformation  $(t_1)$  de l'équation (20). La transformation (6) est complètement déterminée, ce qui n'est nullement le cas pour la transformation  $(t_1)$ , si  $q > 1$ ; la fonction  $\alpha_0$  dans la transformation

$$z_1 = \alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{z}{\alpha_0} \right)$$

est seulement assujettie à vérifier la relation (33). Comme nous ne connaissons pas d'avance les  $X$ -intégrales de l'équation (20) — la méthode de Laplace consiste justement à les déterminer — nous ne pouvons pas définir les transformations  $(t_1)$  à l'aide desquelles nous pourrions ramener l'équation (20) à une équation de même type et d'ordre inférieur.

LE ROUX (page 11) a montré que la transformation complètement déterminée  $\theta = \varphi_p z$  appliquée à l'équation (16') peut être considérée comme composée de transformations du type

$$\theta_1 = \alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{z}{\alpha_0} \right), \text{ où } \varphi_p \alpha_0 = 0,$$

et LE ROUX considère la transformation  $\theta = \varphi_p z$  comme une transformation de Laplace de l'équation (16').

Pour l'équation (20) l'on trouve facilement que la transformation (21)

$$z_q = \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i}$$

peut être décomposée en  $q$  transformations  $(t_1)$ . Supposons que l'on ait décomposée

$\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i}{\partial y^i}$  en facteurs différentiels symboliques

$$\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \equiv \alpha_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{q-1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_{q-1}} \frac{\partial}{\partial y} \dots \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{\alpha_0},$$

chaque différentiation portant sur tout ce qui suit,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{q-1}$  étant des fonctions de  $x$  et de  $y$ . La transformation (21) se décompose en  $q$  transformations du premier ordre :

$$z_1 = \alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{\alpha_0}, \quad z_2 = \alpha_0 \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial y} \frac{z_1}{\alpha_0 \varepsilon_1}, \quad z_3 = \alpha_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{z_2}{\alpha_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2} \text{ etc.}$$

Et comme  $z_1$  est définie par l'équation (43), où

$$\sum_{i=1}^q \bar{A}_i \frac{\partial^{i-1}}{\partial y^{i-1}} \frac{z_1}{\alpha_0} \equiv \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{q-1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_{q-1}} \frac{\partial}{\partial y} \dots \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{z_1}{\alpha_0 \varepsilon_1},$$

la transformation  $z_2 = \alpha_0 \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial y} \frac{z_1}{\alpha_0 \varepsilon_1}$  est une transformation  $(t_1)$  de l'équation (43). Il

en suit directement que la transformation (21) se décompose en  $q$  transformations  $(t_1)$ .

Je désigne une transformation du type

$$z_2 = \alpha_0 \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{\alpha_0}$$

comme une transformation  $(t_2)$ , et, en général, je désigne une transformation du type

$$z_j = \alpha_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{j-1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_{j-1}} \frac{\partial}{\partial y} \dots \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{\alpha_0} \quad (q \geq j \geq 1)$$

comme une transformation  $(t_j)$  de l'équation (20). Je désignerai aussi la transformation complètement déterminée  $(t_q)$  comme la transformation  $(T_1)$ .



Comme la transformation

$$z_j = \alpha_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{j-1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_{j-1}} \frac{\partial}{\partial y} \dots \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial y} z$$

se décompose en  $j$  transformations  $(t_1)$ , l'équation (20) est ramenée par la transformation  $(t_j)$  à une équation de même type et de même ordre au plus. La condition nécessaire et suffisante pour que la transformation  $(t_j)$  conduise à une équation d'ordre  $n - s$  est que l'équation (20) admette  $s$   $X$ -intégrales distinctes

$$\lambda_i X_i, \text{ où } \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_{j-1}} \frac{\partial}{\partial y} \dots \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\lambda_i}{\alpha_0} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

Nous allons maintenant appliquer la transformation

$$z_j = \alpha_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{j-1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_{j-1}} \frac{\partial}{\partial y} \dots \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial y} z$$

à l'équation (20), et nous partons de la supposition que l'équation (20) n'admette pas d'intégrale de la forme

$$\lambda X, \text{ où } \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_{j-1}} \frac{\partial}{\partial y} \dots \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\lambda}{\alpha_0} = 0.$$

L'équation qui définit  $z_j$  est d'ordre  $n$ . Comme  $z$  peut s'exprimer linéairement à l'aide de  $z_1$  et de dérivées de  $z_1$  (voir l'équation (42)), et que de même  $z_1$  peut s'exprimer linéairement à l'aide de  $z_2$  et de dérivées de  $z_2$  etc.,  $z$  peut s'exprimer linéairement à l'aide de  $z_j$  et de dérivées de  $z_j$ . Il en suit que l'équation (20) et l'équation en  $z_j$  s'intègrent en même temps; de toute solution de l'une des équations, l'on obtient sans intégration une solution de l'autre équation.

Supposons que l'équation (20) admette les  $s$   $X$ -intégrales (29) et qu'elles ne puissent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur à  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_s + 1$ ;  $\alpha_{0i}$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) sont  $s$  intégrales distinctes de l'équation (33), et l'intégrale  $\sum_{i=1}^s \zeta_i$  ne s'annule que pour  $X_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ). Supposons ensuite qu'existent les  $r$  relations

$$\lambda_k = \sum_{i=1}^{h_k} f_{ik}(x) \alpha_{0i} \quad \left( \begin{matrix} k = 1, 2, \dots, r \\ h_1 < h_2 < \dots < h_r \leq s \end{matrix} \right),$$

où

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_{j-1}} \frac{\partial}{\partial y} \dots \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\lambda_k}{\alpha_0} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, r)$$

$$f_{h_k k}(x) \neq 0, \quad f_{h_l k}(x) = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, k-1),$$

et que ces  $r$  relations soient les seules du type considéré. En effectuant la substitution

$$X_{h_k} = f_{h_k k}(x) \bar{X}_{h_k} \quad (k = 1, 2, \dots, r),$$

$$X_i = \bar{X}_i + \sum_{k=1}^r f_{ik}(x) \bar{X}_{h_k}^{(m_p - m_i)} \quad p = h_k, \quad (i \neq h_1, h_2, \dots, h_r),$$

les  $r$   $X$ -intégrales qui correspondent à  $\alpha_{0h_k}$  ( $k = 1, 2, \dots, r$ ) seront remplacées par  $r$   $X$ -intégrales de même rang qui correspondent à  $\lambda_k$  ( $k = 1, 2, \dots, r$ ). Nous pouvons supposer que la substitution en question ait déjà été effectuée. Ainsi nous avons

$$\lambda_k = \alpha_{0h_k} \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$

L'équation par laquelle  $z_j$  est définie admet les  $s$   $X$ -intégrales

$$(\zeta_i)_j = \alpha_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{j-1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_{j-1}} \frac{\partial}{\partial y} \dots \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\zeta_i}{\alpha_0} \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

Les intégrales  $(\zeta_i)_j$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) sont de rang  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_{h_1}, \dots, m_{h_2}, \dots, m_{h_r}, \dots, m_s + 1$  au plus. Comme  $z$  peut s'exprimer linéairement à l'aide de  $z_j$  et de dérivées de  $z_j$ , l'intégrale  $\sum_{i=1}^s (\zeta_i)_j$  ne s'annule pour d'autre système de valeurs des fonctions arbitraires que pour  $X_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ), puisque l'intégrale  $\sum_{i=1}^s \zeta_i$  ne s'annule que pour  $X_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ). Nous allons voir qu'aucune relation de la forme

$$\sum_{i=1}^q f_i(x) \alpha_{0i} + \sum_{k=1}^r g_k(x) \alpha_{1h_k} = 0,$$

où  $\alpha_{0i}$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) sont  $q$  intégrales distinctes de l'équation (33), ne peut exister. En effet, si une relation de cette forme existait, nous aurions

$$\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \sum_{k=1}^r g_k(x) \alpha_{1h_k} = 0$$

et, en tenant compte de l'équation (44), nous aurions

$$\sum_{i=0}^q \left( A_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) \sum_{k=1}^r g_k(x) \alpha_{0h_k} = 0,$$

ce qui voudrait dire que  $\sum_{k=1}^r g_k(x) \alpha_{0h_k} X$  serait une intégrale de l'équation (20), et cela est contraire à l'hypothèse. Il en suit (d'après la proposition 1) que les  $s$   $X$ -intégrales  $(\zeta_i)_j$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) sont de rang  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_{h_1}, \dots, m_{h_2}, \dots, m_{h_r}, \dots, m_s + 1$  et qu'elles ne peuvent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur.

Aussi les autres résultats, obtenus pour la transformation  $(t_1)$  et qui ont été donnés dans la proposition 4, peuvent facilement être étendus à la transformation  $(t_j)$ .

Toutes les transformations  $(t_1), (t_2), \dots, (t_q)$  peuvent être considérées comme des transformations de Laplace correspondant au système de caractéristiques  $x = \text{const.}$  De ces transformations c'est la transformation  $(t_q)$  [aussi désignée  $(T_1)$ ] qui étant complètement déterminée a le plus grand intérêt pratique.

Je désigne l'équation (20) par la lettre  $(E)$ . Par l'application répétée de la transformation  $(T_1)$ , on obtient une série d'équations de même type, que je désigne par  $(E_1), (E_2), (E_3)$  etc. L'équation adjointe (23) est désignée par  $(E')$ ; la transformation  $(T_1)$ , appliquée plusieurs fois de suite à l'équation  $(E')$ , conduit à une série

d'équations de même type, que je désigne par  $(E'_1)$ ,  $(E'_2)$ ,  $(E'_3)$  etc. Ces désignations sont identiques à celles que Darboux a employées pour l'équation (1).

L'équation  $(E_1)$  peut être obtenue de la manière suivante En appliquant la transformation (21)

$$z_q = \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i},$$

l'équation (20) peut s'écrire

$$(46) \quad \left( \frac{\partial}{\partial x} + B_q \right) z_q = \sum_{i=0}^{q-1} P_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i},$$

où  $P_i = \frac{\partial A_i}{\partial x} + A_i B_q - B_i$ . Supposons que l'équation (20) admette  $s$ , et pas plus de  $s$ ,  $X$ -intégrales distinctes de rang 1, où  $0 \leq s < q$ . En différentiant l'équation (46)  $q - s$  fois par rapport à  $y$  et l'équation (21)  $q - s - 1$  fois par rapport à  $y$  et en éliminant entre ces  $2(q - s) + 1$  équations

$$\frac{\partial^h}{\partial y^h} \left( \frac{\partial}{\partial x} + B_q \right) z_q = \sum_{i=0}^{h+q-1} p_{ih} \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \quad (h = 0, 1, \dots, q - s),$$

$$\frac{\partial^h z_q}{\partial y^h} = \sum_{i=0}^{h+q} a_{ih} \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \quad (h = 0, 1, \dots, q - s - 1)$$

pour la désignation  $a_{ih}$ ,  $p_{ih}$  voir page 23] les  $2(q - s)$  quantités  $\frac{\partial^{2q-s-1} z}{\partial y^{2q-s-1}}$ ,  $\frac{\partial^{2q-s-2} z}{\partial y^{2q-s-2}}, \dots, \frac{\partial^s z}{\partial x^s}$ , nous obtiendrons l'équation :

$$(46') \quad \begin{vmatrix} p_{q+j-2, j-1} & p_{q+j-3, j-1} & p_{q+j-4, j-1} & \dots & p_{q-j+1, j-1} & \frac{\partial^{j-1}}{\partial y^{j-1}} \left( \frac{\partial}{\partial x} + B_q \right) z_q \\ 0 & p_{q+j-3, j-2} & p_{q+j-4, j-2} & \dots & p_{q-j+1, j-2} & \frac{\partial^{j-2}}{\partial y^{j-2}} \left( \frac{\partial}{\partial x} + B_q \right) z_q \\ 0 & 0 & p_{q+j-4, j-3} & \dots & p_{q-j+1, j-3} & \frac{\partial^{j-3}}{\partial y^{j-3}} \left( \frac{\partial}{\partial x} + B_q \right) z_q \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & p_{q-j+1, 0} & \frac{\partial z_q}{\partial x} + B_q z_q \\ a_{q+j-2, j-2} & a_{q+j-3, j-2} & a_{q+j-4, j-2} & \dots & a_{q-j+1, j-2} & \frac{\partial^{j-2} z_q}{\partial y^{j-2}} \\ 0 & a_{q+j-3, j-3} & a_{q+j-4, j-3} & \dots & a_{q-j+1, j-3} & \frac{\partial^{j-3} z_q}{\partial y^{j-3}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & a_{q-j+1, 0} & z_q \end{vmatrix} = \sum_{i=0}^{q-j} P_{ij} \frac{\partial^i z}{\partial y^i},$$

où  $j = q - s + 1$ . Comme nous avons supposé que l'équation (20) admette  $s$   $X$ -intégrales distinctes de rang 1, nous avons

$$\sum_{i=0}^{s-1} P_{i, q-s+1} \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \equiv 0.$$



Et l'équation (46'), où  $j = q - s + 1$ , est justement l'équation  $(E_1)$ . L'équation  $(E_1)$  est de même type que l'équation (20) et d'ordre  $n - s$ , résultat déjà obtenu. Supposons  $s > 0$ . L'équation (20) peut se mettre sous la forme (37), et la transformation  $(T_1)$  de l'équation (20) peut être décomposée en deux transformations complètement déterminées, c'est-à-dire

$$z_s = \sum_{i=0}^s \frac{P_{i, q-s}}{P_{s, q-s}} \frac{\partial^i z}{\partial y^i}, \quad z_q = \sum_{i=0}^{q-s} M_i \frac{\partial^i z_s}{\partial y^i};$$

cette dernière transformation est la transformation  $(T_1)$  de l'équation

$$\sum_{i=0}^{q-s} \left( M_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + N_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z_s = 0.$$

$z$  ne peut s'exprimer au moyen de dérivées de  $z_q$ ; mais l'expression  $\sum_{i=0}^s P_{i, q-s} \frac{\partial^i z}{\partial y^i}$  est une fonction linéaire et homogène de  $z_q$  et de dérivées de  $z_q$ , les coefficients étant des fonctions déterminées de  $x$  et de  $y$ .

Nous pouvons maintenant facilement étendre les résultats obtenus pour la transformation  $(t_1)$  et qui ont été donnés dans les propositions 4 et 5 à la transformation  $(T_1)$ .

*Proposition 6.* En appliquant la transformation complètement déterminée (21)

$$z_q = \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i}$$

à une équation  $(E)$  qui n'admet pas de  $X$ -intégrale de rang 1, l'on obtient une équation  $(E_1)$  de même type et de même ordre. L'intégration des deux équations  $(E)$  et  $(E_1)$  constitue deux problèmes équivalents; de toute intégrale de l'une des deux équations, l'on obtient sans intégration une solution de l'autre équation. Si l'équation  $(E)$  admet  $s$   $X$ -intégrales de rang  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_s + 1$  qui ne peuvent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur, l'équation  $(E_1)$  admet  $s$   $X$ -intégrales de rang  $m_1, m_2, \dots, m_s$  qui ne peuvent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur, et inversement. Si l'équation  $(E)$  admet une  $Y$ -intégrale de rang  $r + 1$ , l'équation  $(E_1)$  admet une  $Y$ -intégrale de rang  $r + q + 1$ , et inversement. L'équation  $(E_1)$  ne peut admettre une  $Y$ -intégrale de rang inférieur à  $q + 1$ . Lorsque l'intégrale générale de l'une des deux équations  $(E)$  et  $(E_1)$  est représentée par  $n$  intégrales distinctes de la forme d'Euler, il en est de même de l'autre équation, et le nombre caractéristique est le même pour les deux équations  $(E)$  et  $(E_1)$ .

*Proposition 7.* Si l'on applique la transformation complètement déterminée (21)

$$z_q = \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i}$$

à une équation  $(E)$  qui admet  $s_1$  — et pas plus de  $s_1$  —  $X$ -intégrales distinctes de rang 1, l'on obtient une équation  $(E_1)$  de même type et d'ordre  $n - s_1$ . Si

l'équation  $(E)$  admet, outre les  $s_1$   $X$ -intégrales de rang 1,  $s_2$   $X$ -intégrales de rang  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_{s_2} + 1$  et que les  $s_1 + s_2$   $X$ -intégrales ne puissent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur, l'équation  $(E_1)$  admet  $s_2$   $X$ -intégrales de rang  $m_1, m_2, \dots, m_{s_2}$  qui ne peuvent être remplacées par des  $X$  intégrales de rang inférieur, et inversement. Si l'équation  $(E)$  admet une  $Y$ -intégrale de rang  $r + 1$ , l'équation  $(E_1)$  admet une  $Y$ -intégrale de rang  $r + q + 1$  *au plus*. Mais si l'équation  $(E_1)$  admet une  $Y$ -intégrale, il n'en suit nullement que l'équation  $(E)$  admette une  $Y$ -intégrale. Lorsque l'intégrale générale de l'équation  $(E)$  est représentée par des intégrales de la forme d'Euler, il en est de même de l'équation  $(E_1)$ ; le nombre caractéristique peut être moindre pour l'équation  $(E_1)$ . Nous ne pouvons conclure réciproquement que lorsque l'intégrale générale de l'équation  $(E_1)$  est représentée par des intégrales de la forme d Euler, il en soit de même de l'équation  $(E)$ .

En appliquant à l'équation  $(E)$  la transformation  $(T_1)$  plusieurs fois de suite, nous pouvons reconnaître si l'équation  $(E)$  admet une  $X$ -intégrale. L'application répétée de la transformation  $(T_1)$  à l'équation  $(E)$  donne une série d'équations de même type  $(E_1), (E_2), (E_3)$  etc.; dans cette série chaque équation suivante est de même ordre au plus que l'équation précédente. La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation  $(E)$  admette  $s$   $X$ -intégrales distinctes de rang inférieur à  $m + 2$  est que l'équation  $(E_{m+1})$  soit d'ordre  $n - s$ . Supposons que les équations  $(E_1), (E_2), \dots, (E_{m_1})$  soient d'ordre  $n$  et que l'équation  $(E_{m_1+1})$  soit d'ordre  $n - 1$ . L'équation  $(E_{m_1})$  admet alors une  $X$ -intégrale de rang 1; cette intégrale est obtenue par une quadrature, et de cette intégrale l'on obtient sans intégration une  $X$ -intégrale de rang  $m_1 + 1$  de l'équation  $(E)$ . Pour reconnaître si l'équation  $(E)$  admet encore d'autres  $X$ -intégrales, nous pouvons répéter la transformation  $(T_1)$ , ou, autrement dit, former les équations  $(E_{m_1+2}), (E_{m_1+3}), (E_{m_1+4}), \dots$ , d'ordre  $n - 1$  au plus. Supposons que les équations  $(E_{m_1+1}), (E_{m_1+2}), \dots, (E_{m_2})$ , soient d'ordre  $n - 1$  et que l'équation  $(E_{m_2+1})$  soit d'ordre  $n - 2$ . Dans ce cas, l'équation  $(E_{m_2})$  admet une  $X$ -intégrale de rang 1, qui s'obtient par une quadrature; cette intégrale nous donne sans intégration une  $X$ -intégrale de rang  $m_2 - m_1$  de l'équation  $(E_{m_1+1})$  et par une quadrature, on obtient une  $X$ -intégrale de rang  $m_2 - m_1 + 1$  de l'équation  $(E_{m_1})$ ; l'équation  $(E)$  admet par suite une  $X$ -intégrale de rang  $m_2 + 1$ , et pour obtenir cette  $X$ -intégrale de l'équation  $(E)$ , il ne faut que des quadratures. Ainsi nous pouvons continuer. Mais il est à remarquer que si l'ordre de l'équation  $(E_m)$  est diminué de  $s$  unités ( $s > 1$ ) par l'application de la transformation  $(T_1)$  — c'est-à-dire l'ordre de l'équation  $(E_{m+1})$  est moindre de  $s$  unités que l'ordre de l'équation  $(E_m)$  — et que par suite l'équation  $(E)$  admette  $s$   $X$ -intégrales distinctes de rang  $m + 1$ , il faudra intégrer une équation différentielle linéaire d'ordre  $s$  pour obtenir les  $s$   $X$ -intégrales de rang  $m + 1$  et les  $X$ -intégrales éventuelles de rang supérieur. Ainsi pour obtenir les  $X$ -intégrales de l'équation  $(E)$ , il faut l'intégration d'équations différentielles linéaires du premier ordre (ou en cas exceptionnel d'ordre supérieur). Supposons que nous ayons obtenu de cette manière  $s$   $X$ -intégrales de rang  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_s + 1$  de l'équation  $(E)$ ; les  $s$   $X$ -intégrales ne peuvent être remplacées par des  $X$ -inté-



grales de rang inférieur. Pour obtenir l'intégrale générale de l'équation (E), il faut encore l'intégration d'une équation du type (20) et d'ordre  $n - s$ . Nous voyons ainsi que si l'équation (E) admet  $q$  X-intégrales distinctes, l'intégration de l'équation (E) peut être ramenée à l'intégration d'équations différentielles linéaires.

Voilà donc une méthode pour obtenir les X-intégrales de l'équation (20). Par l'application de la transformation complètement déterminée (21)  $m$  fois de suite à l'équation (20) nous pouvons reconnaître si l'équation admet une X-intégrale de rang inférieur à  $m + 1$  et, dans ce cas, ramener la détermination de cette X-intégrale ou de ces X-intégrales à l'intégration d'équations différentielles linéaires. Les résultats reçus en appliquant la transformation de Laplace (21) à l'équation (20) sont tout à fait analogues à ceux obtenus pour la transformation (6), appliquée à l'équation (1).

D'après LE ROUX (voir pages 10, 11), l'équation (20) admet une transformation de Laplace correspondant au système de caractéristiques  $y = \text{const.}$ , c'est-à-dire la transformation complètement déterminée (21'); c'est la transformation la plus simple qui permette de diminuer le rang de la Y-intégrale, le caractère essentiel d'une transformation de Laplace correspondant à la variable caractéristique  $y$ . Mais si l'on applique la transformation (21') à l'équation (20),  $\theta$  est en général définie par  $q$  équations linéaires d'ordre  $2q$ . Il n'est donc pas commode d'appliquer la transformation (21') pour simplifier l'intégration de l'équation (20). Nous verrons qu'il existe des transformations linéaires par lesquelles l'équation (20) est ramenée à une équation de même type et de même ordre au plus, et qui, appliquées à une équation (20) admettant une Y-intégrale, diminuent le rang de la Y-intégrale de 1, 2, ...  $q$  unités respectivement, à savoir les transformations qui sont inverses aux transformations  $(t_1)$ ,  $(t_2)$ , ...  $(t_q)$ . Il est tout naturel d'examiner si ces transformations peuvent être considérées comme des transformations de Laplace à l'équation (20), correspondant au système de caractéristiques  $y = \text{const.}$

Supposons que par la transformation (40) l'équation (20) soit ramenée à une équation de même ordre.  $z_1$  est définie par l'équation (43). Par la transformation

$$z = - \frac{\alpha_0}{B_0} \sum_{i=1}^q \left( \bar{A}_i \frac{\partial^i}{\partial x \partial y^{i-1}} + \bar{B}_i \frac{\partial^{i-1}}{\partial y^{i-1}} \right) \frac{z_1}{\alpha_0},$$

l'équation (43) est ramenée à l'équation (20). Nous disons aussi que cette transformation est inverse à la transformation (40).

Maintenant nous allons appliquer la transformation en question à l'équation (20). L'équation (20) peut toujours s'écrire

$$(47) \quad \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \gamma \sum_{i=0}^{q-1} \left( R_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + S_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \right) \right] + Tz = 0,$$

où  $R_i$ ,  $S_i$ ,  $T$ ,  $\gamma$  sont des fonctions de  $x$  et de  $y$ ;  $R_{q-1} = 1$ . Posons  $T \neq 0$ , ou, autrement dit, supposons que l'équation adjointe (23) n'admette pas l'intégrale  $\gamma X$ . Par la transformation



$$(48) \quad z_{-1} = \sum_{i=0}^{q-1} \left( R_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + S_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \right),$$

l'équation (47) est ramenée à l'équation

$$(49) \quad T \sum_{i=0}^{q-1} \left( R_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + S_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) \left( \frac{1}{T\gamma} \frac{\partial}{\partial y} (\gamma z_{-1}) \right) + T z_{-1} = 0,$$

qui est du même type et du même ordre que l'équation (20). La transformation (48) est inverse à la transformation

$$z = - \frac{1}{T\gamma} \frac{\partial}{\partial y} (\gamma z_{-1}),$$

qui, à un facteur près, est une transformation  $(t_1)$ . La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (20) puisse se mettre sous la forme (47) où  $T \neq 0$  est que l'équation adjointe (23) n'admette pas  $q$   $X$ -intégrales distinctes de rang 1, ou, autrement dit, que l'équation (20) n'admette pas une  $Y$ -intégrale de rang 1.

Je dénomme la transformation (48) une transformation  $(t_{-1})$ , puisqu'elle est inverse à une transformation qui, à un facteur près, est une transformation  $(t_1)$ .

L'intégration de l'une des équations (47) et (49) entraîne celle de l'autre, et les équations admettent le même nombre d'intégrales de la forme d'Euler (d'après la proposition 4).

Supposons que l'équation (20) admette  $s$   $X$ -intégrales distinctes de rang  $m_1 + 1$ ,  $m_2 + 1$ , ...,  $m_s + 1$  qui ne puissent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur. Soient les  $s$   $X$ -intégrales de l'équation (20) les intégrales (29). L'équation (49) admet les  $s$   $X$ -intégrales

$$(\zeta_h)_{-1} = \sum_{i=0}^{q-1} \left( R_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + S_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) \zeta_h \quad (h = 1, 2, \dots, s).$$

$\alpha_{0h}$  ( $h = 1, 2, \dots, s$ ) sont  $s$  intégrales distinctes de l'équation

$$(49') \quad \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \gamma \sum_{i=0}^{q-1} R_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} \right] = 0.$$

Si  $\alpha_{0h}$  ( $h = 1, 2, \dots, s$ ) sont des intégrales de l'équation

$$(49'') \quad \sum_{i=0}^{q-1} R_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0,$$

les intégrales  $(\zeta_h)_{-1}$  ( $h = 1, 2, \dots, s$ ) sont de rang  $m_1 + 1$ ,  $m_2 + 1$ , ...,  $m_s + 1$  au plus; et il résulte de la proposition 4 que les intégrales  $(\zeta_h)_{-1}$  ( $h = 1, 2, \dots, s$ ) sont de rang  $m_1 + 1$ ,  $m_2 + 1$ , ...,  $m_s + 1$  et ne peuvent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur. Supposons que non toutes les  $\alpha_{0h}$  ( $h = 1, 2, \dots, s$ ) soient des intégrales de l'équation (49''); posons

$$\sum_{i=0}^{q-1} R_i \frac{\partial^i \alpha_{0h}}{\partial y^i} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, j-1), \quad \sum_{i=0}^{q-1} R_i \frac{\partial^i \alpha_{0j}}{\partial y^i} \neq 0$$

En appliquant la substitution

$$X_j = \bar{X}_j + \sum_{h=j+1}^s f_h(x) X_h^{(m_h-m_j)},$$

nous remplaçons les  $s-j$  intégrales  $\zeta_h$  ( $h = j+1, j+2, \dots, s$ ) par  $s-j$   $X$ -intégrales de même rang qui correspondent à

$$\alpha_{0h} + f_h(x) \alpha_{0j} \quad (h = j+1, j+2, \dots, s).$$

Comme  $\alpha_{0h}$  ( $h = 1, 2, \dots, s$ ) sont  $s$  intégrales distinctes de l'équation (49') nous pouvons disposer de  $f_h(x)$  ( $h = j+1, j+2, \dots, s$ ) de telle manière que

$$\alpha_{0h} + f_h(x) \alpha_{0j} \quad (h = j+1, j+2, \dots, s)$$

seront des intégrales de l'équation (49''). Supposons que la substitution en question ait déjà été appliquée. Nous avons ainsi

$$\sum_{i=0}^{q-1} R_i \frac{\partial^i \alpha_{0h}}{\partial y^i} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, s), \quad \sum_{i=0}^{q-1} R_i \frac{\partial^i \alpha_{0j}}{\partial y^i} \neq 0.$$

Les intégrales  $(\zeta_h)_{-1}$  ( $h = 1, 2, \dots, s$ ) sont de rang  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_{j-1} + 1, m_j + 2, m_{j+1} + 1, \dots, m_s + 1$  au plus; et il suit de la proposition 4 qu'elles sont de rang  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_{j-1} + 1, m_j + 2, m_{j+1} + 1, \dots, m_s + 1$  et qu'elles ne peuvent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur.

De la proposition 4 il résulte directement que si l'équation (20) admet une  $Y$ -intégrale de rang  $r+1$ , l'équation (49) admet une  $Y$ -intégrale de rang  $r$ . La transformation en question peut ainsi être appliquée à une équation (20) qui admet une  $Y$ -intégrale de rang supérieur à 1 pour ramener celle-ci à une équation de même type et de même ordre qui admet une  $Y$ -intégrale de rang 1. Mais la transformation  $(t_{-1})$  n'est évidemment pas complètement déterminée, si  $q > 1$ , pas plus que la transformation  $(t_1)$ .

*Proposition 8.* Lorsque l'équation (20) n'admet pas une  $Y$ -intégrale de rang 1, l'équation peut s'écrire

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \gamma \sum_{i=0}^{q-1} \left( R_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + S_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \right) \right] + Tz = 0; \quad T \neq 0; \quad R_{q-1} = 1.$$

La transformation

$$z_{-1} = \sum_{i=0}^{q-1} \left( R_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + S_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \right)$$

conduit à l'équation (49)

$$T \sum_{i=0}^{q-1} \left( R_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + S_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) \left( \frac{1}{T\gamma} \frac{\partial}{\partial y} (\gamma z_{-1}) \right) + T z_{-1} = 0.$$

La transformation en question est inverse à la transformation

$$z = -\frac{1}{T\gamma} \frac{\partial}{\partial y} (\gamma z - 1),$$

qui, à un facteur près, est une transformation  $(t_1)$ . L'intégration de l'une des équations (49) et (20) entraîne celle de l'autre; les équations (20) et (49) admettent le même nombre d'intégrales distinctes de la forme d'Euler. — Supposons que l'équation (20) admette  $s$   $X$ -intégrales distinctes de rang  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_s + 1$  qui ne puissent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur. Soient les  $s$   $X$ -intégrales de l'équation (20) les intégrales (29); si  $\alpha_{0h}$  ( $h = 1, 2, \dots, s$ ) sont  $s$  intégrales de l'équation

$$\sum_{i=0}^{q-1} R_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0,$$

l'équation (49) admet  $s$   $X$ -intégrales de rang  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_s + 1$  qui ne peuvent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur, et si

$$\sum_{i=0}^{q-1} R_i \frac{\partial^i \alpha_{0h}}{\partial y^i} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, j-1), \quad \sum_{i=0}^{q-1} R_i \frac{\partial^i \alpha_{0j}}{\partial y^i} \neq 0,$$

l'équation (49) admet  $s$   $X$ -intégrales de rang  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_{j-1} + 1, m_j + 2, m_{j+1} + 1, \dots, m_s + 1$  qui ne peuvent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur. — Si l'équation (20) admet une  $Y$ -intégrale de rang  $r + 1$ , l'équation (49) admet une  $Y$ -intégrale de rang  $r$ , et inversement. (Comparer en outre la proposition 4).

Nous savons que, pour l'équation (1), ce fait notable a lieu: Si l'on applique la transformation (6) à l'équation (1) et la transformation

$$\bar{u}_{-1} = \frac{1}{h} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - bu \right), \quad \text{où } h = \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c,$$

à l'équation adjointe (14), l'on obtient deux équations qui sont encore adjointes. Nous allons maintenant prouver que le cas analogue a lieu pour l'équation (20).

Nous avons trouvé (pages 28, 29) que la transformation (40) appliquée à l'équation (20) conduit à l'équation (43), pourvu que  $\bar{B}_0 \neq 0$ . Comme l'équation (20) peut s'écrire

$$\alpha_0 \sum_{i=1}^q \left( \bar{A}_i \frac{\partial^i}{\partial x \partial y^{i-1}} + \bar{B}_i \frac{\partial^{i-1}}{\partial y^{i-1}} \right) \frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{\alpha_0} + \bar{B}_0 z = 0,$$

l'équation adjointe (23) peut s'écrire

$$\frac{1}{\alpha_0} \frac{\partial}{\partial y} \sum_{i=1}^q (-1)^{i+1} \left[ \frac{\partial^i}{\partial x \partial y^{i-1}} (\bar{A}_i \alpha_0 u) - \frac{\partial^{i-1}}{\partial y^{i-1}} (\bar{B}_i \alpha_0 u) \right] + \bar{B}_0 u = 0.$$

L'adjointe de l'équation (43) peut s'écrire

$$(50) \quad \frac{1}{\alpha_0} \sum_{i=1}^q (-1)^{i+1} \left[ \frac{\partial^i}{\partial x \partial y^{i-1}} \left( \frac{\bar{A}_i}{\bar{B}_0} \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_0 \bar{B}_0 u_{-1}) \right) - \frac{\partial^{i-1}}{\partial y^{i-1}} \left( \frac{\bar{B}_i}{\bar{B}_0} \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_0 \bar{B}_0 u_{-1}) \right) \right] + \bar{B}_0 u_{-1} = 0.$$



Nous voyons ainsi que par la transformation

$$u = \frac{1}{\alpha_0 \bar{B}_0} \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_0 \bar{B}_0 u_{-1}),$$

qui est une transformation  $(t_1)$ , l'équation (50) est ramenée à l'équation (23) et que par la transformation

$$(50') \quad u_{-1} = -\frac{1}{\alpha_0 \bar{B}_0} \sum_{i=1}^q (-1)^{i+1} \left[ \frac{\partial^i}{\partial x \partial y^{i-1}} (\bar{A}_i \alpha_0 u) - \frac{\partial^{i-1}}{\partial y^{i-1}} (\bar{B}_i \alpha_0 u) \right],$$

qui est une transformation  $(t_{-1})$ , à un facteur près, l'équation (23) est ramenée à l'équation (50). Cela nous montre que si l'équation (20) est ramenée par une transformation  $(t_1)$   $[(t_{-1})$  respectivement] à une équation de même ordre, il existe toujours une transformation  $(t_1)$   $[(t_{-1})$  respectivement] par laquelle l'adjointe de l'équation transformée est ramenée à l'équation (23).

Nous verrons que des résultats analogues seront obtenus, si l'on applique une transformation  $(t_2)$  à l'équation (20). Nous pouvons écrire [voir page 35]

$$\alpha_0 \sum_{i=1}^q \bar{A}_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \frac{z}{\alpha_0} \equiv \alpha_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{q-1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_{q-1}} \frac{\partial}{\partial y} \dots \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{\alpha_0}.$$

Appliquons maintenant la transformation

$$z_2 = \alpha_0 \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{\alpha_0}$$

à l'équation (20), ou, autrement dit, la transformation

$$z_2 = \alpha_0 \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial y} \frac{z_1}{\alpha_0 \varepsilon_1}$$

à l'équation (43). L'équation (43) peut se mettre sous la forme

$$\alpha_0 \varepsilon_1 \sum_{i=1}^q \left( \bar{A}_{i1} \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + \bar{B}_{i1} \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) \frac{z_1}{\alpha_0 \varepsilon_1} + \bar{B}_{01} z_1 = 0,$$

où

$$\alpha_0 \varepsilon_1 \sum_{i=1}^q \bar{A}_{i1} \frac{\partial^i}{\partial y^i} \frac{z_1}{\alpha_0 \varepsilon_1} \equiv \alpha_0 \bar{B}_0 \frac{\partial}{\partial y} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{q-1}}{\bar{B}_0} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_{q-1}} \frac{\partial}{\partial y} \dots \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{z_1}{\alpha_0 \varepsilon_1}.$$

Si  $\bar{B}_{01} \neq 0$ ,  $z_2$  est définie par une équation qui peut s'écrire

$$\alpha_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sum_{i=1}^q \left( \bar{A}_{i2} \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + \bar{B}_{i2} \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) \frac{z_2}{\alpha_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2} + \bar{B}_{02} z_2 = 0,$$

où

$$\alpha_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sum_{i=1}^q \bar{A}_{i2} \frac{\partial^i}{\partial y^i} \frac{z_2}{\alpha_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2} \equiv \alpha_0 \varepsilon_1 \bar{B}_{01} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\bar{B}_0}{\varepsilon_1 \bar{B}_{01}} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{q-1}}{\bar{B}_0} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_{q-1}} \frac{\partial}{\partial y} \dots \frac{1}{\varepsilon_3} \frac{\partial}{\partial y} \frac{z_2}{\alpha_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2},$$

Désignons l'intégrale de l'adjointe de cette dernière équation par  $u_{-2}$ . Nous aurons alors

$$u_{-1} = \frac{1}{\alpha_0 \varepsilon_1 \bar{B}_{01}} \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_0 \varepsilon_1 \bar{B}_{01} u_{-2}),$$

et comme

$$u = \frac{1}{\alpha_0 \bar{B}_0} \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_0 \bar{B}_0 u_{-1}),$$

nous obtiendrons

$$u = \frac{1}{\alpha_0 \bar{B}_0} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\bar{B}_0}{\varepsilon_1 \bar{B}_{01}} \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_0 \varepsilon_1 \bar{B}_{01} u_{-2}),$$

qui est une transformation  $(t_2)$ . Nous avons ainsi reçu le résultat suivant: Si l'équation (20) est ramenée, par la transformation

$$z_2 = \alpha_0 \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{\alpha_0},$$

à une équation de même ordre, l'adjointe de cette dernière équation sera ramenée à l'équation (23) par la transformation

$$u = \frac{1}{\alpha_0 \bar{B}_0} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\bar{B}_0}{\varepsilon_1 \bar{B}_{01}} \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_0 \varepsilon_1 \bar{B}_{01} u_{-2}),$$

qui est une transformation  $(t_2)$ .

Nous pourrions continuer de cette manière en appliquant une transformation  $(t_3)$ ,  $(t_4)$  etc. à l'équation (20), et nous obtiendrons des résultats analogues.

*Proposition 9.* Lorsque l'équation (20) est ramenée à une équation de même ordre par une transformation  $(t_i)$ , il existe aussi une transformation  $(t_i)$  par laquelle l'adjointe de l'équation transformée est ramenée à l'équation (23); la proposition est valable pour  $i = 1, 2, \dots, q$  et pour  $i = -1$ .

Nous allons maintenant tirer quelques conclusions des propositions 8 et 9. Si nous supposons que l'équation (20) admette  $q$   $X$ -intégrales distinctes de rang  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_q + 1$  qui ne puissent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur, l'équation (20) peut être transformée, par l'application de  $\sum_{i=1}^q m_i$  transformations  $(t_1)$  convenablement choisies, à une équation de même type et de même ordre qui admet  $q$   $X$ -intégrales distinctes de rang 1; l'adjointe de cette dernière équation admet par suite une  $Y$ -intégrale de rang 1; d'après la proposition 9 cette équation adjointe peut être transformée à l'équation (23) par l'application de  $\sum_{i=1}^q m_i$  transformations  $(t_1)$  convenablement choisies; ainsi l'équation (23) admet une  $Y$ -intégrale de rang  $\sum_{i=1}^q m_i + 1$ . — Inversement, si nous supposons que l'équation (23) admette une  $Y$ -intégrale de rang  $r + 1$ , nous pourrions en appliquant  $r$  transformations  $(t_{-1})$  convenablement choisies ramener l'équation (23) à une équation de même type et de

même ordre qui admet une  $Y$ -intégrale de rang 1; l'adjointe de cette dernière équation admet  $q$   $X$ -intégrales distinctes de rang 1; d'après la proposition 9, cette équation adjointe peut être transformée à l'équation (20) par l'application de  $r$  transformations  $(t_{-1})$  convenablement choisies; ainsi l'équation (20) admet  $q$   $X$ -intégrales distinctes, et si les  $X$ -intégrales sont écrites sous une telle forme qu'elles ne puissent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur, la somme de leur rang est  $r + q$ .

*Proposition 10.* La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (20) admette une  $Y$ -intégrale est que l'équation adjointe (23) admette  $q$   $X$ -intégrales distinctes. Si l'équation (23) admet  $q$   $X$ -intégrales de rang  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_q + 1$  qui ne peuvent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur, l'équation (20) admet une  $Y$ -intégrale de rang  $\sum_{i=1}^q m_i + 1$ . Et réciproquement, lorsque l'équation (20) admet une  $Y$ -intégrale de rang  $r + 1$ , l'équation (23) admet  $q$   $X$ -intégrales distinctes et, si les  $X$ -intégrales sont écrites sous une telle forme qu'elles ne puissent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur, la somme de leur rang est  $r + q$ .

Par là est donnée une méthode pour reconnaître si l'équation (20) admet une  $Y$ -intégrale. Nous pouvons partir de l'équation adjointe (23) et examiner si cette équation admet  $q$   $X$ -intégrales distinctes. De cette manière nous pouvons reconnaître si l'équation (20) admet une  $Y$ -intégrale, mais nous n'avons pas avec cela obtenu l' $Y$ -intégrale, lorsque l'équation en admet une. Nous allons maintenant étudier les transformations inverses à  $(t_1), (t_2), \dots, (t_q)$ , rechercher à quel point ces transformations nous permettent de simplifier l'intégration de l'équation (20) et examiner si nous pouvons, par l'application de ces transformations, déterminer l' $Y$ -intégrale de l'équation (20), lorsque l'équation en admet une.

La transformation

$$(51) \quad z_j = \alpha_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{j-1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_{j-1}} \frac{\partial}{\partial y} \dots \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{\alpha_0} \equiv g(z)$$

est une transformation  $(t_j)$  de l'équation (20)

$$\sum_{i=0}^q \left( A_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \right) = 0, \quad \text{où} \quad \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \equiv \alpha_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{q-1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_{q-1}} \frac{\partial}{\partial y} \dots \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{\alpha_0}$$

[voir page 35]. Supposons maintenant que la transformation (51) conduise à une équation d'ordre  $n$ , ou autrement dit, que l'équation (20) n'admette pas d'intégrale de la forme  $\lambda X$ , où  $g(\lambda) = 0$ . Nous avons déjà vu que  $z$  peut s'exprimer linéairement à l'aide de  $z_j$  et de dérivées de  $z_j$ . Cela résulte aussi de ce qui suit. L'équation (20) peut s'écrire

$$(52) \quad \sum_{i=0}^{q-j} \left( M_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + N_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z_j + \sum_{i=0}^{j-1} L_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} = 0,$$



où  $z_j = g(z)$ ;  $M_i$ ,  $N_i$ ,  $L_i$  étant des fonctions déterminées de  $x$  et de  $y$ . En différenciant l'équation (52)  $j - 1$  fois par rapport à  $y$  et l'équation (51)  $j - 2$  fois par rapport à  $y$  et en éliminant entre ces  $2j - 1$  équations les  $2(j - 1)$  quantités  $\frac{\partial^{2(j-1)} z}{\partial y^{2(j-1)}}$ ,  $\frac{\partial^{2j-3} z}{\partial y^{2j-3}}$ ,  $\dots$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , nous obtiendrons une équation de la forme

$$\nu z = \sum_{i=0}^{q-1} \left( V_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + W_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z_j,$$

$V_i$ ,  $W_i$  et  $\nu$  étant des fonctions de  $x$  et de  $y$ ; en divisant par un facteur on peut ajouter la condition non essentielle que le coefficient de la plus haute dérivée de  $z_j$  qui se trouve dans la relation obtenue sera égal à 1. Comme nous avons supposé que  $z$  soit définie par une équation d'ordre  $n$ , nous aurons  $\nu \neq 0$ . Je nomme la transformation

$$\bar{z} = \sum_{i=0}^{q-1} \left( V_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + W_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z_j,$$

laquelle, à un facteur près, est inverse à une transformation  $(t_j)$ , une transformation  $(t_{-j})$  de l'équation qui définit  $z_j$ .

Une transformation  $(t_{-j})$  ( $q \geq j \geq 1$ ) de l'équation (20) doit par suite être de la forme

$$(53) \quad z_{-j} = \sum_{i=0}^{q-1} \left( T_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + U_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z,$$

$T_i$  et  $U_i$  étant des fonctions de  $x$  et de  $y$ . Il résulte de la proposition 9 et de la définition de la transformation  $(t_{-j})$  que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une transformation  $(t_{-j})$  à l'équation (20) est que l'équation adjointe (23) admette une transformation  $(t_j)$  par laquelle l'équation (23) est ramenée à une équation de même ordre. Et la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une transformation  $(t_j)$  par laquelle l'équation (23) est ramenée à une équation de même ordre est que l'équation (23) admette au plus  $q - j$  X-intégrales distinctes de rang 1. Avec la définition que j'ai donnée pour la transformation  $(t_{-j})$ , la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (20) admette une transformation  $(t_{-j})$  est ainsi que l'équation adjointe admette au plus  $q - j$  X-intégrales distinctes de rang 1.

Maintenant nous allons définir les coefficients  $T_i$  et  $U_i$  de l'équation (53) en fonction des coefficients de l'équation (20); nous partons de ce que l'équation (23) admet au plus  $q - j$  X-intégrales distinctes de rang 1. Comme la transformation (53) est inverse à une transformation  $(t_j)$ , à un facteur près, il existe une relation de la forme

$$(54) \quad \sum_{k=0}^j F_k \frac{\partial^k z_{-j}}{\partial y^k} = \mu z \quad (F_j = 1; \mu \neq 0),$$

$F_k$ ,  $\mu$  étant des fonctions de  $x$  et de  $y$ . Il en suit qu'il existe une identité de la forme

$$(54') \quad \sum_{k=0}^j F_k \frac{\partial^k}{\partial y^k} \sum_{i=0}^{q-1} \left( T_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + U_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z \equiv \sum_{k=0}^{j-1} G_k \frac{\partial^k}{\partial y^k} \sum_{i=0}^q \left( A_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z + \mu z,$$

$G_k$  étant des fonctions de  $x$  et de  $y$ . L'identité en question peut s'écrire

$$(54'') \quad \begin{aligned} \sum_{k=0}^j F_k \frac{\partial^k}{\partial y^k} \sum_{i=0}^{q-1} T_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} &\equiv \sum_{k=0}^{j-1} G_k \frac{\partial^k}{\partial y^k} \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i}, \\ \sum_{k=0}^j F_k \frac{\partial^k}{\partial y^k} \sum_{i=0}^{q-1} U_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} &\equiv \sum_{k=0}^{j-1} G_k \frac{\partial^k}{\partial y^k} \sum_{i=0}^q B_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} + \mu z. \end{aligned}$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une identité de la forme (54'') ait lieu est que l'équation (33) et l'équation

$$(54''') \quad \sum_{i=0}^{q-1} T_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0$$

admettent  $q - j$  intégrales distinctes communes. Les  $q$  coefficients  $T_i$  ( $i = 0, 1, \dots, q - 1$ ) doivent par suite remplir les  $q - j$  conditions nécessaires et suffisantes pour cela. Nous avons déjà vu (pages 23, 24) comment l'on obtient ces  $q - j$  conditions. Il va de soi que l'équation (54''') est au moins d'ordre  $q - j$ . Nous voyons aussi immédiatement que si l'équation (54''') est d'ordre  $q - s$ , nous avons  $U_i = 0$  ( $i = q - 1, q - 2, \dots, q - s + 1$ ).

Avant d'examiner quelles conditions les coefficients  $T_i$ ,  $U_i$  ( $i = 0, 1, \dots, q - 1$ ) doivent encore vérifier pour que l'identité (54') ait lieu, nous écrirons la transformation (53) sous une forme un peu modifiée.

Nous allons employer la désignation

$$\mathcal{E}_k(z) \equiv \sum_{i=k}^q (-1)^{q-i} \left[ \frac{\partial^{i+1-k}}{\partial x \partial y^{i-k}} (C_i z) - \frac{\partial^{i-k}}{\partial y^{i-k}} (D_i z) \right], \quad (k = 0, 1, \dots, q)$$

les coefficients  $C_i$  et  $D_i$  étant définies par les équations (38'). D'après cette désignation l'équation (20) s'écrit  $\mathcal{E}_0(z) = 0$ . En différentiant par rapport à  $y$  nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{E}_k(z) &\equiv \mathcal{E}_{k-1}(z) + (-1)^{q-k} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (C_{k-1} z) - D_{k-1} z \right] \\ &\equiv \mathcal{E}_{k-1}(z) + (-1)^{q-k} [C_{k-1} \mathcal{E}_q(z) + Q_{k-1} z] \quad (k = 1, 2, \dots, q) \end{aligned}$$

où  $Q_i = \frac{\partial C_i}{\partial x} + C_i D_q - D_i$  [voir page 26].

La plus haute dérivée de  $z$  dans l'expression  $\mathcal{E}_i(z)$  étant toujours  $\frac{\partial^{q+1-i} z}{\partial x \partial y^{q-i}}$ , la transformation (53) peut s'écrire

$$(55) \quad z_{-j} = \sum_{i=0}^{q-1} \left( T_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + U_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \right) \equiv \sum_{i=1}^q c_i \mathcal{E}_i(z) + \sum_{i=1}^q d_i \frac{\partial^{q-i} z}{\partial y^{q-i}},$$

$c_i$  et  $d_i$  étant des fonctions de  $x$  et de  $y$ . En différentiant par rapport à  $y$  nous obtenons

$$\frac{\partial z_{-j}}{\partial y} = \sum_{i=1}^q c'_i \mathcal{E}_i(z) + \sum_{i=1}^q c_i \mathcal{E}_{i-1}(z) + \sum_{i=1}^q (-1)^{q-i} c_i [C_{i-1} \mathcal{E}_q(z) + Q_{i-1} z] + \frac{\partial}{\partial y} \sum_{i=1}^q d_i \frac{\partial^{q-i} z}{\partial y^{q-i}},$$

où la désignation  $c'_i = \frac{\partial c_i}{\partial y}$  est employée. En introduisant les coefficients  $c_{q+1}$  et  $d_{q+1}$  définis par l'identité

$$\sum_{i=1}^{q+1} (-1)^{q-i} c_i [C_{i-1} \mathcal{E}_q(z) + Q_{i-1} z] \equiv d_{q+1} z,$$

nous obtiendrons

$$\frac{\partial z_{-j}}{\partial y} = \sum_{i=1}^q (c'_i + c_{i+1}) \mathcal{E}_i(z) + d_{q+1} z + \frac{\partial}{\partial y} \sum_{i=1}^q d_i \frac{\partial^{q-i} z}{\partial y^{q-i}},$$

puisque  $\mathcal{E}_0(z) = 0$ . De même, nous obtiendrons en introduisant les coefficients  $c_i, d_i$  ( $i = q+1, q+2, \dots, q+j$ ) définis par les  $j$  identités

$$\sum_{i=1}^{q+1} \left[ (-1)^{q-i} \sum_{h=0}^k \frac{k!}{h! (k-h)!} c_{i+h}^{(k-h)} [C_{i-1} \mathcal{E}_q(z) + Q_{i-1} z] \right] \equiv d_{q+k+1} z \quad (k = 0, 1, \dots, j-1)$$

les  $j$  équations

$$\frac{\partial^k z_{-j}}{\partial y^k} = \sum_{i=1}^q \sum_{h=0}^k \frac{k!}{h! (k-h)!} c_{i+h}^{(k-h)} \mathcal{E}_i(z) + \sum_{h=0}^{k-1} \frac{\partial^h}{\partial y^h} (d_{q+k-h} z) + \frac{\partial^k}{\partial y^k} \sum_{i=1}^q d_i \frac{\partial^{q-i} z}{\partial y^{q-i}};$$

$$(k = 1, 2, \dots, j)$$

la désignation  $c_i^{(h)} = \frac{\partial^h c_i}{\partial y^h}$  est employée ici. En substituant les expressions obtenues de  $\frac{\partial^k z_{-j}}{\partial y^k}$  ( $k = 0, 1, \dots, j$ ) dans l'équation (54), nous aurons

$$(55') \quad \sum_{k=0}^j \left[ F_k \sum_{i=1}^q \sum_{h=0}^k \frac{k!}{h! (k-h)!} c_{i+h}^{(k-h)} \mathcal{E}_i(z) \right] + \sum_{k=1}^j \left[ F_k \sum_{h=0}^{k-1} \frac{\partial^h}{\partial y^h} (d_{q+k-h} z) \right] +$$

$$+ \sum_{k=0}^j F_k \frac{\partial^k}{\partial y^k} \sum_{i=1}^q d_i \frac{\partial^{q-i} z}{\partial y^{q-i}} = \mu z \quad (F_j = 1; \quad \mu \neq 0).$$

Une condition nécessaire pour que la transformation (55) soit une transformation  $(t_{-j})$  est que l'équation (55') se réduise à une identité. Nous allons maintenant examiner quelles relations doivent vérifier les coefficients  $c_i, d_i$  ( $i = 1, 2, \dots, q+j$ ), pour qu'une identité de la forme (55') ait lieu, quand l'identité (54'') est supposée. Comme l'identité (54'') a lieu, l'équation (55') ne peut contenir des dérivées de  $z$  par rapport à  $x$ , et la condition nécessaire et suffisante pour cela est que tous les coefficients



de  $\mathcal{E}_i(z)$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) dans l'équation (55') soient nuls. De l'identité (54') il résulte donc que l'équation (55') se réduise à l'équation

$$(55'') \quad \sum_{k=1}^j \left( F_k \sum_{h=0}^{k-1} \frac{\partial^h}{\partial y^h} (d_{q+k-h} z) \right) + \sum_{k=0}^j F_k \frac{\partial^k}{\partial y^k} \sum_{i=1}^q d_i \frac{\partial^{q-i} z}{\partial y^{q-i}} = \mu z \quad (F_j = 1; \mu \neq 0).$$

Nous voyons immédiatement que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (55'') se réduise à une identité est que l'on ait  $d_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, q+j-1$ ),  $d_{q+j} = \mu$ . La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (20) et l'équation (55)

$$z_{-j} = \sum_{i=0}^{q-1} \left( T_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + U_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z \equiv \sum_{i=1}^q c_i \mathcal{E}_i(z) + \sum_{i=1}^q d_i \frac{\partial^{q-i} z}{\partial y^{q-i}}$$

nous donnent une relation de la forme (54) est ainsi que les équations (33) et (54'') admettent  $q-j$  intégrales distinctes communes et que l'on ait  $d_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, q+j-1$ ),  $d_{q+j} \neq 0$ . L'équation qui définit  $z_{-j}$  peut être obtenue de la manière suivante. L'élimination des  $j-1$  quantités  $\mathcal{E}_i(z)$  ( $i = 1, 2, \dots, j-1$ ) entre les équations

$$\frac{\partial^k z_{-j}}{\partial y^k} = \sum_{i=1}^q \sum_{h=0}^k \frac{k!}{(k-h)! h!} c_{i+h}^{(k-h)} \mathcal{E}_i(z) \quad (k = 0, 1, \dots, j-1)$$

conduit à une équation de la forme

$$\sum_{i=j}^q \lambda_i \mathcal{E}_i(z) = \sum_{k=0}^{j-1} \nu_k \frac{\partial^k z_{-j}}{\partial y^k},$$

$\lambda_i$  et  $\nu_k$  étant des fonctions de  $x$  et de  $y$ . Si nous substituons

$$z = \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^j F_k \frac{\partial^k z_{-j}}{\partial y^k}$$

dans cette équation, nous obtiendrons une équation en  $z_{-j}$  qui est du même type que l'équation (20). Nous voyons immédiatement que la transformation

$$\mu z = \sum_{k=0}^j F_k \frac{\partial^k z_{-j}}{\partial y^k}$$

est (au facteur  $\mu$  près) une transformation ( $t_j$ ).

La condition nécessaire et suffisante pour que la transformation (55) soit (à un facteur près) une transformation ( $t_j$ ) à l'équation (20) est ainsi que les équations (33) et (54'') admettent  $q-j$  intégrales distinctes communes et que l'on ait

$$d_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, q+j-1), \quad d_{q+j} \neq 0.$$

La transformation ( $t_{-j}$ ) est ainsi de la forme

$$z_{-j} = \sum_{i=1}^q c_i \mathcal{E}_i(z).$$

Nous allons maintenant examiner ce qu'expriment les conditions  $d_i = 0$  ( $i = q+1, q+2, \dots, q+j-1$ ),  $d_{q+j} \neq 0$ . Les conditions  $d_i = 0$  ( $i = q+1, q+2, \dots, q+j-1$ ) nous donnent les  $j-1$  identités

$$(56) \quad \sum_{i=1}^{q+1} \sum_{h=0}^k (-1)^{q-i} \frac{k!}{h!(k-h)!} c_{i+h}^{(k-h)} [C_{i-1} \mathcal{E}_q(z) + Q_{i-1} z] \equiv 0 \quad (k=0, 1, \dots, j-2)$$

[voir page 50]. De ces  $j-1$  identités on peut déduire les  $j-2$  identités suivantes :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{q+1} \sum_{h=0}^k (-1)^{q-i} \frac{k!}{h!(k-h)!} \left[ c_{i+h}^{(k-h+1)} [C_{i-1} \mathcal{E}_q(z) + Q_{i-1} z] + c_{i+h}^{(k-h)} [C'_{i-1} \mathcal{E}_q(z) + Q'_{i-1} z] \right] - \\ & - \sum_{i=1}^{q+1} \sum_{h=0}^{k+1} (-1)^{q-i} \frac{(k+1)!}{h!(k+1-h)!} c_{i+h}^{(k+1-h)} [C_{i-1} \mathcal{E}_q(z) + Q_{i-1} z] \equiv 0, \quad (k=0, 1, \dots, j-3) \end{aligned}$$

la désignation  $C'_i = \frac{\partial C_i}{\partial y}$  et  $Q'_i = \frac{\partial Q_i}{\partial y}$  étant employée. Il en résulte

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{q+1} \sum_{h=0}^k (-1)^{q-i} \frac{k!}{h!(k-h)!} c_{i+h}^{(k-h)} [C'_{i-1} \mathcal{E}_q(z) + Q'_{i-1} z] - \\ & - \sum_{i=1}^{q+1} \sum_{h=1}^{k+1} (-1)^{q-i} \frac{k!}{(h-1)!(k-h+1)!} c_{i+h}^{(k-h+1)} [C_{i-1} \mathcal{E}_q(z) + Q_{i-1} z] \equiv 0 \quad (k=0, 1, \dots, j-3); \end{aligned}$$

cette identité peut aussi s'écrire

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{q+1} \sum_{h=0}^k (-1)^{q-i} \frac{k!}{h!(k-h)!} c_{i+h}^{(k-h)} [C'_{i-1} \mathcal{E}_q(z) + Q'_{i-1} z] + \\ & + \sum_{i=2}^{q+2} \sum_{h=0}^k (-1)^{q-i} \frac{k!}{h!(k-h)!} c_{i+h}^{(k-h)} [C_{i-2} \mathcal{E}_q(z) + Q_{i-2} z] \equiv 0 \end{aligned}$$

et ainsi

$$\sum_{i=1}^{q+2} \sum_{h=0}^k (-1)^{q-i} \frac{k!}{h!(k-h)!} c_{i+h}^{(k-h)} \left[ (C'_{i-1} + C_{i-2}) \mathcal{E}_q(z) + (Q'_{i-1} + Q_{i-2}) z \right] \equiv 0,$$

où  $C_i = Q_i = 0$  pour  $i > q$  et pour  $i < 0$ . Les identités (56) peuvent par suite être remplacées par les identités

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{q+2} \sum_{h=0}^k (-1)^{q-i} \frac{k!}{h!(k-h)!} c_{i+h}^{(k-h)} [(C'_{i-1} + C_{i-2}) \mathcal{E}_q(z) + (Q'_{i-1} + Q_{i-2}) z] \equiv 0, \\ & (k=0, 1, \dots, j-3) \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{q+1} (-1)^{q-i} c_i [C_{i-1} \mathcal{E}_q(z) + Q_{i-1} z] \equiv 0.$$

En continuant de cette manière, nous trouvons que les  $j-1$  identités (56) peuvent être remplacées par les  $j-1$  identités :

$$\sum_{i=1}^{q+k+1} (-1)^{q-i} \left[ c_i \sum_{h=0}^k \frac{k!}{h!(k-h)!} [C_{i+h-k-1}^{(h)} \mathcal{E}_q(z) + Q_{i+h-k-1}^{(h)} z] \right] \equiv 0, \quad (k=0, 1, \dots, j-2)$$

la désignation  $C_i^{(h)} = \frac{\partial^h C_i}{\partial y^h}$  et  $Q_i^{(h)} = \frac{\partial^h Q_i}{\partial y^h}$  étant employée. De ces  $j - 1$  identités on obtient les  $2(j - 1)$  équations

$$(56') \quad \begin{cases} \sum_{i=0}^{q+h} (-1)^i \left[ c_{i+1} \sum_{k=0}^h \frac{h!}{k! (h-k)!} C_{i+k-h}^{(k)} \right] = 0, \\ \sum_{i=0}^{q+h-1} (-1)^i \left[ c_{i+1} \sum_{k=0}^h \frac{h!}{k! (h-k)!} Q_{i+k-h}^{(k)} \right] = 0. \end{cases} \quad (h = 0, 1, \dots, j-2)$$

Le système d'équations (56') se compose de  $2(j - 1)$  relations linéaires et homogènes entre les  $q + j - 1$  coefficients  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, q + j - 1$ ). Comme nous sommes partis de la supposition que l'équation adjointe (23) admette au plus  $q - j$  X-intégrales distinctes de rang 1, les relations (56') nous donnent  $j - 1$  relations distinctes entre les coefficients  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ). En éliminant les  $j - 1$  quantités  $c_i$  ( $i = q + 1, q + 2, \dots, q + j - 1$ ) entre les équations (56'), nous obtenons les  $j - 1$  équations

$$(56'') \quad \sum_{i=0}^{q-h} (-1)^i c_{i+1} Q_{ih} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, j-1),$$

ce qui résulte de la définition de  $Q_{ih}$  [voir page 26]. En partant des équations (56') nous obtenons aussi les équations

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{q-h} (-1)^i [c_{i+2} + c'_{i+1}] Q_{ih} &= 0, & (h = 1, 2, \dots, j-2) \\ \sum_{i=0}^{q-h} (-1)^i (c_{i+3} + 2c'_{i+2} + c''_{i+1}) Q_{ih} &= 0 & (h = 1, 2, \dots, j-3) \end{aligned}$$

etc. Il en résulte

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{q-h+1} (-1)^i c_{i+1} (Q_{ih} + Q_{i-1,h}) &= 0, & (h = 1, 2, \dots, j-2) \\ \sum_{i=0}^{q-h+2} (-1)^i c_{i+1} (Q_{ih} + 2Q'_{i-1,h} + Q_{i-2,h}) &= 0 & (h = 1, 2, \dots, j-3) \end{aligned}$$

etc. où  $Q_{ih} = 0$  pour  $i > q - h$  et pour  $i < 0$ . Si

$$Q_{q-h,h} \neq 0 \quad (h = 1, 2, \dots, j-2),$$

le système d'équations (56'') se compose de  $j - 1$  relations linéaires et homogènes distinctes entre les coefficients  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ). Si

$$Q_{q-h,h} \neq 0 \quad (h = 1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots, j-2), \quad Q_{q-s,s} = 0 \quad (s \leq j-2),$$

le système d'équations (56'') se compose de  $j - 2$  relations linéaires et homogènes distinctes entre les coefficients  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ), car les équations



$$\sum_{i=0}^{q-h} (-1)^i c_{i+1} Q_{ih} = 0 \quad (h = s, s+1)$$

sont, à un facteur près, identiques; mais aussi dans ce cas le système d'équations (56') nous donne  $j-1$  relations linéaires et homogènes entre les coefficients  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ), c'est-à-dire les équations

$$\sum_{i=0}^{q-h} (-1)^i c_{i+1} Q_{ih} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, s, s+2, \dots, j-1),$$

$$\sum_{i=0}^{q-s} (-1)^i c_{i+1} (Q'_{is} + Q_{i-1, s}) = 0.$$

Si encore

$$Q_{q-h, h} = 0 \quad (h = s, s+1, \dots, s+r-1), \quad Q_{q-k, k} \neq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, s-1, s+r, \dots, j-2),$$

$$(s+r-1 \leq j-2)$$

le système d'équations (56') nous donne de même  $j-1$  relations linéaires et homogènes distinctes entre les coefficients  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ), c'est-à-dire les  $j-1$  équations

$$(56''') \quad \begin{cases} \sum_{i=0}^{q-h} (-1)^i c_{i+1} Q_{ih} = 0 & (h = 1, 2, \dots, s, s+r+1, \dots, j-1) \\ \sum_{i=0}^{q-s+h-r} (-1)^i \left[ c_{i+1} \sum_{k=0}^h \frac{h!}{k! (h-k)!} Q_{i+k-h, s}^{(k)} \right] = 0 & (h = 1, 2, \dots, r). \end{cases}$$

— La condition  $d_{q+j} \neq 0$  et les relations (56') nous donnent de même la condition

$$(56''') \quad \sum_{i=0}^{q+h-1} (-1)^i \left[ c_{i+1} \sum_{k=0}^h \frac{h!}{k! (h-k)!} Q_{i+k-h}^{(k)} \right] \neq 0 \quad (h = j-1).$$

L'équation adjointe (23) admettant au plus  $q-j$   $X$ -intégrales distinctes de rang 1, cette inégalité n'est pas contraire au système d'équations (56'). De cette inégalité et du système d'équations (56') est obtenue la condition

$$\sum_{i=0}^{q-j} (-1)^i c_{i+1} Q_{ij} \neq 0, \text{ si } Q_{q-j+1, j-1} \neq 0,$$

et la condition

$$\sum_{i=0}^{q-j+1} (-1)^i c_{i+1} (Q'_{i, j-1} + Q_{i-1, j-1}) \neq 0, \text{ si } \begin{cases} Q_{q-j+1, j-1} = 0 \\ Q_{q-j+2, j-2} \neq 0 \end{cases}$$

etc.

La transformation  $(t_{-j})$  peut par suite être définie de la manière suivante: Une transformation  $(t_{-j})$  à l'équation (20) peut s'écrire

$$z_{-j} = \sum_{i=1}^q c_i \mathcal{S}_i(z) \equiv \sum_{i=0}^{q-1} \left( T_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + U_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \right),$$

où les équations

$$\sum_{i=0}^{q-1} T_i \frac{\partial^i \alpha}{\partial y^i} = 0, \quad \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha}{\partial y^i} = 0$$

admettent  $q - j$  intégrales distinctes communes, les coefficients  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) satisfont à  $j - 1$  équations linéaires et homogènes qui sont obtenues du système d'équations (56'), les coefficients  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) sont choisis d'une telle manière que l'inégalité (56''') a lieu; de plus, cette condition non essentielle peut être ajoutée que le coefficient de la plus haute dérivée de  $z$  qui se trouve dans la transformation doit être égal à 1.

J'ai déjà défini la transformation  $(t_{-1})$  (voir page 42); il résulte directement que les deux définitions coïncident.

Toutes les transformations  $(t_{-j})$  ( $j = 1, 2, \dots, q$ ) peuvent être considérées comme des transformations de Laplace à l'équation (20). La transformation  $(t_{-j})$  ( $1 \leq j < q$ ) n'est pas complètement déterminée. En déterminant quelles sont les  $q - j$  intégrales communes des équations

$$\sum_{i=0}^{q-1} T_i \frac{\partial^i \alpha}{\partial y^i} = 0, \quad \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha}{\partial y^i} = 0,$$

la transformation devient complètement déterminée.

J'ai montré auparavant (voir page 44, 45) que si la transformation (40) est appliquée à l'équation (20) et que la transformation (50') soit appliquée à l'équation adjointe (23), l'on obtient deux équations qui sont aussi adjointes; nous sommes partis de la supposition  $\bar{B}_0 \neq 0$ . Je nomme pour abréger les deux transformations (40) et (50') des »transformations adjointes». — Et en général, si par la transformation (51)

$$z_j = \alpha_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{j-1} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_{j-1}} \frac{\partial}{\partial y} \dots \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial y} z \equiv g(z)$$

l'équation (20) est ramenée à une équation de même ordre, il existe (selon la proposition 9) une transformation, qui, à un facteur près, est une transformation  $(t_{-j})$ , par laquelle l'équation (23) est ramenée à l'adjointe de l'équation qui définit  $z_j$ ; les deux transformations de Laplace par lesquelles les équations adjointes sont ramenées à des équations adjointes, seront toujours nommées des »transformations adjointes». — Soient  $\alpha_{0i}$  ( $i = 1, 2, \dots, j$ )  $j$  intégrales distinctes de l'équation  $g(\alpha_0) = 0$  et soient  $\alpha_{0i}$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ), comme de coutume,  $q$  intégrales distinctes de l'équation (33).  $\gamma_{0i}$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ), qui ont été définies page 27, sont  $q$  intégrales distinctes de l'adjointe de l'équation (33), c'est-à-dire de l'équation (38'')  $\sum_{i=0}^q C_i \frac{\partial^i \gamma_0}{\partial y^i} = 0$ . On dit que les solutions  $\gamma_{0i}$  sont les adjointes des solutions  $\alpha_{0i}$ . La transformation  $(t_{-j})$

qui, à un facteur près, est la transformation adjointe de la transformation (51) est de la forme

$$u_{-j} = \sum_{i=0}^{q-1} \left( T_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + U_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) u,$$

où les équations

$$\sum_{i=0}^{q-1} T_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} = 0, \quad \sum_{i=0}^q C_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} = 0$$

admettent les  $q - j$  intégrales distinctes  $\gamma_{0i}$  ( $i = j + 1, j + 2, \dots, q$ ) en commun, et la transformation  $(t_{-j})$  en question est par cela complètement définie. — Nous voyons immédiatement que la proposition 9 est valable aussi pour les transformations  $(t_{-i})$  ( $i = 2, 3, \dots, q$ ).

Parmi les transformations  $(t_{-1}), (t_{-2}), \dots, (t_{-q})$ , la transformation  $(t_{-q})$ , que je désigne aussi par  $(T_{-1})$ , est du plus grand intérêt, car elle est complètement déterminée. La transformation  $(T_{-1})$  est de la forme

$$z_{-q} = \sum_{i=1}^q c_i \mathcal{E}_i(z),$$

où les coefficients  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ), à un facteur près, sont définis par les  $q - 1$  relations linéaires et homogènes obtenues à l'aide du système d'équations (56') et où l'inégalité (56''') pour  $h = q - 1$  a lieu. Cette inégalité nous donne la condition

$$c_1 Q_{0q} \neq 0, \text{ si } Q_{1, q-1} \neq 0,$$

et la condition

$$c_2 Q_{0, q-1} - c_1 Q'_{0, q-1} \neq 0, \text{ si } \begin{cases} Q_{1, q-1} = 0 \\ Q_{2, q-2} \neq 0 \end{cases}$$

etc. Ainsi l'inégalité en question exprime que l'équation (23) n'admet pas de  $X$ -intégrale de rang 1 et que nous devons avoir  $Q_{i, q-i} = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) pour que la transformation  $(T_{-1})$  soit d'ordre  $q - r$ . Si  $Q_{q-h, h} \neq 0$  ( $h = 1, 2, \dots, q - 2$ ), la transformation  $(T_{-1})$  est de la forme

$$z_{-q} = M \begin{vmatrix} \mathcal{E}_q(z) & -\mathcal{E}_{q-1}(z) & \mathcal{E}_{q-2}(z) & \dots & (-1)^{q-2} \mathcal{E}_2(z) & (-1)^{q-1} \mathcal{E}_1(z) \\ Q_{q-1, 1} & Q_{q-2, 1} & Q_{q-3, 1} & \dots & Q_{11} & Q_{01} \\ 0 & Q_{q-2, 2} & Q_{q-3, 2} & \dots & Q_{12} & Q_{02} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & Q_{1, q-1} & Q_{0, q-1} \end{vmatrix}$$

où le facteur  $M$  doit être choisi, si  $Q_{1, q-1} \neq 0$ , d'une telle manière que le coefficient de  $\mathcal{E}_1(z)$  soit égal à 1 et, si  $Q_{1, q-1} = 0$ , d'une telle manière que le coefficient de  $\mathcal{E}_2(z)$  soit égal à 1. Si  $Q_{q-h, h} = 0$  ( $h = s, s + 1, \dots, s + r - 1$ ), la transformation



$(T_{-1})$  peut encore se mettre sous la forme d'un déterminant d'ordre  $q$  au plus, ce qui résulte du système d'équations (56''').

Nous avons donc obtenu le résultat suivant: Si l'équation (23) n'admet pas de  $X$ -intégrale de rang 1, il existe toujours une, et une seule, transformation  $(T_{-1})$  de l'équation (20), et par cette transformation l'équation (20) est ramenée à une équation de même type et de même ordre. En partant de l'équation (20) et en appliquant la transformation  $(T_{-1})$  plusieurs fois de suite, l'on obtient une série d'équations que je désigne par  $(E_{-1})$ ,  $(E_{-2})$ ,  $(E_{-3})$ , ...; et par l'application répétée de la transformation  $(T_{-1})$  à l'équation (23), l'on obtient une série d'équations que je désigne par  $(E'_{-1})$ ,  $(E'_{-2})$ ,  $(E'_{-3})$ , ... (comparer page 37). L'intégrale de l'équation  $(E_{-1})$  diffère seulement par un facteur de l'intégrale de l'adjointe de l'équation  $(E'_1)$ ; en négligeant ce facteur, on peut dire que les deux équations  $(E_{-1})$  et  $(E'_1)$  sont adjointes. De même il est aisé de voir que l'intégrale de l'équation  $(E_{-i})$  d'ordre  $n$  diffère seulement par un facteur de l'intégrale de l'adjointe de l'équation  $(E'_i)$ , et en négligeant ce facteur, l'on peut dire que les équations  $(E_{-i})$  et  $(E'_i)$  d'ordre  $n$  sont adjointes.

*Proposition 11.* Une équation  $(E)$  dont l'équation adjointe  $(E')$  n'admet pas de  $X$ -intégrale de rang 1 est ramenée par la transformation complètement déterminée  $(T_{-1})$

$$z_{-q} = \sum_{i=1}^q c_i \mathcal{G}_i(z),$$

les coefficients  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) étant déterminés par les  $q-1$  équations linéaires et homogènes qu'on obtient en éliminant les  $q-1$  coefficients  $c_i$  ( $i = q+1, q+2, \dots, 2q-1$ ) entre les  $2(q-1)$  équations

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{q+h} \left[ (-1)^i c_{i+1} \sum_{k=0}^h \frac{h!}{k! (h-k)!} Q_{i+k-h}^{(k)} \right] = 0, \\ \sum_{i=0}^{q+h-1} \left[ (-1)^i c_{i+1} \sum_{k=0}^h \frac{h!}{k! (h-k)!} Q_{i+k-h}^{(k)} \right] = 0, \end{cases} \quad (h = 0, 1, \dots, q-2)$$

à une équation  $(E_{-1})$  de même type et de même ordre; les  $q-1$  équations linéaires et homogènes qui, à un facteur près, définissent les coefficients  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) peuvent s'écrire

$$\sum_{i=0}^{q-h} (-1)^i c_{i+1} Q_{ih} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, q-1),$$

si  $Q_{q-h, h} \neq 0$  ( $h = 1, 2, \dots, q-2$ ), et dans le cas où

$$Q_{q-h, h} = 0 \quad (h = s, s+1, \dots, s+r-1), \quad Q_{q-k, k} \neq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, s-1, s+r, \dots, q-2),$$

$$(s+r-1 \leq q-2)$$

elles peuvent s'écrire

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{q-h} (-1)^i c_{i+1} Q_{ih} = 0 & (h = 1, 2, \dots, s, s+r+1, \dots, q-1), \\ \sum_{i=0}^{q-s+h-r} (-1)^i \left[ c_{i+1} \sum_{k=0}^h \frac{h!}{k! (h-k)!} Q_{i+k-h, s}^{(k)} \right] = 0 & (h = 1, 2, \dots, r); \end{cases}$$

le facteur non essentiel doit être choisi de manière que le coefficient de la plus haute dérivée de  $z$  dans la transformation soit égal à 1. La transformation  $(T_{-1})$  est, à un facteur près, inverse à la transformation  $(T_1)$ . L'intégration de l'une des équations  $(E)$  et  $(E_{-1})$  entraîne celle de l'autre; de toute intégrale de l'une des équations l'on obtient sans intégration une intégrale de l'autre équation. L'équation  $(E_{-1})$  ne peut admettre de  $X$ -intégrale de rang 1. [Comparer de plus la proposition 6.]

La transformation  $(T_{-1})$  ne peut s'appliquer directement à une équation (20) dont l'équation adjointe (23) admet une  $X$ -intégrale de rang 1. Supposons que l'équation (23) admette  $s$  — et pas plus de  $s$  —  $X$ -intégrales distinctes de rang 1. Par l'intégration d'une équation différentielle linéaire d'ordre  $s$ , l'équation (20) peut s'écrire (39')

$$\sum_{i=0}^{q-s} \left( R_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + S_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z = \sum_{i=1}^s \lambda_i X_i.$$

A l'équation (39') la transformation complètement déterminée  $(T_{-1})$  peut s'appliquer; c'est seulement une différence de peu d'importance que le second membre de l'équation (39') n'est pas nul. En appliquant la transformation  $(T_{-1})$  à l'équation (39') on obtiendra une équation de même type et de même ordre où le second membre est une fonction linéaire de

$$X_i, X'_i \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

Je désigne ici encore l'équation obtenue par  $(E_{-1})$ . Et par l'application répétée de la transformation  $(T_{-1})$  l'on obtiendra une série d'équations qui peuvent être désignées par  $(E_{-1}), (E_{-2}), (E_{-3})$  etc. En substituant  $X_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) dans le second membre de l'équation  $(E_{-h})$  d'ordre  $n - s$ , nous obtiendrons une équation dont l'intégrale ne se distingue que par un facteur de l'intégrale de l'adjointe de l'équation  $(E'_h)$ ; en négligeant ce facteur l'on peut dire que l'équation  $(E'_h)$  et l'équation  $(E_{-h})$  dont le second membre a été remplacé par zéro sont des équations adjointes.

Par l'application de la transformation  $(T_{-1})$  nous pouvons reconnaître si l'équation (20) admet une  $Y$ -intégrale et, s'il y en a, ramener la détermination de cette intégrale à une quadrature et ramener l'intégration de l'équation à l'intégration d'équations différentielles linéaires. Nous pouvons procéder de la manière suivante. La transformation  $(T_{-1})$  peut s'appliquer à l'équation  $(E)$  jusqu'à ce que nous obtenions peut-être une équation dont l'équation adjointe admet une  $X$ -intégrale de rang 1. Supposons que l'adjointe de l'équation  $(E_{-m_1})$  admette  $s_1$  — et pas plus de  $s_1$  —  $X$ -intégrales distinctes de rang 1; il en suit que l'équation  $(E')$  admet  $s_1$  — et pas plus de  $s_1$  —  $X$ -intégrales distinctes de rang  $m_1 + 1$ . Par l'intégration d'une équation différentielle linéaire d'ordre  $s_1$ , l'ordre de l'équation  $(E_{-m_1})$  peut être diminué de  $s_1$  unités, et puis on peut de nouveau appliquer la transformation  $(T_{-1})$ , jusqu'à ce que nous obtenions peut-être une équation dont on pourra diminuer l'ordre encore une fois de la même manière. Si nous supposons



que l'ordre de l'équation  $(E_{-m_2})$  ( $m_2 > m_1$ ) puisse être diminué de  $s_2$  unités, cela exprime que l'équation  $(E')$  admet  $s_2$   $X$ -intégrales distinctes de rang  $m_2 + 1$  etc. Par l'application de la transformation  $(T_{-1})$  à l'équation  $(E)$  nous pouvons par suite reconnaître si l'équation  $(E')$  admet des  $X$ -intégrales, et si l'équation  $(E')$  admet  $s$   $X$ -intégrales distinctes de rang inférieur à  $m + 2$ , nous pouvons par l'application de la transformation  $(T_{-1})$   $m$  fois au plus et par l'intégration d'équations différentielles linéaires ( $s$  équations du premier ordre ou, en cas exceptionnel, un plus petit nombre d'équations d'ordre supérieur) diminuer l'ordre de l'équation  $(E)$  de  $s$  unités. Si l'équation  $(E')$  admet  $s$   $X$ -intégrales de rang  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_s + 1$  ( $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_s$ ) qui ne peuvent être remplacées par des intégrales de rang inférieur, nous obtiendrons de cette manière une équation d'ordre  $n - s$ , dont le second membre est une fonction linéaire de

$$X_i, X'_i, \dots, X_i^{(m_i - m_1)} \quad (i = 1, 2, \dots, s);$$

de toute intégrale de cette équation on obtient sans intégration une intégrale de l'équation  $(E)$ . Ainsi lorsque l'équation  $(E')$  admet  $q$   $X$ -intégrales distinctes et que, par suite, l'équation  $(E)$  admet une  $Y$ -intégrale, l'intégration de l'équation  $(E)$  peut se ramener à l'intégration d'équations différentielles linéaires. Si l'équation  $(E')$  n'admet pas de  $X$ -intégrale, nous ne pouvons atteindre plus près à l'intégration de l'équation  $(E)$  en appliquant la transformation  $(T_{-1})$  à l'équation  $(E)$ .

En appliquant les transformations complètement déterminées  $(T_1)$  et  $(T_{-1})$  à l'équation (20) nous avons obtenu des résultats qui sont tout à fait analogues à ceux obtenus en appliquant les transformations de Laplace à l'équation (1) et c'est ainsi que nous avons étendu la méthode de Laplace à l'équation (20). Chaque intégrale de la forme d'Euler de l'équation (20) peut s'obtenir par la méthode de Laplace. Pour obtenir les intégrales de la forme d'Euler il ne faut que l'intégration d'équations différentielles linéaires du premier ordre ou, en cas exceptionnel, d'ordre supérieur. Lorsque soit l'équation (20) soit l'équation adjointe (23) admettent  $s$   $X$ -intégrales distinctes, l'ordre de l'équation (20) peut être diminuée de  $s$  unités. Dans le cas où ni l'équation (20), ni l'équation adjointe (23) n'admettent une  $X$ -intégrale, la méthode de Laplace est manquée.

Nous avons trouvé que si l'une des équations (20) ou (23) admet  $q$   $X$ -intégrales distinctes et que par suite l'autre équation admette une  $Y$ -intégrale, l'intégration de l'équation (20) peut être ramenée, par la méthode de Laplace, à l'intégration d'équations différentielles linéaires. Mais pour que l'équation (20) puisse être ramenée par la méthode de Laplace à l'intégration d'équations différentielles linéaires, on n'est pas exclusivement renvoyé à cette condition que l'une des équations (20) ou (23) admette une  $Y$ -intégrale. Supposons que l'équation (20) admette  $s$  — et pas plus de  $s$  —  $X$ -intégrales distinctes, où  $q > s > 0$ . Soient les  $s$   $X$ -intégrales de l'équation (20) les intégrales (29) et supposons qu'elles ne puissent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur à  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_s + 1$ . En appliquant la transformation  $(T_1)$   $m_s + 1$  fois, l'intégration de l'équation (20) est ramenée



à l'intégration de l'équation  $(E_{m_s+1})$ , qui est d'ordre  $n - s$ , et à l'intégration d'équations différentielles linéaires. L'équation  $(E_{m_s+1})$  peut très bien admettre une  $Y$ -intégrale, sans que l'équation (20) admette une  $Y$ -intégrale (voir proposition 7); et l'intégration de l'équation (20) peut être ramenée à l'intégration d'équations différentielles linéaires, sans que l'équation (20) admette soit  $q$   $X$ -intégrales distinctes, soit une  $Y$ -intégrale. La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation  $(E_{m_s+1})$ , qui est d'ordre  $n - s$ , admette une  $Y$ -intégrale est que l'équation adjointe admette  $q - s$   $X$ -intégrales distinctes, ou autrement dit que l'équation  $(E'_{-(m_s+1)})$  dont le second membre a été remplacé par zéro admette  $q - s$   $X$ -intégrales distinctes. Une condition nécessaire (non suffisante) pour ceci est que l'équation  $(E')$  admette  $q - s$   $X$ -intégrales distinctes. Supposons que l'équation  $(E')$  admette  $s' - 1$  et pas plus de  $s' - 1$   $X$ -intégrales distinctes. Il en suit que l'adjointe de l'équation  $(E_{m_1})$ , qui est d'ordre  $n$ , admet aussi  $s'$ , et pas plus de  $s'$ ,  $X$ -intégrales distinctes. — Supposons  $m_1 < m_2$ . Les équations  $(E_{m_1+1})$  et  $(E'_{-(m_1+1)})$  sont d'ordre  $n - 1$ ; si l'on remplace la fonction arbitraire dans le second membre de l'équation  $(E'_{-(m_1+1)})$  par zéro, les équations  $(E_{m_1+1})$  et  $(E'_{-(m_1+1)})$  seront adjointes, abstraction faite d'un facteur. L'adjointe de l'équation  $(E_{m_1+1})$  admet ainsi ou  $s'$  ou  $s' - 1$   $X$ -intégrales distinctes; les fonctions  $\gamma_{0i}$  étant les solutions adjointes des solutions  $\alpha_{0i}$  [voir pages 27, 55], on peut déduire que si l'équation  $(E')$  admet une  $X$ -intégrale qui correspond à

$$\gamma_{01} + \sum_{i=2}^q f_i(x)\gamma_{0i},$$

l'adjointe de l'équation  $(E_{m_1+1})$  admet  $s' - 1$   $X$ -intégrales distinctes; sinon, l'adjointe de l'équation  $(E_{m_1+1})$  admet  $s'$   $X$ -intégrales distinctes. Ce résultat peut aussi être exprimé de la manière suivante: Si l'équation  $(E')$  admet  $s'$   $X$ -intégrales distinctes correspondant à  $\bar{\gamma}_{0h}$  ( $h = 1, 2, \dots s'$ ), où

$$\bar{\gamma}_{0h} = \sum_{i=2}^q f_{ih}(x)\gamma_{0i} \quad (h = 1, 2, \dots s')$$

et où il n'existe pas de relation de la forme

$$\sum_{h=1}^{s'} g_h(x)\bar{\gamma}_{0h} = 0,$$

l'adjointe de l'équation  $(E_{m_1+1})$  admet  $s'$   $X$ -intégrales distinctes. Mais supposons  $m_1 = m_2$ ,  $m_2 < m_3$ ; nous obtiendrons alors de la même manière le résultat suivant: si l'équation  $(E')$  admet  $s'$   $X$ -intégrales distinctes correspondant à  $\bar{\gamma}_{0h}$  ( $h = 1, 2, \dots s'$ ), où

$$\bar{\gamma}_{0h} = \sum_{i=3}^q f_{ih}(x)\gamma_{0i} \quad (h = 1, 2, \dots s')$$

et où il n'existe pas de relation de la forme

$$\sum_{h=1}^{s'} g_h(x)\bar{\gamma}_{0h} = 0,$$

l'adjointe de l'équation  $(E_{m_2+1})$  admet  $s'$   $X$ -intégrales distinctes. Nous pouvons continuer de cette manière. Nous obtiendrons alors le résultat suivant: La condition nécessaire et suffisante pour que l'adjointe de l'équation  $(E_{m_s+1})$  admette  $q - s$

$X$ -intégrales distinctes est que l'équation  $(E')$  admette  $q - s$   $X$ -intégrales distinctes qui correspondent à  $\bar{\gamma}_{0h}$  ( $h = 1, 2, \dots, q - s$ ), où

$$\bar{\gamma}_{0h} = \sum_{i=s+1}^q f_{ih}(x) \gamma_{0i} \quad (h = 1, 2, \dots, q - s)$$

et où il n'existe pas de relation de la forme

$$\sum_{h=1}^{q-s} g_h(x) \bar{\gamma}_{0h} = 0.$$

*Proposition 12.* La condition nécessaire et suffisante pour que l'intégration de l'équation (20) puisse être ramenée, par la méthode de Laplace, à l'intégration d'équations différentielles linéaires est que l'équation (20) admette  $s$  ( $q \geq s \geq 0$ )  $X$ -intégrales qui correspondent à  $\alpha_{0i}$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) et que l'équation adjointe (23) admette  $q - s$   $X$ -intégrales qui correspondent à  $\bar{\gamma}_{0h}$  ( $h = 1, 2, \dots, q - s$ ), où

$$\bar{\gamma}_{0h} = \sum_{i=s+1}^q f_{ih}(x) \gamma_{0i} \quad (h = 1, 2, \dots, q - s)$$

et où il n'existe pas de relation de la forme

$$\sum_{h=1}^{q-s} g_h(x) \bar{\gamma}_{0h} = 0;$$

les désignations suivantes ont été employées

$$\delta = \begin{vmatrix} \alpha_{01} & \alpha'_{01} & \dots & \alpha_{01}^{(q-1)} \\ \alpha_{02} & \alpha'_{02} & \dots & \alpha_{02}^{(q-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{0q} & \alpha'_{0q} & \dots & \alpha_{0q}^{(q-1)} \end{vmatrix}, \quad \gamma_{0i} = \frac{\partial \log \delta}{\partial \alpha_{0i}^{(q-1)}} \quad (i = 1, 2, \dots, q),$$

$\alpha_{0i}$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) sont  $q$  intégrales distinctes de l'équation (33),  $\frac{\partial^j \alpha_{0i}}{\partial y^j} = \alpha_{0i}^{(j)}$ .

J'ai déjà dit que ma définition des transformations de Laplace aux équations (20) correspondant au système de caractéristiques  $y = \text{const.}$  ne coïncide pas avec la définition de Le Roux des transformations de Laplace à l'équation (16). Je suis parti de la supposition de Le Roux que le caractère essentiel des transformations de Laplace correspondant au système de caractéristiques  $y = \text{const.}$  soit que la transformation permet de diminuer le rang de l' $Y$ -intégrale, mais parmi les transformations linéaires qui ont ce caractère essentiel, j'ai choisi une toute autre transformation que celle de Le Roux. A ce sujet, il serait d'intérêt d'examiner quelles transformations linéaires ramènent toute  $Y$ -intégrale de l'équation (16) (mise sous une telle forme que  $y$  est une variable caractéristique) à une  $Y$ -intégrale d'ordre inférieur.

J'ai défini la transformation  $(t_{-j})$  ( $q \geq j \geq 1$ ) comme étant, à un facteur près, inverse à la transformation  $(t_j)$ . Mais on peut aussi partir directement des qualités de la transformation  $(t_{-j})$ . Si l'on applique la transformation  $(t_{-j})$  à une équation (20) qui admet une  $Y$ -intégrale, le rang de l' $Y$ -intégrale est diminué de

$j$  unités. En partant de cette qualité de la transformation  $(t_{-j})$  l'on peut directement déduire que la transformation  $(t_{-j})$  est de la forme

$$z_{-j} = \sum_{i=1}^q c_i \mathcal{E}_i(z),$$

où les coefficients  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) vérifient les  $j - 1$  relations linéaires et homogènes qui sont obtenues en éliminant les  $(j - 1)$  coefficients  $c_i$  ( $i = q + 1, q + 2, \dots, q + j - 1$ ) entre les  $2(j - 1)$  équations (56'). La preuve en peut être étendue à l'équation (16). Je vais résumer cette preuve.

L'équation (20) peut s'écrire

$$\Psi_q \frac{\partial^q z}{\partial y^q} + \Psi_{q-1} \frac{\partial^{q-1} z}{\partial y^{q-1}} + \dots + \Psi_1 \frac{\partial z}{\partial x} + \Psi_0 z = 0, \text{ où } \Psi_i = A_i \frac{\partial}{\partial x} + B_i.$$

Employons les désignations suivantes:

$$A_i^{(k)} = \frac{\partial^k A_i}{\partial y^k}, \quad B_i^{(k)} = \frac{\partial^k B_i}{\partial y^k}, \quad \Psi_i^{(k)} = A_i^{(k)} \frac{\partial}{\partial x} + B_i^{(k)},$$

$$\Psi_{ih} = \Psi_{i+h} - i \Psi'_{i+h+1} + \frac{i(i+1)}{2!} \Psi''_{i+h+2} - \dots + (-1)^{q-i-h} \frac{i(i+1)\dots(q-h-1)}{(q-i-h)!} \Psi_q^{(q-i-h)},$$

$$(i \geq 0, h \leq 0)$$

où  $\Psi_i = 0$  pour  $i > q$  et pour  $i < 0$ . D'après cette désignation nous avons:

$$\Psi_{0h} = \Psi_h \quad (h = 0, 1, \dots, q), \quad \Psi_{ih} = \sum_{k=0}^{q-i-h} (-1)^k \frac{(i+k-1)!}{(i-1)! k!} \Psi_{i+h+k}^{(k)} \quad (i > 0, h \leq 0).$$

Nous trouvons aisément

$$\Psi'_{ih} + \Psi_{i, h-1} - \Psi_{i-1, h} = 0 \quad (i > 0).$$

D'après cette désignation nous avons

$$\mathcal{E}_0(z) \equiv \sum_{h=0}^q \Psi_h \frac{\partial^h z}{\partial y^h}, \quad \mathcal{E}_i(z) \equiv \sum_{h=0}^{q-i} \Psi_{ih} \frac{\partial^h z}{\partial y^h} \quad (i = 1, 2, \dots, q).$$

Supposons que l'équation (20) admette l' $Y$ -intégrale

$$\zeta = \beta_0 Y^{(r)} + \beta_1 Y^{(r-1)} + \dots + \beta_r Y \quad (\beta_0 \neq 0).$$

Écrivons

$$\mathfrak{B}_{i, r-m} = \sum_{k=0}^{q-i} \Psi_{ik} \left( \sum_{h=0}^k \frac{k!}{h! (k-h)!} \beta_{m+h}^{(k-h)} \right) \quad (q \geq i \geq 0, m \leq 0), \quad \mathfrak{B}_{i, r-m} = 0 \quad (i > q),$$

où la désignation  $\beta_j^{(h)} = \frac{\partial^h \beta_j}{\partial y^h}$  est employée et où  $\beta_j = 0$  pour  $j > r$  et pour  $j < 0$ . Si nous remplaçons  $z$  dans l'expression  $\mathcal{E}_i(z)$  par l' $Y$ -intégrale, nous aurons

$$\mathcal{E}_i(\zeta) = \sum_{m=0}^{r+q-i} \mathfrak{B}_{im} Y^{(m)} \quad (i = 0, 1, \dots, q).$$

De l'identité

$$\Psi'_{ih} + \Psi_{i, h-1} = \Psi_{i-1, h} \quad (i > 0)$$



l'on trouve

$$\mathfrak{B}'_{im} + \mathfrak{B}_{i, m-1} = \mathfrak{B}_{i-1, m} - \Psi_{i-1}(\beta_{r-m}) \quad (i > 0; m \geq 0),$$

la désignation  $\mathfrak{B}'_{ij} = \frac{\partial \mathfrak{B}_{ij}}{\partial y}$  étant employée. Pour  $m > r$ , cette égalité devient

$$\mathfrak{B}'_{im} + \mathfrak{B}_{i, m-1} = \mathfrak{B}_{i-1, m} \quad (i > 0; m > r).$$

Cette égalité et les conditions  $\mathfrak{B}_{0m} = 0$  ( $m \geq r+1$ ) nous donnent

$$\mathfrak{B}_{im} = 0 \quad (i > 0, m \geq r).$$

Il en suit que toute transformation de la forme

$$z_{-j} = \sum_{i=1}^q c_i \mathfrak{E}_i(z)$$

diminue le rang de l' $Y$ -intégrale d'une unité au moins. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une transformation de la forme

$$z_{-j} = \sum_{i=0}^q \left( T_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + U_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \right) \equiv \sum_{i=1}^q c_i \mathfrak{E}_i(z) + \sum_{i=1}^q d_i \frac{\partial^{q-i} z}{\partial y^{q-i}}$$

permette de diminuer le rang de l' $Y$ -intégrale, est ainsi que la transformation soit de la forme

$$z_{-j} = \sum_{i=1}^q c_i \mathfrak{E}_i(z).$$

Et nous voyons immédiatement que la condition nécessaire et suffisante pour que la transformation en question diminue le rang de l' $Y$ -intégrale de  $j$  unités est que les  $j-1$  conditions

$$\sum_{i=1}^q c_i \mathfrak{B}_{im} = 0 \quad (m = r-1, r-2, \dots, r-j+1)$$

soient remplies. Nous allons examiner ce qu'expriment ces conditions. En partant des égalités

$$\mathfrak{B}_{0m} = 0, \mathfrak{B}_{im} = 0 \quad (i > 0, m \geq r), \mathfrak{B}'_{im} + \mathfrak{B}_{i, m-1} = \mathfrak{B}_{i-1, m} - \Psi_{i-1}(\beta_{r-m}) \quad (i > 0, m \geq 0)$$

on peut déduire l'égalité

$$\mathfrak{B}_{i, r-m} = - \sum_{k=1}^m \Psi_{i, -k} \left( \sum_{h=0}^{m-k} (-1)^h \frac{(h+k-1)!}{h! (k-1)!} \beta_{m-k-h}^{(h)} \right) \quad (i > 0, m > 0)$$

(on peut montrer que si l'égalité en question est vraie pour  $m$ , elle est vraie aussi pour  $m+1$ , et on voit immédiatement que l'égalité a lieu pour  $m=1$ ). Ainsi

la condition  $\sum_{i=1}^q c_i \mathfrak{B}_{i, r-1} = 0$  peut s'écrire

$$\sum_{i=1}^q c_i \Psi_{i, -1}(\beta_0) = 0.$$

Il suit de cette condition qu'il existe une identité de la forme

$$\sum_{i=0}^{q+1} c_i \Psi_{i,-1}(z) \equiv 0,$$

le coefficient  $c_{q+1}$  ayant été introduit. La condition  $\sum_{i=1}^q c_i \mathfrak{B}_{i,r-2} = 0$  peut s'écrire

$$\sum_{i=1}^{q+1} c_i [\Psi_{i,-2}(\beta_0) + \Psi_{i,-1}(\beta_1 - \beta'_0)] = 0;$$

cette condition nous donne une identité de la forme

$$\sum_{i=1}^{q+2} c_i \Psi_{i,-2}(z) \equiv 0.$$

Nous pouvons continuer de cette manière; en partant des égalités

$$\mathfrak{B}_{i,r-m} = - \sum_{k=1}^m \Psi_{i,-k} \left( \sum_{h=0}^{m-k} (-1)^h \frac{(h+k-1)!}{h! (k-1)!} \beta_{m-k-h}^{(h)} \right) \quad (i > 0, \quad m > 0)$$

nous pouvons déduire que la condition nécessaire et suffisante pour que les conditions

$$\sum_{i=1}^q c_i \mathfrak{B}_{i,r-m} = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, j-1)$$

soient remplies est qu'il existe  $j-1$  identités

$$\sum_{i=1}^{q+h} c_i \Psi_{i,-h} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, j-1).$$

Ces  $j-1$  identités nous donnent les  $2(j-1)$  conditions

$$\begin{aligned} \left[ \sum_{i=1}^{q+h} c_i \sum_{k=0}^{q-i+h} (-1)^k \frac{(i+k-1)!}{(i-1)! k!} A_{i+k-h}^{(k)} \right] &= 0, \\ \left[ \sum_{i=1}^{q+h} c_i \sum_{k=0}^{q-i+h} (-1)^k \frac{(i+k-1)!}{(i-1)! k!} B_{i+k-h}^{(k)} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (h = 1, 2, \dots, j-1)$$

Et en tenant compte des équations (38'), nous pouvons remplacer ces  $2(j-1)$  conditions par les  $2(j-1)$  conditions (56'). — Dans la définition en question de la transformation  $(t_{-j})$ , nous sommes partis de ce que l'équation (20) admet une  $Y$ -intégrale. Mais on voit aisément que ce n'est pas nécessaire de faire cette supposition. Lorsque l'équation (20) n'admet pas une  $Y$ -intégrale, l'on peut pourtant obtenir une expression de la forme

$$\theta = \beta_0 Y^{(r)} + \beta_1 Y^{(r-1)} + \beta_2 Y^{(r-2)} + \dots + \beta_r Y \quad (\beta_0 \neq 0),$$

où les coefficients  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$  ont été formés d'après la même loi que les coefficients d'une  $Y$ -intégrale (c'est-à-dire, si l'on remplace l'expression mentionnée à la place de  $z$  dans l'équation (20), les coefficients de  $Y^{(r+q)}, Y^{(r+q-1)}, \dots, Y^{(q)}$  seront nuls). En substituant, nous aurons

$$\sum_{i=1}^q c_i \mathfrak{S}_i(\theta) = \sum_{i=1}^q c_i \sum_{m=0}^{r+q-i} \mathfrak{B}_{im} Y^{(m)}.$$

Posons  $r \geq q + j - 2$ . Le coefficient de  $Y^{(r)}$  dans l'expression  $\sum_{i=1}^q c_i \mathcal{E}_i(\theta)$  est nul; et les  $j - 1$  identités

$$\sum_{i=1}^{q+j-h} c_i \Psi_{i, -h} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, j-1)$$

nous donnent la condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait  $\sum_{i=1}^q c_i \mathcal{B}_{im} = 0$  ( $m = r-1, r-2, \dots, r-j+1$ ), c'est-à-dire la condition nécessaire et suffisante pour que les coefficients de  $Y^{(r-1)}, Y^{(r-2)}, \dots, Y^{(r-j+1)}$  dans l'expression  $\sum_{i=1}^q c_i \mathcal{E}_i(\theta)$  soient aussi nuls.

En considérant la transformation  $(t_{-j})$  ( $q \geq j \geq 1$ ) comme inverse à la transformation  $(t_j)$  ou en définissant la transformation  $(t_{-j})$  directement de ses qualités, l'on obtient ainsi le même résultat. Il est pourtant à remarquer que si l'équation (20) peut s'écrire

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \gamma \sum_{i=0}^{q-1} \left( R_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + S_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z \right] = 0,$$

la transformation

$$z_{-1} = \sum_{i=0}^{q-1} \left( R_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + S_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z$$

n'est pas inverse à une transformation  $(t_1)$ , mais peut être considérée comme une transformation  $(t_{-1})$ , si l'on veut.

Comme je l'ai déjà dit, la preuve donnée ici peut être étendue à l'équation (16). Supposons que  $y = \text{const.}$  forme un système de caractéristiques à l'équation (16). L'équation (16) d'ordre  $n$  peut s'écrire

$$\Psi_p \frac{\partial^p z}{\partial y^p} + \Psi_{p-1} \frac{\partial^{p-1} z}{\partial y^{p-1}} + \dots + \Psi_0 z = 0 \quad (p \leq n-1), \text{ où } \Psi_i = \sum_{j=0}^{n-i} A_{ji} \frac{\partial^j}{\partial x^j},$$

Soit l'équation  $\Psi_p(v) = 0$  d'ordre  $s$ . Écrivons

$$\mathcal{E}_i(z) \equiv \sum_{h=0}^{p-i} \Psi_{ih} \frac{\partial^h z}{\partial y^h} \quad (i = 0, 1, \dots, p),$$

où  $\Psi_{0h} = \Psi_h$  ( $h = 0, 1, \dots, p$ ),  $\Psi_{ih} = \sum_{k=0}^{p-h-i} (-1)^k \frac{(i+k-1)!}{(i-1)! k!} \Psi_{i+h+k}^{(k)}$  ( $i > 0, h \geq 0$ ).

Toute transformation de la forme

$$z_{-j} = \sum_{i=1}^p c_i \mathcal{E}_i(z)$$

diminue le rang des  $Y$ -intégrales d'une unité. Et la condition nécessaire et suffisante pour que cette transformation, appliquée à une équation qui admet  $s$   $Y$ -intégrales distinctes, diminue le rang de chaque  $Y$ -intégrale de  $j$  unités est qu'il existe  $j - 1$  identités



$$\sum_{i=1}^{p+h} c_i \Psi_{i, -h} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, j-1).$$

Je ne puis encore dire si l'application de la transformation en question à l'équation (16) amène des résultats qui sont d'intérêt.

Pour l'équation (1), nous savons que ce fait notable a lieu: Si l'équation admet une  $X$ -intégrale [ $Y$ -intégrale] de rang  $m+1$ , il existe une intégrale intermédiaire d'ordre  $m+1$ , dépendant d'une fonction arbitraire de  $y$  [respectivement de  $x$ ], c'est pourquoi la méthode de Laplace et celle de Darboux s'appliquent avec succès aux mêmes équations (1)<sup>1)</sup>. Maintenant nous allons examiner si ce résultat peut être étendu à l'équation (20).

Soit

$$\alpha_0 X^{(m)} + \alpha_1 X^{(m-1)} + \dots + \alpha_m X$$

une  $X$ -intégrale de rang  $m+1$  de l'équation (20). Nous pouvons écrire

$$\sum_{i=0}^q \left( A_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) \sum_{j=0}^m \alpha_{m-j} \frac{\partial^j u}{\partial x^j} \equiv \sum_{i=0}^{m+1} \sum_{j=0}^q \lambda_{ij} \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j}, \quad \text{où } \lambda_{m+1, q} = \alpha_0 \neq 0.$$

Comme le premier membre de cette identité s'annule pour  $u = X$ , nous avons  $\lambda_{i0} = 0$  ( $i = 0, 1, \dots, m+1$ ) et nous pouvons écrire

$$\sum_{i=0}^q \left( A_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) \sum_{j=0}^m \alpha_{m-j} \frac{\partial^j u}{\partial x^j} \equiv \sum_{i=0}^{m+1} \sum_{j=0}^{q-1} \lambda_{i, j+1} \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j}.$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m (-1)^j \frac{\partial^j}{\partial x^j} \left[ \alpha_{m-j} \sum_{i=0}^q (-1)^i \left( \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} (A_i u) - \frac{\partial^i}{\partial y^i} (B_i u) \right) \right] &\equiv \\ &\equiv \frac{\partial}{\partial y} \sum_{i=0}^{m+1} \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^{i+j} \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} (\lambda_{i, j+1} u). \end{aligned}$$

Les équations

$$\sum_{i=0}^q (-1)^i \left[ \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} (A_i u) - \frac{\partial^i}{\partial y^i} (B_i u) \right] = 0, \quad \sum_{i=0}^{m+1} \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^{i+j} \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} (\lambda_{i, j+1} u) = 0.$$

forment un système en involution. Et toute intégrale de l'équation (23) est aussi une intégrale de l'équation

$$(57) \quad \sum_{i=0}^{m+1} \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^{i+j} \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} (\lambda_{i, j+1} u) = X, \quad \text{où } \lambda_{m+1, q} = \alpha_0 \neq 0.$$

L'équation (57), qui contient une fonction arbitraire de  $x$ , est une intégrale intermédiaire d'ordre  $m+q$  de l'équation (23).

Inversement, si l'équation (23) admet une intégrale intermédiaire de la forme (57), il en suit que les coefficients  $\alpha_i$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ) peuvent être choisis de manière que l'identité

<sup>1)</sup> GOURSAT, Leçons. T. II, pages 174—178.

$$\sum_{i=0}^q \left( A_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) \sum_{j=0}^m \alpha_{m-j} \frac{\partial^j u}{\partial x^j} \equiv \sum_{i=0}^{m+1} \sum_{j=0}^{q-1} \lambda_{i,j+1} \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} \frac{\partial u}{\partial y}, \text{ où } \alpha_0 = \lambda_{m+1, q} \neq 0,$$

a lieu, et que l'équation (20) admet l'intégrale

$$\alpha_0 X^{(m)} + \alpha_1 X^{(m-1)} + \dots + \alpha_m X.$$

Si nous supposons qu'une intégrale intermédiaire de la forme (57) de l'équation (23) soit donnée, l'on obtient ainsi sans intégration une  $X$ -intégrale de l'équation (20); et réciproquement, si une  $X$ -intégrale de l'équation (20) est donnée, on en obtient directement une intégrale intermédiaire de l'équation (23).

Supposons que

$$\beta_0 Y^{(m)} + \beta_1 Y^{(m-1)} + \dots + \beta_m Y$$

soit une  $Y$ -intégrale de rang  $m+1$  de l'équation (20). Nous pouvons écrire

$$\sum_{i=0}^q \left( A_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) \sum_{j=0}^m \beta_{m-j} \frac{\partial^j u}{\partial y^j} \equiv \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^{q+m} \mu_{ij} \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j}, \text{ où } \mu_{1, q+m} = \beta_0 \neq 0.$$

Comme le premier membre de cette identité s'annule pour  $u = Y$ , nous aurons  $\mu_{0j} = 0$  ( $j = 0, 1, \dots, q+m$ ). Il en suit

$$\sum_{j=0}^m (-1)^j \frac{\partial^j}{\partial y^j} \left[ \beta_{m-j} \sum_{i=0}^q (-1)^i \left( \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} (A_i u) - \frac{\partial^i}{\partial y^i} (B_i u) \right) \right] \equiv \frac{\partial}{\partial x} \sum_{j=0}^{q+m} (-1)^j \frac{\partial^j}{\partial y^j} (\mu_{1j} u),$$

où  $\mu_{1, q+m} = \beta_0 \neq 0$ .

L'équation (23) et l'équation

$$\sum_{j=0}^{q+m} (-1)^j \frac{\partial^j}{\partial y^j} (\mu_{1j} u) = 0$$

forment un système en involution. Et toute intégrale de l'équation (23) est aussi une intégrale de l'équation

$$(58) \quad \sum_{j=0}^{q+m} (-1)^j \frac{\partial^j}{\partial y^j} (\mu_{1j} u) = Y, \text{ où } \mu_{1, q+m} = \beta_0 \neq 0.$$

L'équation (58) est une intégrale intermédiaire d'ordre  $m+q$  de l'équation (23).

Inversement, si nous supposons qu'une intégrale intermédiaire de la forme (58) de l'équation (23) soit donnée, il en suit que l'équation (20) admet une  $Y$ -intégrale de rang  $m+1$  au plus, et l' $Y$ -intégrale est obtenue sans intégration.

Nous avons ainsi obtenu le résultat suivant; si nous supposons que l'équation (20) admette une  $X$ -intégrale [ $Y$ -intégrale] de rang  $m+1$ , il en suit que l'équation adjointe (23) admet une intégrale intermédiaire de la forme (57) [(58) respectivement], qui est d'ordre  $m+q$  et dont le second membre est une fonction arbitraire de  $x$  [respectivement de  $y$ ]. Ce résultat peut aussi être obtenu par l'application des transformations de Laplace à l'équation (20). La preuve que nous venons de donner a cependant l'avantage qu'elle peut être appliquée sans changement à l'équation (16). Si l'équation (16) d'ordre  $n$  admet une intégrale de la forme d'Euler dépendant

d'une fonction arbitraire de la variable caractéristique  $f(x, y)$  et qui est de rang  $m + 1$ , il en suit que l'équation adjointe admet une intégrale intermédiaire d'ordre  $n + m - 1$  dont le second membre est une fonction arbitraire de  $f(x, y)$ ; si l'intégrale intermédiaire est donnée, l'on obtient sans intégration l'intégrale de la forme d'Euler.

Nous savons (proposition 10) que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (20) admette une  $Y$ -intégrale est que l'équation adjointe (23) admette  $q$   $X$ -intégrales distinctes. Par conséquent, si l'équation (20) admet une  $Y$ -intégrale, l'équation (20) admet  $q$  intégrales intermédiaires de la forme (57) qui ne peuvent être remplacées par  $q - 1$  intégrales intermédiaires. Et si l'équation (20) admet  $q$   $X$ -intégrales distinctes, l'équation (20) admet une intégrale intermédiaire de la forme (58).

Il suit de la proposition 12 que la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégration de l'équation (20) puisse être ramenée à l'intégration d'équations différentielles linéaires par la méthode de Laplace est que l'équation adjointe (23) admette  $s$  intégrales intermédiaires de la forme

$$\sum_{i=0}^{m_h+1} \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^{i+j} \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} (\lambda_{i,j+1,h} u) = X_h \quad (h = 1, 2, \dots, s), \quad \text{où } \lambda_{m_h+1,q,h} = \alpha_{0h}$$

et que l'équation (20) admette  $q - s$  intégrales intermédiaires de la forme

$$\sum_{i=0}^{m_h+1} \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^{i+j} \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} (\lambda_{i,j+1,h} z) = X_h \quad (h = s + 1, s + 2, \dots, q),$$

$$\text{où } \lambda_{m_h+1,q,h} = \bar{\gamma}_{0h} = \sum_{i=s+1}^q f_{ih}(x) \gamma_{0i}$$

et où il n'existe pas de relation de la forme

$$\sum_{i=s+1}^q g_i(x) \bar{\gamma}_{0i} = 0$$

(pour la désignation  $\gamma_{0i}$  voir la proposition 12).

A ce sujet, il serait intéressant de faire une comparaison entre la méthode de Laplace et la méthode générale d'intégration de Darboux, appliquée à l'équation (20)<sup>1)</sup>, la méthode de Darboux ayant justement pour but de trouver des intégrales intermédiaires de l'équation en question; c'est mon intention d'y revenir une autre fois.

<sup>1)</sup> La méthode générale de Darboux pour intégrer l'équation (15)

$$F \left[ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, z, x, y \right] = 0$$

peut être étendue aux équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur, à deux variables indépendantes. Voir: GOURSAT, Leçons. T. II, pages 313—316.



## II.

La méthode de Laplace pour l'équation (1) a été beaucoup simplifiée par l'introduction de la désignation des invariants

$$h = \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c, \quad k = \frac{\partial b}{\partial y} + ab - c.$$

En partant des invariants  $h$  et  $k$  on peut calculer les invariants  $h_1, h_2, h_3, \dots$  et  $k_{-1}, k_{-2}, k_{-3}, \dots$  par l'emploi répété des formules

$$\begin{cases} h_{i+1} + h_{i-1} = 2h_i - \frac{\partial^2 \log h_i}{\partial x \partial y} \\ k_{i+1} = h_i \end{cases} \quad (i \geq 0).$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) admette une  $X$ -intégrale [ $Y$ -intégrale] de rang  $m+1$  est  $h_m = 0$  [ $k_{-m} = 0$ ]. Supposons  $h_m = 0$ . En appliquant la transformation (6)  $m$  fois de suite, nous obtiendrons l'équation

$$\frac{\partial^2 z_m}{\partial x \partial y} + a_m \frac{\partial z_m}{\partial x} + b \frac{\partial z_m}{\partial y} + c_m z_m = 0, \quad \text{où } \frac{\partial a_m}{\partial x} + a_m b - c_m = 0, \quad \frac{\partial b}{\partial y} + a_m b - c_m = k_m,$$

qui admet l'intégrale  $e^{-\int a_m dy} X$ . De l'intégrale générale de la dernière équation l'on obtient l'intégrale générale de l'équation (1) par l'emploi de la formule

$$z = e^{-\int b dx} \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x} \dots \frac{1}{h_{m-1}} \frac{\partial}{\partial x} (z_m e^{\int b dx}).$$

En appliquant la méthode de Laplace à l'équation (1) on n'a donc jamais besoin d'employer les transformations de Laplace, il suffit de calculer les invariants  $h, h_1, h_2, h_3, \dots$  et  $k, k_{-1}, k_{-2}, k_{-3}, \dots$ . Il serait intéressant d'étendre la désignation des invariants à l'équation (20).

Le caractère essentiel des invariants  $h$  et  $k$  de l'équation (1) est qu'ils ne changent pas de valeurs pour la substitution  $z = \lambda \bar{z}$ , où  $\lambda$  est une fonction quelconque de  $x$  et de  $y$ , et que deux équations de la forme (1) qui ont les mêmes valeurs

des invariants  $h$  et  $k$  peuvent se ramener l'une à l'autre par une substitution de la forme  $z = \lambda \bar{z}$ .

Par la substitution  $z = \lambda \bar{z}$ , l'équation (20) est ramenée à l'équation (41)

$$\sum_{i=0}^q \left( \bar{A}_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + \bar{B}_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) \bar{z} = 0,$$

où les coefficients  $\bar{A}_i$ ,  $\bar{B}_i$  sont définis par les équations (41').

Écrivons

$$I_i = \frac{1}{v} \sum_{j=0}^{q-i} \frac{(i+j)!}{i! j!} A_{i+j} \frac{\partial^j v}{\partial y^j} \quad (i = 0, 1, \dots, q-2), \quad \text{où } \frac{\partial \log v}{\partial y} = -\frac{1}{q} A_{q-1}.$$

$v$  est déterminé à un facteur près qui est une fonction de  $x$ , et les fonctions  $I_i$  ( $i = 0, 1, \dots, q-2$ ) ne dépendent pas de ce facteur. Nous pouvons aussi écrire

$$I_i = A_i - \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{q-i} \frac{(i+j)!}{i! j!} A_{i+j} \left( \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{q} A_{q-1} \right)^{j-1} A_{q-1} \quad (i = 0, 1, \dots, q-2).$$

Si l'on choisit  $\lambda$  exactement égal à  $v$ , l'on obtient

$$\prod_{\lambda=v} \bar{A}_{q-1} = 0, \quad \prod_{\lambda=v} \bar{A}_i = I_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-2).$$

Il en résulte que, si une équation du type

$$\sum_{i=0}^q \left( \bar{A}_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + \bar{B}_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) \bar{z} = 0, \quad \text{où } \bar{A}_{q-1} = 0,$$

est donnée, et que l'on fasse la substitution  $z = \lambda \bar{z}$ , l'on obtient une équation pour laquelle nous aurons  $I_i = \bar{A}_i$  ( $i = 0, 1, \dots, q-2$ ); c'est-à-dire les valeurs des fonctions  $I_i$  ( $i = 0, 1, \dots, q-2$ ) sont indépendantes de  $\lambda$ . Toutes les fonctions  $I_i$  ( $i = 0, 1, \dots, q-2$ ) sont par suite des invariants de l'équation (20) pour la substitution  $z = \lambda \bar{z}$ .

Nous voyons immédiatement que la fonction  $I_{q-1}$ , où

$$I_{q-1} = \frac{\partial A_{q-1}}{\partial x} - q \frac{\partial B_q}{\partial y},$$

est aussi un invariant de l'équation (20).

Nous avons déjà employé la désignation

$$P_i = \frac{\partial A_i}{\partial x} + A_i B_q - B_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-1)$$

(voir page 22); écrivons aussi

$$\bar{P}_i = \frac{\partial \bar{A}_i}{\partial x} + \bar{A}_i \bar{B}_q - \bar{B}_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-1).$$

Les équations (41') nous donnent

$$\bar{P}_i = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{q-i-1} \frac{(i+j)!}{i! j!} P_{i+j} \frac{\partial^j \lambda}{\partial y^j} \quad (i = 0, 1, \dots, q-1).$$

Écrivons

$$H_i = \frac{1}{\nu} \sum_{j=0}^{q-i-1} \frac{(i+j)!}{i! j!} P_{i+j} \frac{\partial^j \nu}{\partial y^j} \quad (i = 0, 1, \dots, q-1), \quad \text{où } \frac{\partial \log \nu}{\partial y} = -\frac{1}{q} A_{q-1};$$

$\nu$  est déterminé à un facteur près qui est une fonction de  $x$ ; les fonctions  $H_i$  ( $i = 0, 1, \dots, q-1$ ) ne dépendent pas de ce facteur. Nous pouvons aussi écrire

$$H_i = P_i - \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{q-i-1} \frac{(i+j)!}{i! j!} P_{i+j} \left( \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{q} A_{q-1} \right)^{j-1} A_{q-1} \quad (i = 0, 1, \dots, q-1).$$

Si l'on choisit  $\lambda$  égal à  $\nu$ , l'on obtient

$$\prod_{\lambda=\nu} \bar{P}_i = H_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-1).$$

De même que nous avons prouvé que les fonctions  $I_i$  ( $i = 0, 1, \dots, q-2$ ) sont des invariants de l'équation (20), nous trouvons aussi que les fonctions  $H_i$  ( $i = 0, 1, \dots, q-1$ ) sont des invariants de l'équation (20) pour la substitution  $z = \lambda \bar{z}^{-1}$ .

Nous avons ainsi obtenu les  $2q$  invariants

$$I_i, H_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-1)$$

de l'équation (20). Si  $A_{q-1} = 0$ , nous aurons:

$$I_{q-1} = -q \frac{\partial B_q}{\partial y}, \quad I_i = A_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-2),$$

$$H_i = \frac{\partial A_i}{\partial x} + A_i B_q - B_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-1).$$

Les  $2q$  invariants  $H_i, I_i$  ( $i = 0, 1, \dots, q-1$ ) sont évidemment indépendants l'un de l'autre. Il est aisé de voir que deux équations de la forme (20) qui ont les mêmes valeurs des  $2q$  invariants  $H_i, I_i$  ( $i = 0, 1, \dots, q-1$ ) peuvent se ramener l'une à l'autre par la substitution  $z = \lambda \bar{z}$ . Il en suit que tout invariant de l'équation (20) peut s'exprimer au moyen des invariants  $I_i, H_i$  ( $i = 0, 1, \dots, q-1$ ). — Comme Darboux, je veux regarder comme équivalentes deux équations qui se ramènent l'une à l'autre par le changement de  $z$  en  $\lambda z$  et qui ont, par conséquent, les mêmes invariants.

<sup>1)</sup> Pisati a déjà donné des relations entre les invariants  $H_i$  et les coefficients de l'équation (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1905, page 360).



Les invariants de l'équation adjointe (23) sont aussi des invariants de l'équation (20), car en effectuant la substitution  $z = \lambda \bar{z}$  à l'équation (20) et la substitution  $u = \frac{1}{\lambda} \bar{u}$  à l'équation (23), écrite sous la forme (38), l'on obtiendra les deux équations

$$\sum_{i=0}^q \frac{1}{\lambda} \left( A_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) (\lambda \bar{z}) = 0, \quad \sum_{i=0}^q \lambda \left( C_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + D_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) \left( \frac{\bar{u}}{\lambda} \right) = 0$$

qui sont toujours adjointes. Je forme les  $2q$  invariants

$$J_i, K_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-1)$$

des coefficients de l'équation (23) de la même manière que j'ai formé les invariants  $I_i, H_i$  ( $i = 0, 1, \dots, q-1$ ) des coefficients de l'équation (20). Deux équations de la forme (20) qui ont les mêmes valeurs des  $2q$  invariants  $J_i, K_i$  ( $i = 0, 1, \dots, q-1$ ) sont équivalentes, car les deux équations adjointes sont équivalentes. Tout invariant de l'équation (20) peut par suite s'exprimer au moyen des  $2q$  invariants  $J_i, K_i$  ( $i = 0, 1, \dots, q-1$ ).

Comme tous les invariants de l'équation (20) sont des fonctions des invariants  $I_i, H_i$  ( $i = 0, 1, \dots, q-1$ ), chacun des invariants  $J_i, K_i$  ( $i = 0, 1, \dots, q-1$ ) doit pouvoir s'exprimer au moyen des  $2q$  invariants  $I_i, H_i$  ( $i = 0, 1, \dots, q-1$ ). Nous allons maintenant chercher les relations qui lient les invariants  $I_i, H_i$  ( $i = 0, 1, \dots, q-1$ ) et les invariants  $J_i, K_i$  ( $i = 0, 1, \dots, q-1$ ). Si nous supposons  $A_{q-1} = 0$ , nous aurons

$$I_{q-1} = -q \frac{\partial B_q}{\partial y}, \quad J_{q-1} = -q \frac{\partial D_q}{\partial y}, \quad I_i = A_i, \quad J_i = C_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-2)$$

$$H_i = \frac{\partial A_i}{\partial x} + A_i B_q - B_i, \quad K_i = \frac{\partial C_i}{\partial x} + C_i D_q - D_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-1).$$

Les équations (38') nous donnent immédiatement

$$J_{q-1} = -I_{q-1}, \quad J_i = (-1)^{q-i} \sum_{j=0}^{q-i-2} (-1)^j \frac{(i+j)!}{i! j!} \frac{\partial^j}{\partial y^j} I_{i+j} \quad (i = 0, 1, \dots, q-2).$$

Des équations (38') nous pouvons aussi déduire

$$\begin{aligned} H_i - \frac{\partial I_i}{\partial x} + (-1)^{q-i} \left( K_i - \frac{\partial J_i}{\partial x} \right) + \sum_{j=0}^{q-i-1} (-1)^j \frac{(i+j)!}{i! j!} \frac{\partial^j}{\partial y^j} [H_{i+j} + (-1)^{q-i} K_{i+j}] = \\ = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{q-i-2} \frac{(i+j)!}{i! j!} [I_{i+j} - (-1)^{q-i} J_{i+j}] \frac{\partial^{j-1} I_{q-1}}{\partial y^{j-1}} \quad (i = 0, 1, \dots, q-1). \end{aligned}$$

Les relations qui lient les invariants  $I_i, H_i$  ( $i = 0, 1, \dots, q-1$ ) et les invariants  $J_i, K_i$  ( $i = 0, 1, \dots, q-1$ ) sont données par les  $2q$  équations obtenues. Il résulte

de ces relations que si deux équations de la forme (20) où  $q > 1$  ont les mêmes valeurs des  $2q$  invariants

$$H_i, K_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-1),$$

il n'en suit nullement que les deux équations soient équivalentes; par suite, si  $q > 1$ , on ne peut pas obtenir tous les invariants de l'équation (20) au moyen des  $2q$  invariants  $H_i, K_i$  ( $i = 0, 1, \dots, q-1$ ).

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (20) admette  $q$   $X$ -intégrales distinctes de rang 1 est  $H_i = 0$  ( $i = 0, 1, \dots, q-1$ ), et la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (20) admette une  $Y$ -intégrale de rang 1 est  $K_i = 0$  ( $i = 0, 1, \dots, q-1$ ). Nous allons maintenant examiner à quelles relations les invariants doivent satisfaire pour que l'équation (20) admette  $s$   $X$ -intégrales distinctes de rang 1.

Nous écrivons

$$H_{ij} = \frac{1}{v} \sum_{r=0}^{q-i-j} \frac{(i+r)!}{i! r!} P_{i+r, j} \frac{\partial^r v}{\partial y^r} \quad \left( \begin{matrix} i = 0, 1, \dots, q-j \\ j = 1, 2, \dots, q \end{matrix} \right), \quad \text{où} \quad \frac{\partial \log v}{\partial y} = -\frac{1}{q} A_{q-1}.$$

Les quantités  $P_{ij}$  ont été définies page 23. D'après la désignation appliquée, nous avons  $P_i = P_{i1}$  et par suite  $H_i = H_{i1}$ .

De la même manière que nous avons trouvé que les  $H_i$  sont des invariants, l'on peut aussi montrer que tous les  $H_{ij}$  sont des invariants de l'équation (20). Tous les  $H_{ij}$  peuvent s'exprimer au moyen des  $2q-1$  invariants  $I_i$  ( $i = 0, 1, \dots, q-2$ ),  $H_i$  ( $i = 0, 1, \dots, q-1$ ). Si nous supposons  $A_{q-1} = 0$ , nous obtiendrons

$$H_{ij} = P_{ij} \quad \left( \begin{matrix} i = 0, 1, \dots, q-j \\ j = 1, 2, \dots, q \end{matrix} \right);$$

en remplaçant

$$A_{q-1} = 0, \quad A_r = I_r \quad (r = 0, 1, \dots, q-2), \quad P_r = H_r \quad (r = 0, 1, \dots, q-1),$$

dans la définition de  $P_{ij}$  (page 23), nous obtiendrons  $H_{ij}$  en fonction de

$$I_r \quad (r = i-j+2, i-j+3, \dots, q-2), \quad H_r \quad (r = i-j+1, i-j+2, \dots, q-1).$$

Entre les invariants  $H_{ij} \quad \left( \begin{matrix} i = 0, 1, \dots, q-j \\ j = 1, 2, \dots, q \end{matrix} \right)$  existent les relations suivantes

$$(59) \quad H_{i, j+1} (H_{p+1, j-1})^2 = \begin{vmatrix} H_{p, j} & H_{p-1, j} + H'_{p, j} & H_{i-1, j} + H'_{i, j} \\ 0 & H_{p, j} & H_{i, j} \\ H_{p+1, j-1} & H_{p, j-1} & H_{i, j-1} \end{vmatrix},$$

$$(59') \quad H_{i, j+2} (H_{p+1, j-1})^4 =$$

$$= \begin{vmatrix} H_{p, j} & H_{p-1, j} + 2H'_{p, j} & H_{p-2, j} + 2H'_{p-1, j} + H''_{p, j} & H_{p-3, j} + 2H'_{p-2, j} + H''_{p-1, j} & H_{i-2, j} + 2H'_{i-1, j} + H''_{i, j} \\ 0 & H_{p, j} & H_{p-1, j} + H'_{p, j} & H_{p-2, j} + H'_{p-1, j} & H_{i-1, j} + H'_{i, j} \\ 0 & 0 & H_{p, j} & H_{p-1, j} & H_{i, j} \\ H_{p+1, j-1} & H_{p, j-1} + H'_{p+1, j-1} & H_{p-1, j-1} + H'_{p, j-1} & H_{p-2, j-1} + H'_{p-1, j-1} & H_{i-1, j-1} + H'_{i, j-1} \\ 0 & H_{p+1, j-1} & H_{p, j-1} & H_{p-1, j-1} & H_{i, j-1} \end{vmatrix}$$

etc. où  $p = q-j$  et où la désignation  $\frac{\partial H}{\partial y} = H'$ ,  $\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = H''$  est employée [pages 23, 24].

Selon la proposition 2, la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (20) admette  $s$   $X$ -intégrales distinctes de rang 1 est

$$H_{i, q-i} = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, s-1).$$

Formons les invariants

$$K_{ij} \left( \begin{matrix} i = 0, 1, \dots, q-j \\ j = 1, 2, \dots, q \end{matrix} \right)$$

des coefficients de l'équation (23) de la même manière que nous avons formé les invariants

$$H_{ij} \left( \begin{matrix} i = 0, 1, \dots, q-j \\ j = 1, 2, \dots, q \end{matrix} \right)$$

des coefficients de l'équation (20) [page 73]. La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (23) admette  $s$   $X$ -intégrales distinctes de rang 1 est

$$K_{i, q-i} = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, s-1).$$

Pour reconnaître si l'équation (20) [(23)] admet des  $X$ -intégrales de rang 1, et dans ce cas combien, il n'est donc pas nécessaire de calculer tous les invariants

$$H_{ij} [K_{ij}] \left( \begin{matrix} i = 0, 1, \dots, q-j \\ j = 1, 2, \dots, q \end{matrix} \right),$$

il suffit de calculer les  $q$  invariants  $H_{i, q-i}$  [ $K_{i, q-i}$  respectivement] ( $i = 0, 1, \dots, q-1$ ).

Ce sont les  $2q$  invariants

$$H_{i, q-i}, K_{i, q-i} \quad (i = 0, 1, \dots, q-1)$$

qui correspondent le plus près aux invariants

$$h = \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c, \quad k = \frac{\partial b}{\partial y} + ab - c$$

de l'équation (1). Si l'on effectue la substitution  $x = \varphi(\bar{x})$ ,  $y = \psi(\bar{y})$ , les invariants  $h$  et  $k$  de l'équation (1) ne subissent pas d'autre changement qu'une multiplication par le facteur  $\varphi'(\bar{x})\psi'(\bar{y})$ . Parmi les invariants

$$H_{ij}, K_{ij} \left( \begin{matrix} i = 0, 1, \dots, q-j \\ j = 1, 2, \dots, q \end{matrix} \right), \quad I_i, J_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-1)$$

de l'équation (20) ce sont seulement les  $2q$  invariants

$$H_{i, q-i}, K_{i, q-i} \quad (i = 0, 1, \dots, q-1)$$

qui, à un facteur près, se reproduisent, quand on effectue la substitution  $x = \varphi(\bar{x})$ ,  $y = \psi(\bar{y})$ . Mais il y a une différence très importante entre les invariants  $h$  et  $k$  de l'équation (1) et les invariants  $H_{i, q-i}$ ,  $K_{i, q-i}$  ( $i = 0, 1, \dots, q-1$ ) de l'équation (20). Deux équations de la forme (1) qui ont les mêmes valeurs des deux invariants  $h$  et  $k$  sont équivalentes; tout invariant de l'équation (1) s'exprime au moyen de  $h$  et de  $k$ . Mais si deux équations de la forme (20) ont les mêmes valeurs des  $2q$  invariants  $H_{i, q-i}$ ,  $K_{i, q-i}$  ( $i = 0, 1, \dots, q-1$ ), il n'en suit nullement qu'elles soient équivalentes; on ne peut point exprimer tous les invariants de l'équation (20) au moyen des invariants  $H_{i, q-i}$ ,  $K_{i, q-i}$  ( $i = 0, 1, \dots, q-1$ ) [voir page 73].



L'importance de l'emploi de la notation des invariants  $h$  et  $k$  consiste dans ce fait que les invariants des équations obtenues par l'application des transformations de Laplace à l'équation (1) sont aussi des invariants de l'équation (1) et s'expriment par suite au moyen de  $h$  et de  $k$ . Nous allons maintenant examiner si c'est le même cas pour l'équation (20). Si nous appliquons une transformation ( $t_1$ )

$$z_1 = \alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{z}{\alpha_0} \right), \quad \text{où} \quad \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0,$$

à l'équation (20), nous obtiendrons une équation dont les invariants dépendent de  $\alpha_0$ ; par conséquent, les invariants de l'équation qui définit  $z_1$  ne sont pas de règle des invariants de l'équation (20). De même, si nous appliquons une transformation ( $t_i$ ) ou ( $t_{-i}$ ), où  $q > i \geq 1$ , nous arriverons à des équations dont les invariants ne sont pas en général des invariants de l'équation (20). Ce sont seulement les transformations ( $T_1$ ) et ( $T_{-1}$ ) [pages 37 et 56] qui sont toujours complètement déterminées, et ce n'est qu'en appliquant les transformations ( $T_1$ ) et ( $T_{-1}$ ) à l'équation (20) que nous pouvons attendre à arriver à une équation dont les invariants sont aussi des invariants de l'équation (20). La transformation ( $T_1$ ) de l'équation (20) est

$$z_q = \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i}.$$

Si nous effectuons la substitution  $z = \lambda \bar{z}$ , l'équation (20) pourra s'écrire

$$\sum_{i=0}^q \left( \bar{A}_i \frac{\partial^{i+1} \bar{z}}{\partial x \partial y^i} + \bar{B}_i \frac{\partial^i \bar{z}}{\partial y^i} \right) = 0, \quad \text{où} \quad \sum_{i=0}^q \bar{A}_i \frac{\partial^i \alpha}{\partial y^i} \equiv \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} (\lambda \alpha).$$

La transformation ( $T_1$ ) de cette équation est

$$\bar{z}_q = \sum_{i=0}^q \bar{A}_i \frac{\partial^i \bar{z}}{\partial y^i},$$

et nous avons par suite  $\bar{z}_q = \frac{1}{\lambda} z_q$ . Il en suit que les invariants de l'équation ( $E_1$ ) sont aussi des invariants de l'équation ( $E$ ), ce qui est évidemment le cas soit que l'équation ( $E_1$ ) soit d'ordre  $n$  ou d'ordre inférieur à  $n$ . Si nous appliquons la transformation ( $T_1$ ) plusieurs fois de suite à l'équation (20), nous obtiendrons donc une série d'équations ( $E_1$ ), ( $E_2$ ), ( $E_3$ ), ... dont les invariants sont des fonctions de  $I_i$ ,  $H_i$  ( $i = 0, 1, \dots, q-1$ ). Comme les équations ( $E_1$ ) et ( $E'_{-1}$ ) sont adjointes, abstraction faite d'un facteur, les invariants de l'équation ( $E'_{-1}$ ) sont aussi des invariants de l'équation ( $E'$ ). Si nous appliquons la transformation ( $T_{-1}$ ) à l'équation (23), nous obtiendrons ainsi une équation dont les invariants sont aussi des invariants de l'équation (23). Il en suit que si l'on applique la transformation ( $T_{-1}$ ) répétée à l'équation (20), l'on obtiendra une série d'équations ( $E_{-1}$ ), ( $E_{-2}$ ), ( $E_{-3}$ ) ... d'ordre  $n$  au plus, dont les invariants ne dépendent que de  $I_i$ ,  $H_i$ , ( $i = 0, 1, \dots, q-1$ ). La transformation ( $T_{-1}$ ) peut s'écrire

$$z_{-q} = \sum_{i=1}^q c_i \mathcal{S}_i(z),$$

les coefficients  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) étant complètement déterminés (voir la proposition 11). Le fait que les invariants de l'équation  $(E_{-1})$  sont des invariants de l'équation  $(E)$  signifie que les invariants de l'équation

$$\sum_{i=0}^q c_i \mathcal{S}_i(v) = 0,$$

où  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) remplissent les conditions données dans la proposition 11, sont aussi des invariants de l'équation (20).

Je vais maintenant, comme Darboux, étendre la désignation  $(E)$ ,  $(E_1)$ ,  $(E_2)$ , ...,  $(E_{-1})$ ,  $(E_{-2})$ , ...,  $(E')$ ,  $(E'_1)$ ,  $(E'_2)$ , ...,  $(E'_{-1})$ ,  $(E'_{-2})$ , ... aux équations équivalentes. Les équations  $(E_i)$  et  $(E'_{-i})$  sont par suite des équations adjointes (c'est pourtant à remarquer que si l'équation  $(E_i)$ ,  $i > 0$ , est d'ordre inférieur à  $n$ , le second membre de l'équation  $(E'_{-i})$  n'est pas nul).

Je désigne les invariants  $I_i$ ,  $H_i$ ,  $J_i$ ,  $K_i$ ,  $H_{is}$ ,  $K_{is}$  de l'équation  $(E_j)$  ( $j \leq 0$ ) par  $[I_i]_j$ ,  $[H_i]_j$ ,  $[J_i]_j$ ,  $[K_i]_j$ ,  $[H_{is}]_j$ ,  $[K_{is}]_j$ .

Nous avons trouvé que les invariants de toutes les équations  $(E_j)$  ( $j \leq 0$ ) ne dépendent que des  $2q$  invariants  $I_i$ ,  $H_i$  ( $i = 0, 1, \dots, q-1$ ). Si le problème de déterminer les invariants de l'équation  $(E_1)$  au moyen des invariants de l'équation  $(E)$  était résolu, nous n'aurions plus besoin d'appliquer la transformation  $(T_1)$  pour reconnaître si l'équation  $(E)$  admet des  $X$ -intégrales; au lieu de cela, nous pourrions en partant des invariants de l'équation  $(E)$  calculer successivement les invariants des équations  $(E_1)$ ,  $(E_2)$ ,  $(E_3)$ , ... . Et à l'aide des relations entre les invariants des équations  $(E)$  et  $(E_1)$  nous obtiendrions, en remplaçant

$$I_i, H_{ij}, J_i, K_{ij}, [I_i]_1, [H_{ij}]_1, [J_i]_1, [K_{ij}]_1$$

par

$$J_i, K_{ij}, I_i, H_{ij}, [J_i]_{-1}, [K_{ij}]_{-1}, [I_i]_{-1}, [H_{ij}]_{-1},$$

les relations entre les invariants des équations  $(E)$  et  $(E_{-1})$ , puisque les équations  $(E'_1)$  et  $(E_{-1})$  sont adjointes. Calculer les invariants de l'équation  $(E_{-1})$  en fonction des invariants de l'équation  $(E)$ , voilà donc le même problème que de déterminer les invariants de l'équation  $(E_1)$  en fonction des invariants de l'équation  $(E)$ . Si le problème de déterminer les invariants de l'équation  $(E_1)$  en fonction des invariants de l'équation  $(E)$  était résolu, nous aurions ainsi pu reconnaître, sans appliquer les transformations de Laplace, à quel point l'intégration de l'équation (20) peut être simplifiée par la méthode de Laplace.

Nous voyons ainsi que, pour l'application pratique de la méthode de Laplace, il est d'une grande importance de trouver les relations qu'il y a entre les invariants des équations  $(E)$  et  $(E_1)$ . L'équation  $(E_1)$  s'obtient en différentiant les équations

(46) et (21) et en éliminant  $z$  et ces dérivées entre les équations obtenues [voir page 38]. Pour abréger, désignons le premier membre de l'équation (46') par

$$\Phi_j(z_q).$$

Si l'équation  $(E_1)$  est d'ordre  $n - s$ , elle peut s'écrire

$$\Phi_{n-s}(z_q) = 0.$$

Si nous supposons  $A_{q-1} = 0$ , les coefficients de l'équation obtenue sont donnés en fonction de  $I_i$ ,  $H_i$  ( $i = 0, 1, \dots, q-1$ ) et de  $B_q$ . En partant de ces coefficients l'on pourrait par suite calculer les invariants de l'équation  $(E_1)$  en fonction de  $I_i$ ,  $H_i$  ( $i = 0, 1, \dots, q-1$ ); mais si on calculait les invariants de l'équation  $(E_1)$  d'une telle manière, on obtiendrait des relations très compliquées entre les invariants des équations  $(E)$  et  $(E_1)$ .

Je vais maintenant essayer de trouver des relations plus simples entre les invariants des équations  $(E_1)$  et  $(E)$ . Supposons  $A_{q-1} = 0$ ; nous avons alors  $H_{ij} = P_{ij}$ . En différentiant l'équation (46)  $j-1$  fois par rapport à  $y$  et l'équation (21)  $j-2$  fois par rapport à  $y$  et en éliminant entre les équations obtenues les quantités  $\frac{\partial^{q+j-2} z}{\partial y^{q+j-2}}$ ,  $\frac{\partial^{q+j-3} z}{\partial y^{q+j-3}}$ ,  $\dots$ ,  $\frac{\partial^{q-j+1} z}{\partial y^{q-j+1}}$ , l'on obtiendra l'équation

$$\Phi_j(z_q) = \sum_{i=0}^{q-j} H_{ij} \frac{\partial^i z}{\partial y^i}.$$

Les expressions  $\Phi_j(z_q)$  ( $j = 1, 2, \dots, q+1$ ) peuvent être obtenues de la manière suivante: nous avons

$$\begin{aligned} \Phi_1(z_q) &\equiv \frac{\partial z_q}{\partial x} + B_q z_q, \\ (60) \quad \Phi_2(z_q) &\equiv \begin{vmatrix} H_{q-1} & H_{q-2} + H'_{q-1} & \frac{\partial}{\partial y} \Phi_1(z_q) \\ 0 & H_{q-1} & \Phi_1(z_q) \\ 1 & 0 & z_q \end{vmatrix} \end{aligned}$$

et

$$(60') \quad \Phi_{j+1}(z_q) \equiv \frac{1}{(H_{q-j+1, j-1})^2} \begin{vmatrix} H_{q-j, j} & H_{q-j-1, j} + H'_{q-j, j} & \frac{\partial}{\partial y} \Phi_j(z_q) \\ 0 & H_{q-j, j} & \Phi_j(z_q) \\ H_{q-j+1, j-1} & H_{q-j, j-1} & \Phi_{j-1}(z_q) \end{vmatrix} \quad (q \geq j \geq 2).$$

pourvu que  $H_{q-j+1, j-1} \neq 0$ , ce qui suit de l'équation (59). A l'aide de ces formules, nous obtiendrons les coefficients de  $z_q$  et de ces dérivées dans les expressions

$$\Phi_{j+1}(z_q) \quad (j = 0, 1, \dots, q)$$

en fonction de

$$B_q, H_{q-i, i} \quad (i = 1, 2, \dots, q), \quad H_{q-i-1, i} \quad (i = 1, 2, \dots, q-1),$$

pourvu que  $H_{q-i, i} \neq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ). Si la condition

$$H_{q-i, i} \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, q)$$

n'est pas remplie, on peut, en tenant compte des équations (59), (59') etc., obtenir les coefficients de  $z_q$  et de ces dérivées dans les expressions  $\Phi_j(z_q)$  ( $j = 1, 2, \dots, q+1$ ) en fonction de  $B_q$  et des invariants de l'équation (20) d'une manière un peu modifiée.



Nous allons maintenant essayer de déterminer les coefficients de  $z_q$  et de ses dérivées dans les expressions  $\Phi_j(z_q)$  ( $j = 1, 2, \dots, q+1$ ) en fonction des coefficients de l'équation qui définit  $z_q$ . Puis nous allons égaler les deux expressions des coefficients en question. De cette manière, nous obtiendrons des relations entre les invariants des équations  $(E)$  et  $(E_1)$ .

Supposons que l'équation  $(E_1)$  soit d'ordre  $n$ . Nous écrivons l'équation qui définit  $z_q$

$$(61) \quad \mathfrak{F}_0(z_q) \equiv \sum_{i=0}^q \left( [A_i]_1 \frac{\partial^{i+1} z_q}{\partial x \partial y^i} + [B_i]_1 \frac{\partial^i z_q}{\partial y^i} \right) = 0, \quad [A_q]_1 = 1,$$

et en partant de cette équation nous formons les expressions  $\mathfrak{F}_i(z_q)$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) de la même manière que les expressions  $\mathfrak{G}_i(z)$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) ont été formées de l'équation (20) [page 49]. Si

$$\beta_0 Y^{(r)} + \beta_1 Y^{(r-1)} + \dots + \beta_r Y$$

est une  $Y$ -intégrale de rang  $r+1$  de l'équation (20) et que cette  $Y$ -intégrale soit substituée dans les équations

$$z_q = \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i}, \quad \Phi_j(z_q) = \sum_{i=0}^{q-j} H_{ij} \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \quad (j = 1, 2, \dots, q),$$

nous trouvons que la transformation  $\zeta = \Phi_j(z_q)$ , appliquée à l'équation (61), diminue le rang de l' $Y$ -intégrale de  $j$  unités. J'ai déjà (pages 63, 64) montré que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une transformation de la forme

$$z_{-j} = \sum_{i=0}^{q-1} \left( T_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + U_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \right),$$

appliquée à une équation qui admet une  $Y$ -intégrale, diminue le rang de l' $Y$ -intégrale de  $j$  unités, est que la transformation soit de la forme

$$z_{-j} = \sum_{i=1}^q c_i \mathfrak{G}_i(z),$$

où les coefficients  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) vérifient les  $j-1$  relations linéaires et homogènes qu'on obtient en éliminant les  $j-1$  coefficients  $c_i$  ( $i = q+1, q+2, \dots, q+j-1$ ) entre les  $2(j-1)$  relations (56'). Il en résulte que l'expression  $\Phi_j(z_q)$ , qui ne renferme de dérivées de  $z$  que jusqu'à l'ordre  $j$  au plus, est de la forme

$$(62) \quad \Phi_j(z_q) \equiv \sum_{i=q-j+1}^q e_{ij} \mathfrak{F}_i(z_q),$$

où les coefficients  $e_{ij}$  ( $i = q-j+1, q-j+2, \dots, q$ ), à un facteur près, sont déterminées par les  $j-1$  relations linéaires et homogènes qu'on obtient en éliminant les  $j-1$  coefficients  $e_{ij}$  ( $i = q+1, q+2, \dots, q+j-1$ ) entre les  $2(j-1)$  relations

$$(63) \quad \begin{cases} \sum_{i=0}^{q+h-1} (-1)^i \left[ e_{i+1,j} \sum_{k=0}^h \frac{h!}{k! (h-k)!} [Q_{i+k-h}]_1^{(k)} \right] = 0 \\ \sum_{i=0}^{q+h} (-1)^i \left[ e_{i+1,j} \sum_{k=0}^h \frac{h!}{k! (h-k)!} [C_{i+k-h}]_1^{(k)} \right] = 0 \end{cases} \quad (h = 0, 1, \dots, j-2),$$

où  $e_{ij} = 0$  ( $i \leq q - j$ ) et où les coefficients  $[C_i]_1$  et  $[Q_i]_1$  ont été formés des coefficients de l'équation (61) de la même manière que les coefficients  $C_i$  et  $Q_i$  ont été formés des coefficients de l'équation (20) [pages 25, 26]. Nous sommes partis de ce que l'équation (20) admet une  $Y$ -intégrale, mais la définition en question des expressions  $\Phi_j(z_q)$  ( $j = 1, 2, \dots, q$ ) est valable aussi dans le cas où l'équation (20) n'admet pas une  $Y$ -intégrale (voir pages 64, 65). — Il est aisé de voir que la définition en question est valable aussi pour l'expression  $\Phi_{q+1}(z_q)$ , car les conditions (63) où  $j = q + 1$  nous donnent  $e_{i, q+1} = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ).

Si nous supposons que l'équation ( $E_1$ ) soit d'ordre  $p + 1$  ( $p < q$ ), on voit aisément qu'on peut définir les expressions  $\Phi_j(z_q)$  ( $j = 1, 2, \dots, p + 1$ ) d'une manière un peu modifiée (en remplaçant  $q$  par  $p$ ); l'expression  $\Phi_j(z_q)$  est de la forme

$$\Phi_j(z_q) \equiv \sum_{i=p-j+1}^p e_{ij} \mathfrak{F}_i(z_q),$$

l'équation qui définit  $z_q$  étant désignée  $\mathfrak{F}_0(z_q) = 0$ .

Nous avons ainsi obtenu deux définitions différentes des expressions  $\Phi_j(z_q)$  ( $j = 1, 2, \dots, q + 1$ ). D'un côté, les expressions  $\Phi_{j+1}(z_q)$  ( $j = 0, 1, \dots, q$ ) peuvent être obtenues par les formules (60) et (60'), et de l'autre côté, les expressions  $\Phi_j(z_q)$  ( $j = 1, 2, \dots, q + 1$ ) peuvent se mettre sous la forme (62), où les  $j$  coefficients  $e_{ij}$  ( $i = q - j + 1, q - j + 2, \dots, q$ ) sont déterminées, à un facteur près, par les relations (63). En égalant les deux formules des expressions  $\Phi_j(z_q)$  ( $j = 1, 2, \dots, q + 1$ ), nous allons obtenir des relations entre les invariants de l'équation ( $E$ ) et ceux de l'équation ( $E_1$ ).

Supposons d'abord

$$H_{q-i}, i \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, q).$$

Les relations entre les coefficients  $e_{ij}$  ( $i = q - j + 1, q - j + 2, \dots, q$ ), qu'on obtient des relations (63), peuvent s'écrire (voir page 53)

$$(63') \quad \sum_{i=0}^{q-h} (-1)^i e_{i+1, j} [Q_{ih}]_1 = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, j - 1),$$

où  $e_{ij} = 0$  ( $i \leq q - j$ ) et où les coefficients  $[Q_{ij}]_1$  ont été formés des coefficients de l'équation (61) de la même manière que les coefficients  $Q_{ij}$  ont été formés des coefficients de l'équation (20) (page 26). Les équations (60) et (60') nous donnent

$$e_{q-j+1, j} = (-1)^{j-1} H_{q-j+1, j-1}.$$

— Comme  $\Phi_1 = \mathfrak{F}_q = \mathfrak{E}_q$ , nous avons  $[B_q]_1 = B_q$ . L'équation (60) nous donnent

$$\Phi_2 = -H_{q-1} \frac{\partial}{\partial y} \Phi_1 + (H_{q-2} + H'_{q-1}) \Phi_1 + (H_{q-1})^2.$$

Puisque  $C_{q-1} = -A_{q-1}$ ,  $Q_{q-1} = K_{q-1}$  (selon la définition), nous avons (voir page 49)

$$\frac{\partial}{\partial y} \mathfrak{E}_q(z) = \mathfrak{E}_{q-1}(z) - A_{q-1} \mathfrak{E}_q(z) + K_{q-1} z.$$

Il en suit

$$\Phi_2 = -H_{q-1} (\mathfrak{F}_{q-1} - [A_{q-1}]_1 \mathfrak{F}_q + [K_{q-1}]_1) + (H_{q-2} + H'_{q-1}) \mathfrak{F}_q + (H_{q-1})^2$$

Mais de l'autre côté [selon les équations (62), (63)], nous avons

$$\Phi_2 = e_{q-1, 2} \mathfrak{F}_{q-1} + e_{q, 2} \mathfrak{F}_q, \quad \text{où} \quad e_{q-1, 2} [Q_{q-2}]_1 = e_{q, 2} [Q_{q-1}]_1.$$

Ainsi nous aurons

$$-H_{q-1} [K_{q-1}]_1 + (H_{q-1})^2 = 0, \quad -\frac{H_{q-2} + H'_{q-1} + H_{q-1} [A_{q-1}]_1}{H_{q-1}} = \frac{[Q_{q-2}]_1}{[Q_{q-1}]_1}.$$

Comme  $H_{q-1} \neq 0$ , il en suit

$$H_{q-1} = [K_{q-1}]_1, \quad H_{q-2} + H'_{q-1} + [Q_{q-2}]_1 = -H_{q-1} [A_{q-1}]_1.$$

— En général, nous avons selon l'équation (60')

$$\Phi_{r+1} = \rho_{r+1} \frac{\partial}{\partial y} \Phi_r + \sigma_{r+1} \Phi_r + \tau_{r+1} \Phi_{r-1} \quad (q \geq r \geq 2),$$

où

$$\begin{aligned} \rho_{r+1} &= -\frac{H_{q-r, r}}{H_{q-r+1, r-1}}, & \sigma_{r+1} &= \frac{H_{q-r-1, r} + H'_{q-r, r}}{H_{q-r+1, r-1}} - \frac{H_{q-r, r} H_{q-r, r-1}}{(H_{q-r+1, r-1})^2}, \\ \tau_{r+1} &= \left( \frac{H_{q-r, r}}{H_{q-r+1, r-1}} \right)^2. \end{aligned}$$

Nous avons

$$\Phi_r = \sum_{i=q-r+1}^q e_{ir} \mathfrak{F}_i, \quad e_{q-r+1, r} = (-1)^{r-1} H_{q-r+1, r-1},$$

où les coefficients  $e_{ir}$  ( $i = q-r+1, q-r+2, \dots, q$ ) remplissent les  $r-1$  conditions qu'on obtient des équations (63) où  $j=r$ . En différentiant par rapport à  $y$ , nous aurons

$$\frac{\partial}{\partial y} \Phi_r = \sum_{i=q-r}^{q-1} (e'_{ir} + e_{i+1, r}) \mathfrak{F}_i + e'_{qr} \mathfrak{F}_q + \sum_{i=q-r+1}^q (-1)^{q-i} e_{ir} [C_{i-1}]_1 \mathfrak{F}_q,$$

la désignation  $e'_{ir} = \frac{\partial e_{ir}}{\partial y}$  étant employée, et les équations (63) où  $j=r$  nous donnent

$$\frac{\partial}{\partial y} \Phi_r = \sum_{i=q-r}^q (e'_{ir} + e_{i+1, r}) \mathfrak{F}_i.$$

De plus, nous avons

$$\Phi_{r-1} = \sum_{i=q-r+2}^q e_{i, r-1} \mathfrak{F}_i, \quad e_{q-r+2, r-1} = (-1)^r H_{q-r+2, r-2},$$

où les coefficients  $e_{i, r-1}$  ( $i = q-r+2, q-r+3, \dots, q$ ) remplissent les  $r-2$  conditions que l'on obtient des équations (63) où  $j=r-1$ . Ainsi nous pouvons écrire

$$\Phi_{r+1} = \sum_{i=q-r}^q [\rho_{r+1} (e'_{ir} + e_{i+1, r}) + \sigma_{r+1} e_{ir} + \tau_{r+1} e_{i, r-1}] \mathfrak{F}_i \quad (q \geq r \geq 2)$$

Mais de l'autre côté, nous avons

$$\Phi_{r+1} = \sum_{i=q-r}^q e_{i, r+1} \mathfrak{F}_i$$



où les coefficients  $e_{i, r+1}$  ( $i = q-r, q-r+1, \dots, q$ ) vérifient les  $r$  relations qu'on obtient des équations (63) où  $j = r+1$ . Nous avons ainsi trouvé

$$(64) \quad e_{i, r+1} = \rho_{r+1} (e'_{ir} + e_{i+1, r}) + \sigma_{r+1} e_{ir} + \tau_{r+1} e_{i, r-1} \quad (i = q-r, q-r+1, \dots, q).$$

Les équations (63) où  $j = r$  nous donnent [comparer page 53]

$$\sum_{i=0}^{q-h} (-1)^i (e_{i+2, r} + e'_{i+1, r}) [Q_{ih}]_1 = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, r-2),$$

où  $e_{ir} = 0$  ( $i \leq q-r$ ). En partant de la définition des coefficients  $e_{ir}$ ,  $e_{i, r-1}$  et en tenant compte des relations (64), nous trouvons ainsi

$$\sum_{i=0}^{q-h} (-1)^i e_{i+1, r+1} [Q_{ih}]_1 = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, r-2),$$

où  $e_{i, r+1} = 0$  ( $i \leq q-r-1$ ). Mais en partant directement de la définition des coefficients  $e_{i, r+1}$ , nous aurons

$$\sum_{i=0}^{q-h} (-1)^i e_{i+1, r+1} [Q_{ih}]_1 = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, r).$$

En égalant les deux expressions de  $\Phi_{r+1}(z_q)$ , nous obtiendrons par suite les deux équations

$$\sum_{i=0}^{q-h} (-1)^i e_{i+1, r+1} [Q_{ih}]_1 = 0 \quad (h = r-1, r),$$

où  $e_{i, r+1} = 0$  ( $i \leq q-r-1$ ), qui donnent deux relations entre les coefficients de l'équation (20) et ceux de l'équation (61). En tenant compte des équations (64), les deux relations obtenues peuvent s'écrire

$$(65) \quad \left. \begin{aligned} & \rho_{r+1} \sum_{i=0}^{q-r+1} (-1)^i (e_{i+2, r} + e'_{i+1, r}) [Q_{i, r-1}]_1 + \\ & + \tau_{r+1} \sum_{i=0}^{q-r+1} (-1)^i e_{i+1, r-1} [Q_{i, r-1}]_1 = 0, \end{aligned} \right\} (q \geq r \geq 2)$$

$$(66) \quad \rho_{r+1} \sum_{i=0}^{q-r} (-1)^i (e_{i+2, r} + e'_{i+1, r}) [Q_{i, r}]_1 + (-1)^{q-r} \sigma_{r+1} e_{q-r+1, r} [Q_{q-r, r}]_1 = 0,$$

où  $e_{ir} = 0$  ( $i \leq q-r$ ) et où  $e_{i, r-1} = 0$  ( $i \leq q-r+1$ ). En tenant compte des équations (63) où  $j = r$ , l'équation (65) peut s'écrire

$$\rho_{r+1} e_{q-r+1, r} \frac{[Q_{q-r, r}]_1 [Q_{q-r+2, r-2}]_1}{[Q_{q-r+1, r-1}]_1} = \tau_{r+1} e_{q-r+2, r-1} [Q_{q-r+1, r-1}]_1,$$

pourvu que

$$r > 2, [Q_{q-r+1, r-1}]_1 [Q_{q-r+2, r-2}]_1 \neq 0;$$

et dans le cas où

$$r = 2, [Q_{q-1}]_1 \neq 0,$$

l'équation (65) peut s'écrire

$$\rho_{r+1} e_{q-r+1, r} \frac{[Q_{q-2, 2}]}{[Q_{q-1}]_1} = \tau_{r+1} e_{q-r+2, r-1} [Q_{q-1}]_1.$$

En substituant

$$\frac{\rho_{r+1}}{\tau_{r+1}} = - \frac{H_{q-r+1, r-1}}{H_{q-r, r}}, \quad e_{q-r+1, r} = (-1)^{r-1} H_{q-r+1, r-1},$$

$$\begin{aligned} e_{q-r+2, r-1} &= (-1)^r H_{q-r+2, r-2} & (r > 2) \\ &= 1 & (r = 2) \end{aligned}$$

dans ces équations, nous obtiendrons

$$H_{q-1} \frac{[Q_{q-2, 2}]_1}{[Q_{q-1}]_1} = \frac{H_{q-2, 2}}{H_{q-1}} [Q_{q-1}]_1, \quad \text{si } \begin{cases} r = 2 \\ [Q_{q-1}]_1 \neq 0, \end{cases}$$

et

$$\frac{[Q_{q-r, r}]_1 [Q_{q-r+2, r-2}]_1}{([Q_{q-r+1, r-1}]_1)^2} = \frac{H_{q-r, r} H_{q-r+2, r-2}}{(H_{q-r+1, r-1})^2}, \quad \text{si } \begin{cases} r > 2 \\ [Q_{q-r+1, r-1}]_1 [Q_{q-r+2, r-2}]_1 \neq 0. \end{cases}$$

Nous avons déjà trouvé  $H_{q-1} = [Q_{q-1}]_1$  (page 80). Comme nous avons supposé  $H_{q-i, i} \neq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ), nous obtiendrons de l'équation (65) où  $r = 2$

$$[Q_{q-2, 2}]_1 = H_{q-2, 2},$$

et de l'équation (65) où  $r = 3$ , nous obtiendrons

$$[Q_{q-3, 3}]_1 = H_{q-3, 3}$$

etc. Les équations (65) ( $r = 2, 3, \dots, q$ ) nous donnent par suite

$$[Q_{q-i, i}]_1 = H_{q-i, i} \quad (i = 2, 3, \dots, q).$$

Nous avons ainsi obtenu les relations

$$(67) \quad [K_{q-i, i}]_1 = H_{q-i, i} \quad (i = 1, 2, \dots, q),$$

puisque (selon la définition) nous avons  $Q_{q-i, i} = K_{q-i, i}$ . — Les  $q$  relations obtenues sont analogues à la relation

$$k_i = h$$

entre les invariants de l'équation (1) [page 69]. — Nous avons

$$e_{q-r+1, r} = (-1)^{r-1} H_{q-r+1, r-1},$$

et les équations (63) où  $j = r$  nous donnent

$$e_{q-r+2, r} [Q_{q-r+1, r-1}]_1 - e_{q-r+1, r} [Q_{q-r, r-1}]_1 = 0;$$

en substituant ces valeurs de  $e_{q-r+1, r}$  et de  $e_{q-r+2, r}$  et les valeurs de  $\rho_{r+1}$ ,  $\tau_{r+1}$

(voir page 80) dans l'équation (66) et en tenant compte des relations  $[Q_{q-i, i}]_1 = H_{q-i, i}$  ( $i = r-1, r$ ), nous pouvons écrire l'équation (66) sous la forme

$$\frac{H_{q-r, r-1} + H'_{q-r+1, r-1} + [Q_{q-r, r-1}]_1}{H_{q-r+1, r-1}} = \frac{H_{q-r-1, r} + H'_{q-r, r} + [Q_{q-r-1, r}]_1}{H_{q-r, r}}.$$

Nous avons déjà trouvé

$$H_{q-2} + H'_{q-1} + [Q_{q-2}]_1 = -H_{q-1} [A_{q-1}]_1$$

(page 80). Ainsi les équations (66) ( $r = 2, 3, \dots, q$ ) nous donnent les relations

$$\frac{H_{q-r-1, r} + H'_{q-r, r} + [Q_{q-r-1, r}]_1}{H_{q-r, r}} = -[A_{q-1}]_1 \quad (r = 2, 3, \dots, q).$$

Pour  $r = q$ , cette relation devient  $H'_{0q} = -[A_{q-1}]_1 H_{0q}$ . Nous avons ainsi obtenu les  $q-1$  relations

$$\frac{H_{q-r-1, r} + H'_{q-r, r} + [Q_{q-r-1, r}]_1}{H_{q-r, r}} = \frac{H'_{0q}}{H_{0q}} \quad (r = 1, 2, \dots, q-1).$$

D'après la définition de  $Q_{ij}$ , nous avons

$$Q_{q-r-1, r} = K_{q-r-1, r} - \frac{q-r}{q} A_{q-1} K_{q-r, r}.$$

Par suite, les relations obtenues peuvent s'écrire :

$$(67') \quad \frac{H_{q-r-1, r} + H'_{q-r, r} + [K_{q-r-1, r}]_1}{H_{q-r, r}} = \frac{r}{q} \frac{H'_{0q}}{H_{0q}} \quad (r = 1, 2, \dots, q-1).$$

— Nous avons

$$A_{q-1} = 0, [B_q]_1 = B_q, H_{0q} [A_{q-1}]_1 = -H'_{0q},$$

et d'après la définition de  $H_{q-1}$  et de  $K_{q-1}$ , nous avons

$$\frac{\partial A_{q-1}}{\partial x} - q \frac{\partial B_q}{\partial y} = H_{q-1} - K_{q-1}.$$

Il en suit

$$(67'') \quad [H_{q-1}]_1 = 2H_{q-1} - K_{q-1} - \frac{\partial^2 \log H_{0q}}{\partial x \partial y}.$$

Cette relation est analogue à la relation

$$h_1 = 2h - k - \frac{\partial^2 \log h}{\partial x \partial y},$$

qui a lieu entre les invariants de l'équation (1) [page 69].

En comparant les deux définitions différentes des expressions  $\Phi_j(z_q)$  ( $j = 1, 2, \dots, q+1$ ), nous avons ainsi obtenu les  $2q$  relations (67), (67'), (67''), lesquelles lient les invariants de l'équation (E) avec ceux de l'équation (E<sub>1</sub>).

A l'aide de ces  $2q$  relations, les  $2q$  invariants

$$[H_{q-1}]_1, [K_{q-i, i}]_1 \quad (i = 1, 2, \dots, q), \quad [K_{q-i-1, i}]_1 \quad (i = 1, 2, \dots, q-1)$$

s'expriment en fonction de

$$(68) \quad K_{q-1}, \quad H_{q-i, i} \quad (i = 1, 2, \dots, q), \quad H_{q-i-1, i} \quad (i = 1, 2, \dots, q-1)$$



d'une manière très simple, et inversement. Comme nous n'avons trouvé, en comparant les deux définitions différentes des expressions  $\Phi_j(z_q)$  ( $j = 1, 2, \dots, q+1$ ), que ces  $2q$  relations entre les invariants des équations  $(E)$  et  $(E_1)$ , il faut que tous les invariants de l'équation  $(E_1)$  puissent s'exprimer au moyen des invariants

$$[H_{q-1}]_1, \quad [K_{q-i,i}]_1 \quad (i = 1, 2, \dots, q), \quad [K_{q-i-1,i}]_1 \quad (i = 1, 2, \dots, q-1).$$

En d'autres termes, tous les invariants de l'équation (20) s'expriment au moyen de

$$(68') \quad H_{q-1}, \quad K_{q-i,i} \quad (i = 1, 2, \dots, q), \quad K_{q-i-1,i} \quad (i = 1, 2, \dots, q-1),$$

pourvu que  $K_{q-i,i} \neq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ). C'est ce qui résulte aussi des formules

$$(69) \quad K_{i2} = \begin{vmatrix} K_{q-1} & K_{q-2} + K'_{q-1} & K_{i-1} + K'_i \\ 0 & K_{q-1} & K_i \\ 1 & 0 & J_i \end{vmatrix} \quad (i = 0, 1, \dots, q-2),$$

$$(69') \quad K_{i,j+1} (K_{q-j+1,j-1})^2 = \begin{vmatrix} K_{q-j,j} & K_{q-j-1,j} + K'_{q-j,j} & K_{i-1,j} + K'_{ij} \\ 0 & K_{q-j,j} & K_{ij} \\ K_{q-j+1,j-1} & K_{q-j,j-1} & K_{i,j-1} \end{vmatrix} \\ \left( \begin{matrix} j \geq 2 \\ i = 0, 1, \dots, q-j-1 \end{matrix} \right)$$

[voir l'équation (59)]. A l'aide des équations (69'), on peut calculer les invariants  $K_{i,j-1}$  ( $i = 0, 1, \dots, q-j-1$ ), si l'on connaît les invariants

$$K_{ir} \quad \left( \begin{matrix} i = 0, 1, \dots, q-r \\ r = j, j+1, \dots, q \end{matrix} \right), \quad K_{q-j+1,j-1}, \quad K_{q-j,j-1}.$$

Et à l'aide des équations (69), nous pouvons calculer les invariants  $J_i$  ( $i = 0, 1, \dots, q-2$ ),

si nous connaissons les invariants  $K_{ij}$   $\left( \begin{matrix} i = 0, 1, \dots, q-j \\ j = 1, 2, \dots, q \end{matrix} \right)$ . Ainsi nous pouvons calculer les invariants

$$K_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-1), \quad J_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-2)$$

en partant des invariants

$$K_{q-i,i} \quad (i = 1, 2, \dots, q), \quad K_{q-i-1,i} \quad (i = 1, 2, \dots, q-1).$$

A l'aide de l'égalité  $J_{q-1} = K_{q-1} - H_{q-1}$ , nous pouvons calculer  $J_{q-1}$ . En partant des invariants

$$J_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-1), \quad K_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-1),$$

nous pouvons ensuite calculer les invariants

$$I_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-1), \quad H_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-1)$$

(voir page 72). Nous avons ainsi prouvé que tous les invariants de l'équation (20) s'expriment au moyen des invariants (68'), pourvu que  $K_{q-i,i} \neq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ).

Nous avons ainsi obtenu le résultat suivant: par les équations (67), (67'), (67'') les  $2q$  invariants

$$[H_{q-1}]_1, \quad [K_{q-i,i}]_1 \quad (i = 1, 2, \dots, q), \quad [K_{q-i-1,i}]_1 \quad (i = 1, 2, \dots, q-1)$$

s'expriment d'une manière très simple au moyen des invariants (68); en partant des invariants

$$[H_{q-1}]_1, \quad [K_{q-i,i}]_1 \quad (i = 1, 2, \dots, q), \quad [K_{q-i-1,i}]_1 \quad (i = 1, 2, \dots, q-1),$$

on peut calculer les invariants

$$[K_{q-1}]_1, \quad [H_{q-i,i}]_1 \quad (i = 1, 2, \dots, q), \quad [H_{q-i-1,i}]_1 \quad (i = 1, 2, \dots, q-1);$$

si  $[H_{q-i,i}]_1 \neq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ), on peut en partant des invariants obtenus calculer les invariants de l'équation  $(E_2)$ ; de cette manière on peut continuer. Pour l'application pratique de la méthode de Laplace, il serait évidemment d'importance de pouvoir exprimer sous une forme simple les invariants (68) au moyen des invariants (68'), c'est-à-dire déduire les invariants (68) des invariants (68') sans calculer tous les invariants  $K_{ij}$ ,  $J_i$ ,  $H_i$ ,  $I_i$ . Mais je n'ai pas réussi à obtenir les relations qui lient les invariants (68) et les invariants (68') sous une forme simple.

Jusqu'ici nous avons supposé  $H_{q-r, r} \neq 0$  ( $r = 1, 2, \dots, q$ ). Il reste à rechercher les relations entre les invariants des équations  $(E)$  et  $(E_1)$ , si cette condition n'est pas remplie.

Supposons

$$H_{q-r, r} \neq 0 \quad (r = 1, 2, \dots, p), \quad H_{q-r, r} = 0 \quad (r = p+1, p+2, \dots, q).$$

L'équation  $(E)$  admet  $q - p$   $X$ -intégrales distinctes de rang 1, et l'équation  $(E_1)$  est d'ordre  $p+1$ . Nous écrivons l'équation  $(E_1)$ :

$$\mathcal{F}_0(z_q) = \sum_{i=0}^p \left( [A_i]_1 \frac{\partial^{i+1} z_q}{\partial x \partial y^i} + [B_i]_1 \frac{\partial^i z_q}{\partial y^i} \right) = 0, \quad [A_p]_1 = 1.$$

En comparant les deux définitions des expressions  $\Phi_r(z_q)$  ( $r = 1, 2, \dots, p+1$ ), nous aurons de la même manière qu'auparavant les  $2p+1$  relations

$$[B_p]_1 = B_q,$$

$$(70) \quad [K_{p-r, r}]_1 = H_{q-r, r} \quad (r = 1, 2, \dots, p),$$

$$H_{q-r-1, r} + H'_{q-r, r} + [Q_{p-r-1, r}]_1 = -[A_{p-1}]_1 H_{q-r, r} \quad (r = 1, 2, \dots, p).$$

Comme

$$[Q_{p-r-1, r}]_1 = [K_{p-r-1, r}]_1 - \frac{p-r}{p} [A_{p-1}]_1 [K_{p-r, r}]_1,$$

nous aurons

$$(70') \quad \frac{H_{q-r-1, r} + H'_{q-r, r} + [K_{p-r-1, r}]_1}{H_{q-r, r}} = \frac{r}{p} \frac{H_{q-p-1, p} + H'_{q-p, p}}{H_{q-p, p}},$$

$$(r = 1, 2, \dots, p-1)$$

D'après la définition des invariants, nous avons

$$\frac{\partial A_{q-1}}{\partial x} - q \frac{\partial B_q}{\partial y} = H_{q-1} - K_{q-1}, \quad \frac{\partial [A_{p-1}]_1}{\partial x} - p \frac{\partial [B_p]_1}{\partial y} = [H_{p-1}]_1 - [K_{p-1}]_1.$$

Comme

$$A_{q-1} = 0, \quad [B_p]_1 = B_q, \quad [A_{p-1}]_1 H_{q-p, p} = - (H_{q-p-1, p} + H'_{q-p, p}),$$

nous aurons

$$(70'') \quad [H_{p-1}]_1 - [K_{p-1}]_1 = \frac{p}{q} (H_{q-1} - K_{q-1}) - \frac{\partial}{\partial x} \frac{H_{q-p-1, p} + H'_{q-p, p}}{H_{q-p, p}}.$$

Nous avons ainsi obtenu les  $2p$  relations (70), (70'), (70'') entre les invariants des équations  $(E)$  et  $(E_1)$ . — Ces  $2p$  relations peuvent aussi être obtenues en mettant l'équation  $(E)$  sous la forme (37) et en considérant la transformation  $(T_1)$  comme composée de deux transformations complètement déterminées (page 39). — Par les relations (70), (70'), (70'') les invariants

$$[H_{p-1}]_1, \quad [K_{p-r, r}]_1 \quad (r = 1, 2, \dots, p), \quad [K_{p-r-1, r}]_1 \quad (r = 1, 2, \dots, p-1)$$

se déduisent des invariants de l'équation  $(E)$ , et tous les invariants de l'équation  $(E_1)$  sont des fonctions des invariants obtenus.

Supposons enfin

$$H_{q-j, j} \neq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s-1, \quad s+r, \dots, q), \quad H_{q-j, j} = 0 \quad (j = s, s+1, \dots, s+r-1) \\ (s+r-1 < q).$$

L'équation  $(E_1)$  est d'ordre  $n$ . Soit  $s > 1$ . En comparant les deux définitions des expressions  $\Phi_j(z_q)$  ( $j = 1, 2, \dots, s$ ), nous aurons de la même manière qu'auparavant les  $2s-1$  relations

$$[B_q]_1 = B_q, \quad [K_{q-j, j}]_1 = H_{q-j, j} \quad (j = 1, 2, \dots, s-1),$$

$$H_{q-j-1, j} + H'_{q-j, j} + [Q_{q-j-1, j}]_1 = - [A_{q-1}]_1 H_{q-j, j} \quad (j = 1, 2, \dots, s-1).$$

Comme

$$H_{q-j, j} = 0 \quad (j = s, s+1, \dots, s+r-1), \quad H_{q-s+1, s-1} \neq 0,$$

et ainsi

$$H_{q-j, s} = 0 \quad (j = s, s+1, \dots, s+r-1),$$

nous pouvons déduire

$$H_{i, j+1} = 0 \quad \left( \begin{matrix} i = 0, 1, \dots, q-j-1 \\ j = s, s+1, \dots, s+r-2 \end{matrix} \right),$$

$$H_{i, r+s} = H_{is} \left( \frac{H_{q-r-s, s}}{H_{q-s+1, s-1}} \right)^r \quad (i = 0, 1, \dots, q-r-s),$$

et nous avons

$$\Phi_{j+1} = 0 \quad (j = s, s+1, \dots, s+r-2), \quad \Phi_{r+s} = \left( \frac{H_{q-r-s, s}}{H_{q-s+1, s-1}} \right)^r \Phi_s.$$

En tenant compte des relations

$$H_{q-j, s} = 0 \quad (j = s, s+1, \dots, s+r-1),$$

nous avons de l'autre côté

$$\Phi_s = \sum_{i=q-s+1}^q e_{is} \mathcal{F}_i, \quad e_{q-s+1, s} = (-1)^{s-1} H_{q-s+1, s-1},$$



les coefficients  $e_{i,s}$  ( $i = q-s+1, q-s+2, \dots, q+r+s-1$ ) vérifiant les conditions:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{q+h-1} (-1)^i \left[ e_{i+1,s} \sum_{k=0}^h \frac{h!}{k!(h-k)!} [Q_{i+k-h}]_1^{(k)} \right] = 0, \\ \sum_{i=0}^{q+h} (-1)^i \left[ e_{i+1,s} \sum_{k=0}^h \frac{h!}{k!(h-k)!} [C_{i+k-h}]_1^{(k)} \right] = 0, \end{cases} \quad (h = 0, 1, \dots, r+s-2)$$

où  $e_{is} = 0$  ( $i \leq q-s$ ). Puisque  $e_{q-s+1,s} \neq 0$ , de ces relations nous pouvons déduire

$$[K_{is}]_1 = 0 \quad (i = q-s, q-s-1, \dots, q-r-s+1).$$

Puisque  $[K_{q-s+1,s-1}]_1 \neq 0$ , il en suit

$$[K_{i,j+1}]_1 = 0 \quad \left( \begin{matrix} i = 0, 1, \dots, q-j-1 \\ j = s, s+1, \dots, s+r-2 \end{matrix} \right),$$

$$[K_{i,r+s}]_1 = [K_{is}]_1 \left( \frac{[K_{q-s-r,s}]_1}{[K_{q-s+1,s-1}]_1} \right)^r \quad (i = 0, 1, \dots, q-r-s).$$

L'expression  $\Phi_{r+s+1}(z_q)$  peut se définir de la manière suivante

$$\Phi_{j+1} = \frac{1}{(H_{q-s+1,s-1})^{r+2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial^{r+1}}{\partial y^{r+1}} \Phi_s & H_{q-j,s} & H_{q-j-1,s} + (r+1) H'_{q-j,s} & \dots & \sum_{k=0}^{r+1} \frac{(r+1)!}{k!(r+1-k)!} H_{q-j-k,s}^{(r+1-k)} \\ \frac{\partial^r}{\partial y^r} \Phi_s & 0 & H_{q-j,s} & \dots & \sum_{k=0}^r \frac{r!}{k!(r-k)!} H_{q-j-k,s}^{(r-k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Phi_s & 0 & 0 & \dots & H_{q-j,s} \\ \Phi_{s-1} & H_{q-s+1,s-1} & H_{q-s,s-1} & \dots & H_{q-j,s-1} \end{vmatrix},$$

où  $j = r+s$ , ce qui suit des équations (59') et des équations analogues. Pour abréger, écrivons

$$\Phi_{j+1} = \sum_{i=0}^{r+1} \sigma_{i,j+1} \frac{\partial^i}{\partial y^i} \Phi_s + \tau_{j+1} \Phi_{s-1} \quad (j = r+s);$$

nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{j+1}}{\sigma_{r+1,j+1}} &= - \frac{H_{q-j,s}}{H_{q-s+1,s-1}}, \\ \frac{\sigma_{r,j+1}}{\sigma_{r+1,j+1}} &= \frac{H_{q-s,s-1}}{H_{q-s+1,s-1}} - \frac{H_{q-j-1,s} + (r+1) H'_{q-j,s}}{H_{q-j,s}}. \end{aligned} \quad (j = r+s)$$

De plus nous avons

$$\Phi_{s-1} = \sum_{i=q-s+2}^q e_{i,s-1} \mathfrak{F}_i, \quad e_{q-s+2,s-1} = (-1)^s H_{q-s+2,s-2},$$

où les  $s-1$  coefficients  $e_{i,s-1}$  ( $i = q-s+2, q-s+3, \dots, q$ ) remplissent les  $s-2$  conditions que l'on obtient des équations (63) où  $j = s-1$ . De la définition de l'expression  $\Phi_s(z_q)$  nous pouvons déduire

$$\frac{\partial^h}{\partial y^h} \Phi_s = \sum_{i=1}^q \sum_{k=0}^h \frac{h!}{k!(h-k)!} e_{i+k,s}^{(h-k)} \mathfrak{F}_i \quad (h = 0, 1, \dots, r+s-1).$$

Par suite, nous pouvons écrire

$$\Phi_{j+1} = \sum_{i=q-r-s}^q \left[ \tau_{j+1} e_{i, s-1} + \sum_{h=0}^{r+1} \left( \sigma_{h, j+1} \sum_{k=0}^h \frac{h!}{k! (h-k)!} e_{i+k, s}^{(h-k)} \right) \right] \mathfrak{F}_i \quad (j = r + s).$$

De l'autre côté, nous avons

$$\Phi_j = \sum_{i=q-r-s}^q e_{ij} \mathfrak{F}_i \quad (j = r + s + 1),$$

où les  $r + s + 1$  coefficients  $e_{i, r+s+1}$  ( $i = q - r - s, q - r - s + 1, \dots, q$ ) remplissent les  $r + s$  conditions que l'on obtient en éliminant les  $r + s$  coefficients  $e_{i, r+s+1}$  ( $i = q + 1, q + 2, \dots, q + r + s$ ) entre les  $2(r + s)$  équations (63) où  $j = r + s + 1$ . Ainsi nous avons trouvé

$$(71) \quad e_{ij} = \tau_j e_{i, s-1} + \sum_{h=0}^{r+1} \sigma_{hj} \sum_{k=0}^h \frac{h!}{k! (h-k)!} e_{i+k, s}^{(h-k)} \quad \begin{pmatrix} i = q - j + 1, q - j + 2, \dots, q \\ j = s + r + 1 \end{pmatrix}.$$

En partant de la définition des coefficients  $e_{is}$ ,  $e_{i, s-1}$  et en tenant compte des relations (71), nous trouvons

$$\sum_{i=q-j}^{q-h} (-1)^i e_{i+1, j} [Q_{ih}]_1 = 0 \quad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \dots, s-2 \\ j = r + s + 1 \end{pmatrix}.$$

Mais en partant directement de la définition des coefficients  $e_{i, r+s+1}$ , nous aurons encore [comparer les équations (56'')] les conditions

$$(72) \quad \sum_{i=q-j}^{q-h} (-1)^i e_{i+1, j} [Q_{ih}]_1 = 0 \quad \begin{pmatrix} j = r + s + 1 \\ h = s - 1, s \end{pmatrix},$$

$$(72') \quad \sum_{i=q-j}^{q-j+h+1} (-1)^i \left[ e_{i+1, j} \sum_{k=0}^h \frac{h!}{k! (h-k)!} [Q_{i+k-h, s}]_1^{(k)} \right] = 0 \quad \begin{pmatrix} j = r + s + 1 \\ h = 1, 2, \dots, r \end{pmatrix}.$$

De l'équation (72) où  $h = s - 1$ , nous pouvons déduire

$$\frac{H_{q-j+1, s} H_{q-s+2, s-2}}{(H_{q-s+1, s-1})^2} = (-1)^r \frac{[Q_{q-j+1, s}]_1 [Q_{q-s+2, s-2}]_1}{([Q_{q-s+1, s-1}]_1)^2} \quad (j = r + s + 1)$$

et par suite  $H_{q-r-s, s} = (-1)^r [Q_{q-r-s, s}]_1$ ; il en résulte

$$H_{q-j, j} = [K_{q-j, j}]_1 \quad (j = r + s).$$

De l'équation (72) où  $h = s$  nous pouvons déduire

$$\frac{[Q_{q-s, s-1}]_1 + H_{q-s, s-1} + H'_{q-s+1, s-1}}{H_{q-s+1, s-1}} = \frac{[Q_{q-j-1, j}]_1 + H_{q-j-1, j} + H'_{q-j, j}}{H_{q-j, j}} \quad (j = r + s)$$

Il en suit

$$\frac{[Q_{q-j-1, j}]_1 + H_{q-j-1, j} + H'_{q-j, j}}{H_{q-j, j}} = -[A_{q-1}]_1 \quad (j = r + s).$$

Les équations (72) nous donnent ainsi les deux relations

$$\begin{aligned} [K_{q-s-r, s}]_1 &= (-1)^r H_{q-s-r, s}, \\ \frac{H_{q-j-1, j} + H'_{q-j, j} + [Q_{q-j-1, j}]_1}{H_{q-j, j}} &= -[A_{q-1}]_1 \quad (j = r + s). \end{aligned}$$

En comparant les deux définitions de l'expression  $\Phi_{r+s+1}(z_q)$ , nous avons ainsi obtenu ces deux relations et les  $r$  équations (72'). A l'aide des équations (72') et en tenant compte des relations obtenues entre les invariants des équations (E) et (E<sub>1</sub>), nous pouvons obtenir  $[Q_{q-s+1-i, s-1}]_1$  ( $i = 2, 3, \dots, r+1$ ) en fonction de  $[A_{q-1}]_1$ ,  $[Q_{q-j-i, j}]_1$  ( $j = r+s$ ,  $i = 2, 3, \dots, r+1$ ) et des invariants de l'équation (E). Mais je n'ai pas réussi à obtenir ces relations sous une forme simple. — Nous sommes partis de la supposition  $s > 1$ . Dans le cas où  $s = 1$ , il faut un peu modifier la preuve. — En comparant enfin les deux définitions différentes des expressions  $\Phi_{j+1}(z_q)$  ( $j = r+s+1, r+s+2, \dots, q$ ), nous obtiendrons comme auparavant les  $2(q-r-s)$  relations

$$\begin{aligned} [K_{q-j, j}]_1 &= H_{q-j, j} \quad (j = r+s+1, r+s+2, \dots, q), \\ \frac{H_{q-j-1, j} + H'_{q-j, j} + [Q_{q-j-1, j}]_1}{H_{q-j, j}} &= -[A_{q-1}]_1 \quad (j = r+s+1, r+s+2, \dots, q). \end{aligned}$$

Comme  $A_{q-1} = 0$ ,  $[B_q]_1 = B_q$ , les dernières relations peuvent être remplacées par

$$\begin{aligned} \frac{H_{q-j-1, j} + H'_{q-j, j} + [K_{q-j-1, j}]_1}{H_{q-j, j}} &= \frac{j}{q} \frac{H'_{0q}}{H_{0q}} \quad (j = r+s+1, r+s+2, \dots, q-1), \\ [H_{q-1}]_1 &= 2H_{q-1} - K_{q-1} - \frac{\partial^2 \log H_{0q}}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

Nous avons ainsi obtenu les  $2q - r$  relations distinctes

$$(73) \quad \left\{ \begin{aligned} [K_{q-j, j}]_1 &= H_{q-j, j} \quad (j = 1, 2, \dots, s, s+r+1, \dots, q), \\ [K_{q-s-i, s}]_1 &= (-1)^i H_{q-s-i, s} \quad (i = 1, 2, \dots, r), \\ [K_{q-j-1, j}]_1 + H_{q-j-1, j} + H'_{q-j, j} &= \frac{j}{q} H_{q-j, j} \frac{H'_{0q}}{H_{0q}} \\ &\quad (j = 1, 2, \dots, s-1, s+r, \dots, q-1), \\ [H_{q-1}]_1 &= 2H_{q-1} - K_{q-1} - \frac{\partial^2 \log H_{0q}}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right.$$

A l'aide de ces relations, les invariants

$$\begin{aligned} [H_{q-1}]_1, [K_{q-j, j}]_1 \quad (j = 1, 2, \dots, s, s+r+1, \dots, q), [K_{q-s-i, s}]_1 \quad (i = 1, 2, \dots, r), \\ [K_{q-j-1, j}]_1 \quad (j = 1, 2, \dots, s-1, s+r, \dots, q-1) \end{aligned}$$

se déduisent des invariants

$$\begin{aligned} K_{q-1}, H_{q-j, j} \quad (j = 1, 2, \dots, s, s+r+1, \dots, q), [H_{q-s-i, s}], \quad (i = 1, 2, \dots, r), \\ H_{q-j-1, j} \quad (j = 1, 2, \dots, s-1, s+r, \dots, q-1), \end{aligned}$$

et inversement. A l'aide des équations (72'), nous pouvons maintenant déterminer les invariants

$$[K_{q-s+1-i, s-1}]_1 \quad (i = 2, 3, \dots, r+1)$$



en fonction des invariants de l'équation  $(E)$ . Mais, comme je l'ai déjà dit, je n'ai pas réussi à obtenir ces relations sous une forme simple. — Il est aisé de vérifier que tous les invariants de l'équation  $(E_1)$  s'expriment au moyen des  $2q$  invariants  $[H_{q-1}]_1$ ,  $[K_{q-j}]_1$  ( $j = 1, 2, \dots, s, s+r+1, \dots, q$ ),  $[K_{q-s-i}]_1$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ),  
 $[K_{q-j-1}]_1$  ( $j = 1, 2, \dots, s-1, s+r, \dots, q-1$ ),  
 $[K_{q-s+1-i}]_1$  ( $i = 2, 3, \dots, r+1$ ).

Ainsi les relations qui lient les invariants de l'équation  $(E)$  avec ceux de l'équation  $(E_1)$  sont données par les  $2q-r$  relations (73) et par les  $r$  relations qui peuvent se déduire des équations (72').

*Proposition 13.* Supposons que l'équation  $(E_1)$  soit d'ordre  $q+1$ . Dans le cas où

$$H_{q-i,i} \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, q),$$

les relations qu'il y a entre les invariants des équations  $(E)$  et  $(E_1)$  sont données par les  $2q$  équations

$$\begin{cases} [K_{q-i}]_1 = H_{q-i,i} & (i = 1, 2, \dots, q), \\ H_{q-i-1,i} + \frac{\partial H_{q-i,i}}{\partial y} + [K_{q-i-1}]_1 = \frac{i}{q} H_{q-i,i} \frac{\partial \log H_{0q}}{\partial y} & (i = 1, 2, \dots, q-1), \\ [H_{q-1}]_1 = 2H_{q-1} - K_{q-1} - \frac{\partial^2 \log H_{0q}}{\partial x \partial y}; \end{cases}$$

à l'aide de ces  $2q$  relations, nous obtenons les invariants

$$[H_{q-1}]_1, \quad [K_{q-i}]_1 \quad (i = 1, 2, \dots, q), \quad [K_{q-i-1}]_1 \quad (i = 1, 2, \dots, q-1)$$

en fonction des invariants

$$K_{q-1}, \quad H_{q-i,i} \quad (i = 1, 2, \dots, q), \quad H_{q-i-1,i} \quad (i = 1, 2, \dots, q-1),$$

et de même inversement; tout invariant de l'équation  $(E_1)$  est une fonction des  $2q$  invariants obtenus. Dans le cas où

$$H_{q-i,i} \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s-1, s+r, \dots, q), \quad H_{q-i,i} = 0 \quad (i = s, s+1, \dots, s+r-1),$$

les  $2q$  relations mentionnées se réduisent aux  $2q-r$  relations distinctes; les relations qu'il y a entre les invariants des équations  $(E)$  et  $(E_1)$  sont données par les  $2q-r$  relations

$$\begin{cases} [K_{q-i}]_1 = H_{q-i,i} & (i = 1, 2, \dots, s, s+r+1, \dots, q), \\ [K_{q-s-i}]_1 = (-1)^i H_{q-s-i,s} & (i = 1, 2, \dots, r), \\ H_{q-i-1,i} + \frac{\partial H_{q-i,i}}{\partial y} + [K_{q-i-1}]_1 = \frac{i}{q} H_{q-i,i} \frac{\partial \log H_{0q}}{\partial y} & (i = 1, 2, \dots, s-1, s+r, \dots, q-1), \\ [H_{q-1}]_1 = 2H_{q-1} - K_{q-1} - \frac{\partial^2 \log H_{0q}}{\partial x \partial y}, \end{cases}$$

et par les  $r$  relations qui peuvent être déduites des équations (72'); à l'aide de ces  $2q$  relations distinctes, on obtient les invariants

$$\begin{aligned} [H_{q-1}]_1, \quad [K_{q-i}]_1 \quad (i = 1, 2, \dots, s, s+r+1, \dots, q), \quad [K_{q-s-i}]_1 \quad (i = 1, 2, \dots, r), \\ [K_{q-i-1}]_1 \quad (i = 1, 2, \dots, s-1, s+r, \dots, q-1), \\ [K_{q-s+1-i}]_1 \quad (i = 2, 3, \dots, r+1) \end{aligned}$$

en fonction des invariants

$$\begin{aligned} K_{q-1}, \quad H_{q-i, i} \quad (i = 1, 2, \dots, s, s+r+1, \dots, q), \quad H_{q-s-i, s} \quad (i = 1, 2, \dots, r), \\ H_{q-i-1, i} \quad (i = 1, 2, \dots, s-1, s+r, \dots, q-1), \\ H_{q-s+1-i, s-1} \quad (i = 2, 3, \dots, r+1), \end{aligned}$$

et de même inversement; tout invariant de l'équation  $(E_1)$  est une fonction des invariants obtenus. — Supposons que l'équation  $(E_1)$  soit d'ordre  $p+1$  ( $p < q$ ). Supposons

$$H_{q-i, i} \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p).$$

Les relations qu'il y a entre les invariants des équations  $(E)$  et  $(E_1)$  sont données par les  $2p$  équations

$$\begin{cases} [K_{p-i, i}]_1 = H_{q-i, i} & (i = 1, 2, \dots, p), \\ H_{q-i-1, i} + \frac{\partial H_{q-i, i}}{\partial y} + [K_{p-i-1, i}]_1 = \frac{i}{p} H_{q-i, i} \left( \frac{H_{q-p-1, p}}{H_{q-p, p}} + \frac{\partial \log H_{q-p, p}}{\partial y} \right) & (i = 1, 2, \dots, p-1), \\ [H_{p-1}]_1 - [K_{p-1}]_1 = \frac{p}{q} (H_{q-1} - K_{q-1}) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{H_{q-p-1, p}}{H_{q-p, p}} + \frac{\partial \log H_{q-p, p}}{\partial y} \right); \end{cases}$$

à l'aide de ces  $2p$  relations, nous obtenons les invariants

$$[H_{p-1}]_1, \quad [K_{p-i, i}]_1 \quad (i = 1, 2, \dots, p), \quad [K_{p-i-1, i}]_1 \quad (i = 1, 2, \dots, p-1)$$

en fonction des invariants de l'équation  $(E)$ . Tout invariant de l'équation  $(E_1)$  est une fonction des invariants obtenus.

Entre les invariants des équations  $(E_i)$  et  $(E_{i+1})$ , où  $i \geq 0$ , il existe les relations analogues. Si les équations  $(E_i)$  et  $(E_{i+1})$  sont de même ordre, nous pouvons, à l'aide de ces relations et en partant des invariants de l'équation  $(E_i)$ , calculer les invariants de l'équation  $(E_{i+1})$ ; de même, en partant des invariants de l'équation  $(E_{i+1})$ , nous pouvons calculer les invariants de l'équation  $(E_i)$ . Il est clair que le calcul des invariants des équations  $(E_1)$ ,  $(E_2)$ ,  $(E_3)$ , ... et  $(E_{-1})$ ,  $(E_{-2})$ ,  $(E_{-3})$ , ... sera de règle très compliquée. Pour le cas où  $H_{q-j, j} \neq 0$  ( $j = 1, 2, \dots, q$ ), les relations qu'il y a entre les invariants des équations  $(E)$  et  $(E_1)$  sont obtenues, il est vrai, à l'aide des équations très simples, par lesquelles les  $2q$  invariants

$$[H_{q-1}]_1, \quad [K_{q-j, j}]_1 \quad (j = 1, 2, \dots, q), \quad [K_{q-j-1, j}]_1 \quad (j = 1, 2, \dots, q-1),$$

s'expriment au moyen des invariants

$$K_{q-1}, \quad H_{q-j, j} \quad (j = 1, 2, \dots, q), \quad H_{q-j-1, j} \quad (j = 1, 2, \dots, q-1),$$

mais je n'ai pas réussi à exprimer les invariants

$$[K_{q-1}]_1, \quad [H_{q-j, j}]_1 \quad (j = 1, 2, \dots, q), \quad [H_{q-j-1, j}]_1 \quad (j = 1, 2, \dots, q-1)$$

en fonction des invariants

$$[H_{q-1}]_1, \quad [K_{q-j, j}]_1 \quad (j = 1, 2, \dots, q), \quad [K_{q-j-1, j}]_1 \quad (j = 1, 2, \dots, q-1)$$

par des relations simples. Comme je l'ai dit déjà (page 74), ce sont les  $2q$  invariants

$$H_{q-j, j}, \quad K_{q-j, j} \quad (j = 1, 2, \dots, q)$$

de l'équation  $(E)$  qui correspondent le plus près aux invariants  $h$  et  $k$  de l'équation (1); ce sont seulement ces  $2q$  invariants qui sont de quelque importance pour reconnaître si l'équation admet une intégrale de la forme d'Euler de rang 1. Parmi ces  $2q$  invariants de l'équation  $(E_1)$ , les  $q$  derniers invariants s'obtiennent directement des invariants de l'équation  $(E)$ , puisque

$$[K_{q-j,j}]_1 = H_{q-j,j} \quad (j = 1, 2, \dots, q),$$

mais les invariants  $[H_{q-j,j}]_1$  ( $j = 1, 2, \dots, q$ ) ne s'obtiennent nullement aussi simplement des invariants de l'équation  $(E)$ . La désignation d'invariants est cependant d'importance pour l'application pratique de la méthode de Laplace; en introduisant les invariants, l'on élimine le facteur arbitraire, et les fonctions essentielles des coefficients de l'équation restent. Puis l'on peut, dans des cas particuliers, obtenir les expressions générales des invariants de l'équation  $(E_i)$  ( $i \geq 0$ ), ce qui nous permet de reconnaître si l'intégration de l'équation  $(E)$  peut être réduite à l'intégration d'équations différentielles linéaires, ou à quel point l'intégration de l'équation peut être simplifiée par la méthode de Laplace. Parfois la réduction à forme normale peut remplacer l'emploi de la désignation d'invariants.

Avant de quitter le chapitre des invariants, je vais traiter un exemple simple. J'ai choisi parmi les équations (20) celles dont tous les invariants sont des constantes, et je vais étudier à quel point l'intégration de ces équations peut être simplifiée par la méthode de Laplace.

Soit donnée une équation (20) dont tous les invariants sont des constantes; à l'aide de la substitution  $z = \lambda \bar{z}$ , l'équation peut se mettre sous la forme

$$\sum_{i=0}^q \left( a_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + (b_i + c a_i y) \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) \bar{z} = 0 \quad (a_{q-1} = b_q = 0; a_q = 1),$$

où les coefficients  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c$  sont des constantes. L'équation

$$(74) \quad \sum_{i=0}^q \left( a_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + (b_i + c a_i y) \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z = 0 \quad (a_q = 1; b_q = a_{q-1} = 0; c \neq 0),$$

$a_i$ ,  $b_i$ ,  $c$  étant des constantes, admet les invariants suivants:

$$I_{q-1} = -qc, \quad I_i = a_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-2),$$

$$H_i = -b_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-1), \quad K_i = (-1)^{q-i} (b_i - (i+1) c a_{i+1}) \quad (i = 0, 1, \dots, q-1).$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (74) admette  $s$   $X$ -intégrales distinctes de rang 1 est que les deux équations

$$\sum_{i=0}^q a_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} = 0, \quad \sum_{i=0}^{q-1} b_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} = 0$$

admettent  $s$  intégrales distinctes en commun, et la condition nécessaire et suffisante pour cela est  $H_{q-j,j} = 0$  ( $j = q-s+1, q-s+2, \dots, q$ ). Nous avons



$$H_{q-2, 2} = \begin{vmatrix} b_{q-1} & b_{q-2} & b_{q-3} \\ 0 & b_{q-1} & b_{q-2} \\ 1 & 0 & a_{q-2} \end{vmatrix}, \quad H_{q-3, 3} = - \begin{vmatrix} b_{q-1} & b_{q-2} & b_{q-3} & b_{q-4} & b_{q-5} \\ 0 & b_{q-1} & b_{q-2} & b_{q-3} & b_{q-4} \\ 0 & 0 & b_{q-1} & b_{q-2} & b_{q-3} \\ 1 & 0 & a_{q-2} & a_{q-3} & a_{q-4} \\ 0 & 1 & 0 & a_{q-2} & a_{q-3} \end{vmatrix},$$

etc. Lorsque l'équation (74) admet  $s$  X-intégrales distinctes de rang 1, l'ordre de l'équation peut être immédiatement diminué de  $s$  unités. Supposons  $H_{0q} \neq 0$ . L'ordre de l'équation (74) ne peut être diminué directement. L'équation  $(E_1)$  est obtenue très simplement. Nous avons <sup>1)</sup>

$$Z_1 = \sum_{i=0}^q a_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i}, \quad \frac{\partial Z_1}{\partial x} + cyZ_1 = - \sum_{i=0}^{q-1} b_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i}.$$

L'équation qui définit  $Z_1$  peut par suite s'écrire

$$\sum_{i=0}^q a_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \left( \frac{\partial Z_1}{\partial x} + cyZ_1 \right) + \sum_{i=0}^{q-1} b_i \frac{\partial^i Z_1}{\partial y^i} = 0,$$

c'est-à-dire

$$(74') \quad \sum_{i=0}^q \left[ a_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + (b_i + (i+1)ca_{i+1} + ca_i y) \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right] Z_1 = 0.$$

Cette équation est du même type et du même ordre que l'équation proposée (74), et les invariants en sont

$$[I_{q-1}]_1 = -qc, \quad [I_i]_1 = a_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-2);$$

$$[H_i]_1 = -(b_i + (i+1)ca_{i+1}) \quad (i = 0, 1, \dots, q-1), \quad [K_i]_1 = (-1)^{q-i} b_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-1);$$

il en résulte  $[K_{ij}]_1 = (-1)^{q-i-j} H_{ij} \left( \begin{matrix} i = 0, 1, \dots, q-j \\ j = 1, 2, \dots, q \end{matrix} \right)$ . Ces relations entre les invariants des équations  $(E_1)$  et  $(E)$  peuvent aussi être déduites des relations données dans la proposition 13. Des valeurs obtenues pour les invariants de l'équation  $(E_1)$ , il suit immédiatement que les invariants de l'équation  $(E_m)$  sont

$$\left. \begin{aligned} [I_i]_m &= I_i, \quad [H_i]_m = H_i - m(i+1)ca_{i+1} = -(b_i + m(i+1)ca_{i+1}), \\ [K_i]_m &= K_i + (-1)^{q-i} m(i+1)ca_{i+1} = (-1)^{q-i} (b_i + (m-1)(i+1)ca_{i+1}) \end{aligned} \right\} \quad (i = 0, 1, \dots, q-1),$$

pourvu que l'équation  $(E_m)$  soit d'ordre  $n$ . La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation  $(E_m)$ ,  $m > 0$ , d'ordre  $n$  admette une X-intégrale de rang 1 est

<sup>1)</sup> En appliquant la transformation  $(T_1)$

$$z_q = \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i},$$

j'écris parfois  $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$  pour  $z_q, z_{2q}, z_{3q}, \dots$ ; cette désignation a l'avantage d'être indépendante de l'ordre de l'équation.

$[H_{0q}]_m = 0$ , et la condition nécessaire et suffisante pour que l'adjointe de l'équation  $(E_m)$ ,  $m < 0$ , d'ordre  $n$  admette une  $X$ -intégrale de rang 1 est  $[K_{0q}]_m = 0$  ou, autrement dit,  $[H_{0q}]_{m-1} = 0$ . L'invariant  $H_{0q}$  est

$$H_{0q} = (-1)^q \begin{vmatrix} b_{q-1} & b_{q-2} & b_{q-3} & \dots & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{q-1} & b_{q-2} & \dots & b_1 & b_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{q-1} & b_{q-2} & \dots & b_0 \\ 1 & 0 & a_{q-2} & \dots & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{q-2} & \dots & a_0 \end{vmatrix}$$

Si l'on remplace  $b_i$  ( $i = 0, 1, \dots, q-1$ ) par  $b_i + (i+1)ca_{i+1}$  dans ce déterminant, l'on obtiendra la valeur de l'invariant  $[H_{0q}]_1$ . Nous pouvons écrire

$$[H_{0q}]_1 = \sum_{i=0}^q d_i c^i,$$

où les coefficients  $d_i$  ( $i = 0, 1, \dots, q$ ), fonctions des coefficients  $a_j, b_j$  ( $j = 0, 1, \dots, q-1$ ), peuvent être calculés assez facilement. Après avoir calculé les coefficients  $d_i$  ( $i = 0, 1, \dots, q$ ), l'on obtient directement la valeur de l'invariant  $[H_{0q}]_m$ ; nous avons

$$[H_{0q}]_m = \sum_{i=0}^q d_i (mc)^i.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation  $(E)$  admette une  $X$ -intégrale est ainsi que l'équation algébrique

$$(75) \quad \sum_{i=0}^q d_i (mc)^i = 0,$$

$m$  étant la quantité inconnue, ait une racine qui est un nombre entier positif; si  $m_1$  est le plus petit nombre entier positif qui soit racine de l'équation (75), l'équation  $(E)$  admet une  $X$ -intégrale de rang  $m_1 + 1$  et pas de  $X$ -intégrale de rang inférieur. Et la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation adjointe  $(E')$  admette une  $X$ -intégrale est que l'équation (75) ait une racine qui est un nombre entier négatif; si  $m_1$  est le nombre entier négatif à la valeur absolue la plus petite qui soit racine de l'équation (75), l'équation  $(E')$  admet une  $X$ -intégrale de rang  $-m_1$  et l'équation  $(E)$  n'admet pas de  $X$ -intégrale de rang inférieur. — Si l'équation  $(E_m)$  est d'ordre inférieur à  $n$ , les expressions ci-dessus obtenues pour les invariants de l'équation  $(E_m)$  ne sont pas valables. Supposons que l'équation  $(E_{m_1})$ ,  $m_1 > 0$ , soit d'ordre  $n$  et que l'équation  $(E_{m_1+1})$  soit d'ordre inférieur;  $m_1$  est alors le plus petit nombre entier positif qui soit racine de l'équation (75). Supposons que l'équation  $(E_{m_1+1})$  soit d'ordre  $n-1$ . Les équations

$$(76) \quad \sum_{i=0}^q a_i \frac{\partial^i Z_{m_1}}{\partial y^i} = 0, \quad \sum_{i=0}^{q-1} (b_i + m_1(i+1)ca_{i+1}) \frac{\partial^i Z_{m_1}}{\partial y^i} = 0$$

admettent alors une — et une seule — intégrale commune. Nous pouvons par suite écrire

$$\sum_{i=0}^q a_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} = \sum_{i=0}^{q-1} \bar{a}_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \left( \frac{\partial}{\partial y} - \lambda_1 \right),$$

$$\sum_{i=0}^{q-1} (b_i + m_1(i+1) c a_{i+1}) \frac{\partial^i}{\partial y^i} = \sum_{i=0}^{q-2} \bar{b}_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \left( \frac{\partial}{\partial y} - \lambda_1 \right),$$

$\lambda_1$  étant une constante. L'équation  $(E_{m_1})$  admet la  $X$ -intégrale  $e^{\lambda_1 y} X$ , et l'équation  $(E)$  admet une  $X$ -intégrale de rang  $m_1 + 1$  qui correspond à  $e^{\lambda_1 y}$ . L'équation  $(E_{m_1+1})$  peut s'écrire

$$\sum_{i=0}^{q-1} \bar{a}_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \left( \frac{\partial}{\partial x} + cy \right) Z_{m_1+1} + \sum_{i=0}^{q-2} \bar{b}_i \frac{\partial^i Z_{m_1+1}}{\partial y^i} = 0.$$

Il résulte de ce qui précède que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation  $(E_{m_1+1})$  admette une  $X$ -intégrale est qu'il existe un nombre entier positif  $r_1$ , pour lequel les équations

$$(76') \quad \sum_{i=0}^{q-1} \bar{a}_i \frac{\partial^i Z_{m_1+r_1}}{\partial y^i} = 0, \quad \sum_{i=0}^{q-2} (\bar{b}_i + r_1(i+1) c \bar{a}_{i+1}) \frac{\partial^i Z_{m_1+r_1}}{\partial y^i} = 0$$

admettent une intégrale commune; pour l'équation (74) est supposée  $a_{q-1} = 0$ , mais il n'en suit pas  $\bar{a}_{q-1} = 0$ ; il est aisé de voir que cette différence ne change pas le résultat en question. Je désigne  $\frac{\partial}{\partial y}$  par  $\mathfrak{D}$  et j'écris les équations (76) sous la forme

$$(77) \quad \prod_{i=1}^q (\mathfrak{D} - \lambda_i) Z_{m_1} = 0, \quad \prod_{i=1}^{q-1} (\mathfrak{D} - \mu_i) Z_{m_1} = 0, \quad \text{où } \lambda_1 = \mu_1,$$

et les équations (76') sous la forme

$$(77') \quad \left\{ \begin{array}{l} \prod_{i=2}^q (\mathfrak{D} - \lambda_i) Z_{m_1+r_1} = 0, \\ \prod_{i=2}^{q-1} (\mathfrak{D} - \mu_i) Z_{m_1+r_1} + \frac{r_1 c}{b_{q-1} + m_1 c q} \left[ \frac{\partial}{\partial \mathfrak{D}} \prod_{i=2}^q (\mathfrak{D} - \lambda_i) \right] Z_{m_1+r_1} = 0. \end{array} \right.$$

(Le changement insignifiant de la manière d'écrire les équations, si  $b_{q-1} + m_1 c q = 0$ , se comprend de soi-même). En multipliant les équations (77') par le facteur  $\mathfrak{D} - \lambda_1$ , nous obtiendrons les équations

$$\prod_{i=1}^q (\mathfrak{D} - \lambda_i) Z_{m_1+r_1} = 0,$$

$$\prod_{i=1}^q (\mathfrak{D} - \mu_i) Z_{m_1+r_1} + \frac{r_1 c}{b_{q-1} + m_1 c q} \left( \frac{\partial}{\partial \mathfrak{D}} \prod_{i=1}^q (\mathfrak{D} - \lambda_i) - \prod_{i=2}^q (\mathfrak{D} - \lambda_i) \right) Z_{m_1+r_1} = 0.$$



Une condition nécessaire pour que les équations (77') admettent une intégrale commune est par suite que les équations

$$\prod_{i=1}^q (\mathfrak{D} - \lambda_i) Z_{m_1+r_1} = 0,$$

$$\prod_{i=1}^q (\mathfrak{D} - \mu_i) Z_{m_1+r_1} + \frac{r_1 c}{b_{q-1} + m_1 c q} \left[ \frac{\partial}{\partial \mathfrak{D}} \prod_{i=1}^q (\mathfrak{D} - \lambda_i) \right] Z_{m_1+r_1} = 0,$$

ou autrement dit les équations

$$(78) \quad \sum_{i=0}^q a_i \frac{\partial^i Z_{m_1+r_1}}{\partial y^i} = 0, \quad \sum_{i=0}^{q-1} (b_i + (m_1 + r_1)(i+1) c a_{i+1}) \frac{\partial^i Z_{m_1+r_1}}{\partial y^i} = 0,$$

admettent une intégrale commune. Réciproquement, si les équations (78) admettent une intégrale commune qui n'est pas  $e^{\lambda_1 y}$ , les équations (76') admettent aussi cette intégrale commune. Mais  $e^{\lambda_1 y}$  ne peut être l'intégrale commune des équations (78)

qu'à condition que  $\lambda_1$  soit une racine multiple de l'équation  $\sum_{i=0}^q a_i \lambda^i = 0$  et en même temps racine de l'équation  $\sum_{i=0}^{q-1} b_i \lambda^i = 0$ ; comme nous avons supposé  $H_{0q} \neq 0$ ,

nous pouvons excepter ce cas. La condition nécessaire et suffisante pour que les équations (76') admettent une intégrale commune est ainsi que les équations (78) admettent une intégrale commune, et la condition nécessaire et suffisante en est

$$\sum_{i=0}^q d_i ((m_1 + r_1)c)^i = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation  $(E_{m_1+1})$  admette une  $X$ -intégrale est ainsi que l'équation

$$\frac{1}{r} \sum_{i=0}^q d_i ((m_1 + r)c)^i = 0,$$

$r$  étant la quantité inconnue, ait une racine qui est un nombre entier positif. Supposons que  $r_1$  soit le plus petit nombre entier positif qui soit racine de cette équation. L'équation  $(E_{m_1+r_1})$  admet une  $X$ -intégrale de rang 1, et l'équation  $(E_{m_1+1})$  admet une  $X$ -intégrale de rang  $r_1$  et pas de  $X$ -intégrale de rang inférieur. Supposons encore que l'intégrale commune des équations (78) et (76') soit  $e^{\lambda_2 y}$ ; l'équation  $(E_{m_1+r_1})$  admet l'intégrale  $e^{\lambda_2 y} X$  et l'équation  $(E)$  admet par suite une  $X$ -intégrale de rang  $m_1 + r_1 + 1$  qui correspond à  $e^{\lambda_2 y}$ . Écrivons  $m_1 + r_1 = m_2$ . Nous avons ainsi montré que, si, après  $m_1$ ,  $m_2$  est le plus petit nombre entier positif qui soit racine de l'équation (75), l'équation  $(E)$  admet une  $X$ -intégrale de rang  $m_2 + 1$ . De même nous trouvons que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation  $(E_{m_2+1})$  d'ordre  $n-2$  admette une  $X$ -intégrale est qu'il existe un nombre entier positif  $r_2$ , pour lequel les équations

$$(78') \quad \sum_{i=0}^{q-1} \bar{a}_i \frac{\partial^i Z_{m_2+r_2}}{\partial y^i} = 0, \quad \sum_{i=0}^{q-2} [\bar{b}_i + (r_1 + r_2)(i+1) c \bar{a}_{i+1}] \frac{\partial^i Z_{m_2+r_2}}{\partial y^i} = 0$$

admettent une intégrale commune, car  $e^{\lambda_2 y}$  n'est une intégrale commune des dernières équations qu'à condition que  $\lambda_2$  est une racine multiple de l'équation

$$\sum_{i=0}^q a_i \lambda^i = 0 \text{ et en même temps une racine de l'équation } \sum_{i=0}^{q-1} b_i \lambda^i = 0; \text{ et la condition}$$

nécessaire et suffisante pour que les équations (78') admettent une intégrale commune est

$$\sum_{i=0}^q d_i [(m_2 + r_2) c]^i = 0.$$

— Nous avons supposé jusqu'ici que l'équation  $(E_{m_1+1})$  soit d'ordre  $n - 1$ ; si nous supposons que l'équation  $(E_{m_1+1})$  soit d'ordre  $n - s$ , il en suit que  $m_1$  est une racine d'ordre  $s$  de l'équation (75). — En continuant de cette manière nous obtiendrons: La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (74) admette  $s$   $X$ -intégrales distinctes est que l'équation (75),  $m$  étant la quantité inconnue, ait  $s$  racines qui sont des nombres entiers positifs; si l'équation (75) a les racines  $m_1, m_2, \dots, m_s$  qui sont des nombres entiers positifs, l'équation (74) admet  $s$   $X$ -intégrales de rang  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_s + 1$ , et ces  $X$ -intégrales ne peuvent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur; et si les équations

$$\sum_{i=0}^q a_i \frac{\partial^i \alpha}{\partial y^i} = 0, \quad \sum_{i=0}^{q-1} (b_i + m_h (i + 1) c a_{i+1}) \frac{\partial^i \alpha}{\partial y^i} = 0$$

admettent l'intégrale  $e^{\lambda_h y}$  en commun, l'équation (74) admet une  $X$ -intégrale de rang  $m_h + 1$  qui correspond à  $e^{\lambda_h y}$ . Et la condition nécessaire et suffisante pour que l'adjointe de l'équation (74) admette  $s$   $X$ -intégrales distinctes est que l'équation (75) ait  $s$  racines qui sont des nombres entiers négatifs; si l'équation (75) a les racines  $m_1, m_2, \dots, m_s$  qui sont des nombres entiers négatifs, l'adjointe de l'équation (74) admet  $s$   $X$ -intégrales de rang  $-m_1, -m_2, \dots, -m_s$ , et ces  $X$ -intégrales ne peuvent être remplacées par des intégrales de rang inférieur. Il en suit que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (74) admette une  $Y$ -intégrale de rang  $r + 1$  est que toutes les racines de l'équation (75) soient des nombres entiers négatifs et que la somme des valeurs absolues des racines soit  $r + q$ .

Pour reconnaître si l'équation (74) ou l'adjointe de l'équation (74) admettent des intégrales de la forme d'Euler, et dans ce cas combien, il suffit donc de calculer les  $q + 1$  coefficients  $d_i$  ( $i = 0, 1, \dots, q$ ) et d'examiner combien des racines de l'équation (75)

$$\sum_{i=0}^q d_i (mc)^i = 0$$

( $m$  étant la quantité inconnue) sont des nombres entiers, positifs ou négatifs. Jusqu'ici nous avons supposé  $H_{0q} \neq 0$ . Lorsque  $H_{0q} = 0$ , nous pouvons ou diminuer d'abord l'ordre de l'équation (74) ou former l'équation (75) directement; il est pourtant à remarquer que si l'équation  $\sum_{i=0}^q a_i \lambda^i = 0$  a une racine multiple qui est en

même temps une racine de l'équation  $\sum_{i=0}^{q-1} b_i \lambda^i = 0$ , il nous faut diminuer l'ordre de l'équation (74) d'abord, sinon, nous aurions  $d_i = 0$  ( $i = 0, 1, \dots, q$ ). Il suit de ce qui précède que, si  $\lambda_1$  est une racine multiple de l'équation  $\sum_{i=0}^q a_i \lambda^i = 0$  et que l'équation (74) admette une  $X$ -intégrale qui correspond à  $e^{\lambda_1 y}$ , celle-ci doit être de rang 1.

Nous pouvons déduire de la proposition 12: La condition nécessaire et suffisante pour que l'intégration de l'équation (74) [et par suite aussi celle de l'équation adjointe] puisse être ramenée à l'intégration d'équations différentielles linéaires est que toutes les racines de l'équation (75) soient des nombres entiers, négatifs ou positifs (zéro inclusivement). Une condition nécessaire (pas suffisante) en est que  $\frac{H_{q-1}}{c}$  soit un nombre entier. Cela peut être démontré de la manière suivante: Supposons que l'équation (74) admette  $s$   $X$ -intégrales de rang  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_s + 1$  ( $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_s$ ) qui ne puissent être remplacées par des intégrales de rang inférieur, et que l'équation adjointe admette  $q - s$   $X$ -intégrales de rang  $r_1 + 1, r_2 + 1, \dots, r_{q-s} + 1$  ( $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_{q-s}$ ) qui ne puissent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur. Nous avons obtenue (page 93)

$$[H_{q-1}]_1 = H_{q-1} - qc,$$

pourvu que l'équation  $(E_1)$  soit d'ordre  $q + 1$ . Si l'équation  $(E_1)$  est d'ordre  $p + 1$ , il suit de la proposition 13 que nous aurons

$$[H_{p-1}]_1 = H_{p-1} - pc.$$

Nous pourrions par suite écrire

$$[H_{p_2-1}]_{i+1} = [H_{p_1-1}]_i - p_2 c, \quad [K_{p_2-1}]_{i+1} = [H_{p_1-1}]_i,$$

lorsque l'équation  $(E_i)$  est d'ordre  $p_1 + 1$  et l'équation  $(E_{i+1})$  d'ordre  $p_2 + 1, i \geq 0$ . En appliquant ces formules, nous obtiendrons

$$[K_{q-s-1}]_{m_s+1} = H_{q-1} - c \left( \sum_{i=1}^s m_i + (q-s)m_s \right).$$

A l'aide de la preuve de la proposition 12 nous verrons que l'adjointe de l'équation  $(E_{m_s+1})$  admet  $q - s$   $X$ -intégrales; les  $q - s$   $X$ -intégrales sont de rang  $r_1 + m_s + 2, r_2 + m_s + 2, \dots, r_{q-s} + m_s + 2$ . L'invariant  $H_{q-s-1}$  pour l'équation qui est adjointe à l'équation  $(E_{m_s+1})$  est  $[K_{q-s-1}]_{m_s+1}$ ; si l'on applique la transformation  $(T_1)$   $m_s + r_{q-s} + 1$  fois de suite à cette équation adjointe, on est conduit, si  $r_{q-s-1} < r_{q-s}$ , à une équation du second ordre, dont l'invariant  $H_0$  (l'invariant  $h$  d'après la désignation de Darboux) est

$$[K_{q-s-1}]_{m_s+1} + c \sum_{i=1}^{q-s} (r_i + m_s + 1).$$

Comme l'équation obtenue admet une  $X$ -intégrale de rang 1, l'invariant  $H_0$  de cette équation doit être nul, c'est-à-dire



$$[K_{q-s-1}]_{m_s+1} + c \sum_{i=1}^{q-s} (r_i + m_s + 1) = 0,$$

d'où suit

$$H_{q-1} - c \left( \sum_{i=1}^s m_i + (q-s)m_s - \sum_{i=1}^{q-s} (r_i + m_s + 1) \right) = 0,$$

et ainsi

$$H_{q-1} = c \sum_{i=1}^s m_i - c \sum_{i=1}^{q-s} (r_i + 1).$$

Si  $r_{q-s-1} = r_{q-s}$ , la seule différence dans la preuve sera qu'il faudra employer une autre désignation pour l'invariant  $H_0$ , puisque l'équation obtenue est d'ordre supérieur au second. Par cela il est prouvé qu'une condition nécessaire pour que l'intégration de l'équation (74) puisse être ramenée à l'intégration d'équations différentielles linéaires est que l'on ait

$$H_{q-1} = c \left( \sum_{i=1}^s m_i - \sum_{i=1}^{q-s} (r_i + 1) \right),$$

où autrement dit que la somme des racines de l'équation (75) soit  $\frac{H_{q-1}}{c}$ , c'est-à-dire

$$-\frac{d_{q-1}}{d_q} = \frac{H_{q-1}}{c} = \text{un nombre entier.}$$

Nous voyons que l'intégrale générale de l'équation (74) ne peut jamais être représentée par une somme d'intégrales de la forme d'Euler.

La condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale générale de l'équation

$$\sum_{i=0}^q \left( a_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + (b_i + c a_i y) \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z = 0, \quad (a_q = 1; \quad b_q = 0)$$

soit représentée par  $n$  intégrales de la forme d'Euler est que l'équation en question soit de la forme

$$\sum_{i=0}^q a_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} = 0.$$

L'équation

$$\sum_{i=0}^q \left( a_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + b_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z = 0,$$

ne change pas pour les transformations  $(T_1)$  et  $(T_{-1})$ ; il en suit que, si l'équation en question admet une intégrale de la forme d'Euler, celle-ci est de rang 1.

Je donnerai enfin quelques relations entre les invariants de l'équation (74) qui pourraient être d'intérêt. Il résulte des expressions obtenues pour les invariants de l'équation  $(E_1)$  (page 93) que, si l'équation  $(E_m)$  est d'ordre  $n$ , nous pourrions écrire

$$[H_{ij}]_r = \sum_{s=0}^j h_{sij}(r)^s \quad \begin{pmatrix} i = 0, 1, \dots, q-j \\ j = 1, 2, \dots, q \\ r = 0, 1, \dots, m \end{pmatrix},$$

$h_{sij}$  étant des fonctions de  $c$ ,  $a_k$ ,  $b_k$  ( $k = 0, 1, \dots, q-1$ ). Si l'équation

$(E_{j+1})$  est d'ordre  $n$ , entre les  $j+2$  équations  $[H_{ij}]_r = \sum_{s=0}^j h_{sij} (r)^s$  ( $r=0, 1, \dots, j+1$ ), les  $j+1$  quantités  $h_{sij}$  ( $s=0, 1, \dots, j$ ) peuvent être éliminées, et nous obtiendrons de cette manière l'équation

$$[H_{ij}]_{j+1} - (j+1)[H_{ij}]_j + \frac{(j+1)j}{2!} [H_{ij}]_{j-1} - \dots + (-1)^{j+1-r} \frac{j+1!}{r!(j+1-r)!} [H_{ij}]_r + \dots + (-1)^j (j+1)[H_{ij}]_1 + (-1)^{j+1} H_{ij} = 0.$$

Il en résulte

$$\frac{j!(m-j-1)!}{m!} [H_{ij}]_m = \frac{[H_{ij}]_j}{m-j} - j \frac{[H_{ij}]_{j-1}}{m-j+1} + \dots + (-1)^{j-r} \frac{j!}{r!(j-r)!} \frac{[H_{ij}]_r}{m-r} + \dots + (-1)^{j-1} j \frac{[H_{ij}]_1}{m-1} + (-1)^j \frac{H_{ij}}{m} = 0, \quad \begin{pmatrix} m > j \\ i = 0, 1, \dots, q-j \\ j = 1, 2, \dots, q \end{pmatrix}$$

pourvu que l'équation  $(E_m)$  soit d'ordre  $n$ . Ce sont les  $2q$  invariants  $H_{q-j, j}$ ,  $K_{q-j, j}$  ( $j=1, 2, \dots, q$ ) qui sont du plus grand intérêt. Les équations obtenues nous permettent d'exprimer les  $2q$  invariants en question de l'équation  $(E_m)$  — soit  $m \geq q$ , soit  $m < 0$  — d'ordre  $n$ , c'est-à-dire les invariants  $[H_{q-j, j}]_m$ ,  $[K_{q-j, j}]_m$  ( $j=1, 2, \dots, q$ ), en fonction des mêmes invariants des équations  $(E)$ ,  $(E_1)$ ,  $(E_2)$ , ...  $(E_{q-1})$  d'ordre  $n$ . Je cite ces relations parce qu'il ne me semble pas impossible que des relations analogues aient lieu pour l'équation générale (20), c'est-à-dire que les  $2q$  invariants  $[H_{q-j, j}]_m$ ,  $[K_{q-j, j}]_m$  ( $j=1, 2, \dots, q$ ),  $m \leq 0$ , soient des fonctions des invariants

$$[H_{q-j, j}]_r \quad \begin{pmatrix} r = 0, 1, \dots, j-1 \\ j = 1, 2, \dots, q \end{pmatrix}, \quad K_{q-j, j} \quad (j = 1, 2, \dots, q),$$

pourvu que les équations  $(E_{q-1})$  et  $(E_m)$  soient d'ordre  $n$ . Ce sont les invariants  $[H_{q-j, j}]_m$  ( $j=1, 2, \dots, q$ ,  $m = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ ) qu'il est du plus grand intérêt d'obtenir; mais si on calcule ces invariants par les relations données dans la proposition 13, l'on est obligé en partant de l'équation générale (20) de calculer un grand nombre d'invariants sans intérêt pour les obtenir. Ce serait très intéressant, si après avoir calculé les invariants  $[H_{q-j, j}]_r$  ( $r = -1, 0, 1, \dots, j-1$ ), on pouvait directement obtenir les invariants  $[H_{q-j, j}]_m$  ( $j=1, 2, \dots, q$ ,  $m > j-1$ ) et  $[H_{q-j, j}]_m$  ( $j=1, 2, \dots, q$ ,  $m < -1$ ); mais je ne me prononce pas sur la question de savoir si des relations du type mentionné existent en vérité pour l'équation générale (20).

Nous avons vu que, pour l'équation (74) il est facile de reconnaître à quel point l'intégration de l'équation peut être simplifiée par la méthode de Laplace. Mais cela n'est nullement le cas pour l'équation (20). Il est donc d'intérêt de chercher d'autres critères pour reconnaître si l'ordre de l'équation (20) peut être diminué par l'application des transformations de Laplace. Il est tout naturel de généraliser le critérium de Goursat. Pisati <sup>1)</sup> a déjà étendu le critérium de Goursat à l'équation

<sup>1)</sup> Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. 1905 pages 357—364.

$$(79) \quad \sum_{i=0}^{n-1} A_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^n B_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \equiv \varphi_1 \frac{\partial z}{\partial x} + \varphi_0 z = 0, \quad [A_q = 1; q+1 = n].$$

La preuve de Pisati est en peu de mots ce qui suit. Supposons que l'équation (79) admette  $m+1$  intégrales  $\zeta_s$  ( $s = 1, 2, \dots, m+1$ ), entre lesquelles il existe une relation de la forme

$$\zeta_{m+1} = \sum_{s=1}^m f_s(x) \zeta_s.$$

Comme

$$\left( \varphi_1 \frac{\partial}{\partial x} + \varphi_0 \right) \zeta_{m+1} = 0,$$

nous obtenons

$$\sum_{s=1}^m f_s(x) \left( \varphi_1 \frac{\partial}{\partial x} + \varphi_0 \right) \zeta_s + \sum_{s=1}^m f'_s(x) \varphi_1 \zeta_s = 0,$$

et ainsi

$$\sum_{s=1}^m f'_s(x) \varphi_1 \zeta_s = 0.$$

La transformation  $z_q = \varphi_1 z$ , appliquée à l'équation (79), conduira par suite à une équation qui admet les  $m$  intégrales

$$\zeta_{s1} \quad (s = 1, 2, \dots, m), \quad \text{où} \quad \zeta_{s1} = \varphi_1 \zeta_s,$$

entre lesquelles existe la relation

$$\zeta_{m1} = - \frac{1}{f'_m(x)} \sum_{s=1}^{m-1} f'_s(x) \zeta_{s1}.$$

En appliquant la transformation en question  $m-1$  fois (doit être  $m-1$  fois au plus), nous obtiendrons une équation qui admet deux intégrales  $\zeta_{1, m-1}$  et  $\zeta_{2, m-1}$ , entre lesquelles il existe une relation de la forme

$$\zeta_{2, m-1} = f(x) \zeta_{1, m-1};$$

l'équation obtenue admet l'intégrale  $\zeta_{1, m-1} X$ , et l'ordre de cette équation peut être diminué directement. En résumé, si l'équation (79) admet  $m+1$  intégrales entre lesquelles existe une relation de la forme

$$\zeta_{m+1} = \sum_{s=1}^m f_s(x) \zeta_s,$$

l'équation peut, en appliquant la transformation

$$z_q = \varphi_1 z$$

$m-1$  fois (doit être  $m-1$  fois au plus), être ramenée à une équation dont l'ordre peut être diminué directement. Cette proposition peut aussi être prouvée conformément à la preuve de Goursat<sup>1)</sup>. Comme j'ai reçu de cette manière des résultats un peu plus complets, je vais exposer cette preuve.

<sup>1)</sup> Voir page 8.



Supposons que l'équation (20) admette  $m+1$  intégrales  $\zeta_s$  ( $s=1, 2, \dots, m+1$ ) linéairement indépendantes — c'est-à-dire qu'il n'y a entre elles aucune relation linéaire et homogène à coefficients constants — entre lesquelles existe la relation

$$(80) \quad \sum_{s=1}^{m+1} f_s(x) \zeta_s = 0.$$

S'il existait, entre les intégrales  $\zeta_s$  ( $s=1, 2, \dots, m+1$ ),  $r+1$  relations distinctes de la forme (80), nous aurions pu entre ces  $r+1$  relations éliminer  $r$  des intégrales  $\zeta_s$  ( $s=1, 2, \dots, m+1$ ) et par suite obtenir une relation du type considéré entre  $m+1-r$  des intégrales. Nous pouvons donc supposer qu'il n'existe qu'une seule relation de la forme (80) entre les  $m+1$  intégrales  $\zeta_s$  ( $s=1, 2, \dots, m+1$ ). Nous pouvons aussi supposer que les fonctions  $f_s(x)$  ( $s=1, 2, \dots, m+1$ ) dans cette relation soient linéairement indépendantes, car s'il existait une relation de la forme

$$f_1(x) = \sum_{s=2}^{m+1} a_s f_s(x),$$

les coefficients  $a_s$  étant des constants, nous pourrions écrire

$$\sum_{s=2}^{m+1} f_s(x) \bar{\zeta}_s = 0, \quad \text{où } \bar{\zeta}_s = \zeta_s + a_s \zeta_1.$$

Nous pouvons donc, sans diminuer la généralité, supposer qu'il n'existe qu'une seule relation de la forme (80) entre les  $m+1$  intégrales  $\zeta_s$  ( $s=1, 2, \dots, m+1$ ) et que dans cette relation les fonctions  $f_s(x)$  ( $s=1, 2, \dots, m+1$ ) soient linéairement indépendantes.

Les  $m+1$  intégrales  $\zeta_s$  ( $s=1, 2, \dots, m+1$ ) définissent une équation de la forme

$$(81) \quad \sum_{i=0}^m \lambda_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} = 0,$$

$\lambda_i$  étant des fonctions de  $x$  et de  $y$ . Les deux équations (20) et (81) admettent les  $m+1$  intégrales  $\zeta_s$  ( $s=1, 2, \dots, m+1$ ) en commun, lesquelles sont linéairement indépendantes. Nous pouvons toujours choisir des coefficients

$$\mu_j \quad (j=0, 1, \dots, m-1), \quad \nu_i, \omega_i \quad (i=0, 1, \dots, q-1),$$

fonctions de  $x$  et de  $y$ , d'une telle manière qu'une identité

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{m-1} \mu_j \frac{\partial^j}{\partial y^j} \sum_{i=0}^q \left( A_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z \equiv \\ & \equiv \sum_{j=0}^{q-1} \left( \nu_j \frac{\partial^{j+1}}{\partial x \partial y^j} + \omega_j \frac{\partial^j}{\partial y^j} \right) \sum_{i=0}^m \lambda_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} + \rho \frac{\partial z}{\partial x} + \sum_{i=0}^{m-1} \sigma_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \end{aligned}$$

ait lieu, et de même que Goursat<sup>1)</sup> l'a prouvé pour l'équation (1), l'on peut prouver à cet endroit aussi que nous aurons  $\rho=0$  et  $\sigma_i=0$  ( $i=0, 1, \dots, m-1$ ). Ainsi existe l'identité

<sup>1)</sup> Goursat, Lecons. T. II page 26.

$$(81') \quad \sum_{j=0}^{m-1} \mu_j \frac{\partial^j}{\partial y^j} \sum_{i=0}^q \left( A_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \right) = \sum_{j=0}^{q-1} \left( \nu_j \frac{\partial^{j+1}}{\partial x \partial y^j} + \omega_j \frac{\partial^j}{\partial y^j} \right) \sum_{i=0}^m \lambda_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i}.$$

Les deux équations différentielles linéaires

$$\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0, \quad \sum_{i=0}^m \lambda_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0$$

admettent par suite au moins une intégrale commune.

Supposons que les deux équations

$$\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0, \quad \sum_{i=0}^m \lambda_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0$$

n'admettent qu'une intégrale commune. Nous pouvons supposer que l'intégrale commune soit  $\alpha_0 = f(x)$  (si ce n'était pas le cas, nous pourrions effectuer la substitution  $z = \lambda \bar{z}$ ) ou autrement dit, nous pouvons poser  $A_0 = \lambda_0 = 0$ . — Supposons  $B_0 = 0$ . Les équations

$$\sum_{i=0}^{q-1} \left( A_{i+1} \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_{i+1} \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z_1 = 0, \quad \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_{i+1} \frac{\partial^i z_1}{\partial y^i} = 0$$

admettent les  $m+1$  intégrales

$$\zeta_{s1} \quad (s = 1, 2, \dots, m+1), \quad \text{où} \quad \zeta_{s1} = \frac{\partial \zeta_s}{\partial y},$$

en commun. De l'équation (80) il suit

$$\sum_{s=1}^{m+1} f_s(x) \zeta_{s1} = 0.$$

Mais comme les équations

$$\sum_{i=0}^{q-1} A_{i+1} \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0, \quad \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_{i+1} \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0$$

n'admettent pas d'intégrales communes, l'équation

$$\sum_{s=1}^{m+1} f_s(x) \zeta_{s1} = 0,$$

où les fonctions  $f_s(x)$  ( $s = 1, 2, \dots, m+1$ ) sont linéairement indépendantes, nous donne  $\zeta_{i1} = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, m+1$ ) et par suite  $\zeta_i = x_i$ ,  $x_i$  designant des fonctions de  $x$ . Et comme nous avons supposé qu'il n'existe qu'une relation de la forme (80) entre les intégrales  $\zeta_s$  ( $s = 1, 2, \dots, m+1$ ), nous avons  $m = 1$ . Réciproquement, si nous supposons  $m = 1$ , il en résulte directement que nous aurons  $B_0 = 0$ . Ainsi, dans le cas considéré,  $m = 1$  est la condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait  $B_0 = 0$ . — Supposons maintenant  $B_0 \neq 0$  (ou autrement dit  $m > 1$ ). Écrivons

$$\sum_{j=0}^{m-1} \mu_j \frac{\partial^j}{\partial y^j} = \sum_{j=0}^{m-2} \bar{\mu}_{j+1} \frac{\partial^j}{\partial y^j} \left( \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \log B_0}{\partial y} \right) + \bar{\mu}_0.$$

Dans l'identité (81') le coefficient de  $z$  est  $\bar{\mu}_0 B_0$ , puisque  $A_0 = \lambda_0 = 0$ ; par suite nous avons  $\bar{\mu}_0 = 0$ . En substituant  $z_1 = \frac{\partial z}{\partial y}$ , l'identité (81') peut ainsi s'écrire

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m-2} \bar{\mu}_{j+1} \frac{\partial^j}{\partial y^j} \left[ B_0 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{B_0} \sum_{i=0}^{q-1} \left( A_{i+1} \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_{i+1} \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z_1 \right) + B_0 z_1 \right] &\equiv \\ &\equiv \sum_{j=0}^{q-1} \left( \nu_j \frac{\partial^{j+1}}{\partial x \partial y^j} + \omega_j \frac{\partial^j}{\partial y^j} \right) \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_{i+1} \frac{\partial^i z_1}{\partial y^i}. \end{aligned}$$

Si l'on écrit l'équation qui définit  $z_1$

$$\sum_{i=0}^q \left( A_{i1} \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_{i1} \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z_1 = 0,$$

l'identité en question s'écrit

$$\sum_{j=0}^{m-2} \bar{\mu}_{j+1} \frac{\partial^j}{\partial y^j} \sum_{i=0}^q \left( A_{i1} \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_{i1} \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z_1 \equiv \sum_{j=0}^{q-1} \left( \nu_j \frac{\partial^{j+1}}{\partial x \partial y^j} + \omega_j \frac{\partial^j}{\partial y^j} \right) \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_{i+1} \frac{\partial^i z_1}{\partial y^i}.$$

Nous pouvons continuer de cette manière. Après avoir appliqué  $m-1$  transformations  $(t_1)$ , convenablement choisies, nous obtenons une identité de la forme

$$\sum_{i=0}^q \left( A_{i, m-1} \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_{i, m-1} \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z_{m-1} \equiv \sum_{j=0}^{q-1} \left( \nu_j \frac{\partial^{j+1}}{\partial x \partial y^j} + \omega_j \frac{\partial^j}{\partial y^j} \right) \left( \bar{\lambda}_1 \frac{\partial}{\partial y} + \bar{\lambda}_0 \right) z_{m-1}.$$

L'équation qui définit  $z_{m-1}$  admet l'intégrale

$$\alpha X, \text{ où } \bar{\lambda}_1 \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \bar{\lambda}_0 \alpha = 0.$$

L'équation (20) admet ainsi une  $X$ -intégrale de rang  $m$ , laquelle est l'intégrale commune des deux équations (20) et (81). — Des  $m+1$  intégrales  $\zeta_s$  ( $s = 1, 2, \dots, m+1$ ) nous pouvons directement déduire la  $X$ -intégrale de rang  $m$ . Écrivons

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} f_1(x) & f'_1(x) & f''_1(x) & \dots & f_1^{(m)}(x) \\ f_2(x) & f'_2(x) & f''_2(x) & \dots & f_2^{(m)}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m+1}(x) & f'_{m+1}(x) & f''_{m+1}(x) & \dots & f_{m+1}^{(m)}(x) \end{vmatrix}, \quad x_i = (-1)^m \frac{\partial \log \mathfrak{D}}{\partial f_i^{(m)}(x)} \quad (i=1, 2, \dots, m+1),$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x'_1 & x''_1 & \dots & x_1^{(m)} \\ x_2 & x'_2 & x''_2 & \dots & x_2^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m+1} & x'_{m+1} & x''_{m+1} & \dots & x_{m+1}^{(m)} \end{vmatrix}.$$

Nous avons alors

$$f_i(x) = \frac{\partial \log \Delta}{\partial x_i^{(m)}} \quad (i = 1, 2, \dots, m+1).$$

Il suit de la relation (80) que les coefficients  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$  peuvent être choisis de manière que nous ayons



$$\zeta_i = \alpha_0 x_i^{(m-1)} + \alpha_1 x_i^{(m-2)} + \dots + \alpha_{m-1} x_i \quad (i = 1, 2, \dots, m+1).$$

L'équation (80) peut s'écrire

$$\delta \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x'_1 & \dots & x_1^{(m-1)} & \zeta_1 \\ x_2 & x'_2 & \dots & x_2^{(m-1)} & \zeta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{m+1} & x'_{m+1} & \dots & x_{m+1}^{(m-1)} & \zeta_{m+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Nous aurons

$$\frac{\alpha_0}{\frac{\partial \delta}{\partial x_r^{(m-1)}}} = \frac{\alpha_1}{\frac{\partial \delta}{\partial x_r^{(m-2)}}} = \dots = \frac{\alpha_{m-1}}{\frac{\partial \delta}{\partial x_r}} = \frac{-1}{\frac{\partial \delta}{\partial \zeta_r}} \quad (r = 1, 2, \dots, m+1),$$

et la  $X$ -intégrale de l'équation (20) est

$$\alpha_0 X^{(m-1)} + \alpha_1 X^{(m-2)} + \dots + \alpha_{m-1} X.$$

La valeur de  $\alpha_0$  est ainsi

$$\alpha_0 = - \frac{\frac{\partial \delta}{\partial x_r^{(m-1)}}}{\frac{\partial \delta}{\partial \zeta_r}} = - \sum_{s=1}^{m+1} f_r(x) \left( \frac{f_s(x)}{f_r(x)} \right)' \zeta_s = \sum_{s=1}^{m+1} f_s(x) \frac{\partial \zeta_s}{\partial x}.$$

C'est par suite la  $X$ -intégrale correspondant à

$$\sum_{s=1}^{m+1} f_s(x) \left( \frac{f_s(x)}{f_r(x)} \right)' \zeta_s$$

qui est obtenue de cette manière.

Supposons que les deux équations différentielles linéaires

$$\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0, \quad \sum_{i=0}^m \lambda_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0$$

admettent  $r$  intégrales distinctes en commun. Il en suit qu'il existe une identité de la forme

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{m-r} \mu_j \frac{\partial^j}{\partial y^j} \sum_{i=0}^q \left( A_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z \equiv \\ & \equiv \sum_{j=0}^{q-r} \left( \nu_j \frac{\partial^{j+1}}{\partial x \partial y^j} + \omega_j \frac{\partial^j}{\partial y^j} \right) \sum_{i=0}^m \lambda_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} + \rho \frac{\partial z}{\partial x} + \sum_{i=0}^{m-1} \sigma_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i}. \end{aligned}$$

Comme auparavant, nous obtenons  $\rho = 0$  et  $\sigma_i = 0$  ( $i = 0, 1, \dots, m-1$ ). En procédant toujours de la même manière, nous trouverons que l'équation (20) admet  $r$   $X$ -intégrales distinctes et que la somme de leur rang est  $m$ , quand les  $X$ -intégrales sont écrites sous une telle forme que leur rang ne peut être réduit. Les  $r$   $X$ -intégrales sont des intégrales communes des équations (20) et (81).

Réciproquement, il va de soi que, si l'équation (20) admet  $r$   $X$ -intégrales distinctes

$$\alpha_{0i} X_i^{(m_i-1)} + \alpha_{1i} X_i^{(m_i-2)} + \dots + \alpha_{m_i-1,i} X_i \quad (i = 1, 2, \dots, r),$$

où  $\sum_{i=1}^r m_i = m$ , l'équation (20) admet  $m+1$  intégrales

$$\zeta_s = \sum_{i=1}^r (\alpha_{0i} x_{si}^{(m_i-1)} + \alpha_{1i} x_{si}^{(m_i-2)} + \dots + \alpha_{m_i-1,i} x_{si}) \quad (s = 1, 2, \dots, m+1)$$

entre lesquelles existe une relation de la forme (80). Nous obtenons cette relation en éliminant les  $m$  coefficients  $\alpha_{ji} \left( \begin{smallmatrix} j=0, 1, \dots, m_i-1 \\ i=1, 2, \dots, r \end{smallmatrix} \right)$  entre les  $m+1$  équations qui donnent les valeurs des intégrales  $\zeta_s$  ( $s = 1, 2, \dots, m+1$ ). Si les  $r$   $X$ -intégrales peuvent être écrites sous une telle forme que la somme de leur rang soit  $m-p$ ,  $p+1$  relations de la forme en question existent entre les intégrales.

Il est tout naturel d'essayer encore d'étendre le critérium de Goursat de manière à le faire valoir pour l' $Y$ -intégrale de l'équation (20). Si l'équation (20) admet  $q+1$  intégrales  $\zeta_s$  ( $s = 1, 2, \dots, q+1$ ) linéairement indépendantes entre lesquelles il existe  $q$  relations distinctes de la forme

$$\sum_{i=1}^{q+1} f_i(y) \zeta_i = 0,$$

l'équation (20) admet toujours une  $Y$ -intégrale de rang 1; mais nous ne pouvons pas en conclure que si l'équation (20) admet  $q+r$  intégrales  $\zeta_s$  ( $s = 1, 2, \dots, q+r$ ) linéairement indépendantes entre lesquelles il existe  $q$  relations distinctes de la forme

$$\sum_{i=1}^{r+q} f_i(y) \zeta_i = 0,$$

l'équation (20) admette une  $Y$ -intégrale de rang  $r$  au plus; cela n'est pas le cas.

Dans ce chapitre, ainsi que dans le chapitre précédent, je suis parti de l'équation (20)

$$\sum_{i=0}^q \left( A_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z = 0, \quad [A_q = 1; q+1 = n]$$

Tous les résultats obtenus peuvent, sans trop de difficulté, être étendus à l'équation (79)

$$\sum_{i=0}^{n-1} A_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^n B_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} = 0, \quad [A_q = 1; q+1 = n].$$

Ce n'est qu'en vue d'obtenir les résultats sous une forme aussi simple que possible que j'ai supposé  $B_n = 0$ .

### III.

Dans ce chapitre, nous nous occuperons uniquement des équations (20) qui admettent  $n$  intégrales distinctes de la forme d'Euler et dont l'intégrale générale peut ainsi être obtenue sous forme explicite.

Pour l'équation (1), Darboux <sup>1)</sup> a montré que, si l'équation admet une  $X$ -intégrale de rang  $m + 1$  et une  $Y$ -intégrale de rang  $r + 1$ , l'intégrale générale peut s'écrire

$$(82) \quad z = M \begin{vmatrix} X & X' & \dots & X^{(m)} & Y & Y' & \dots & Y^{(r)} \\ x_1 & x'_1 & \dots & x_1^{(m)} & y_1 & y'_1 & \dots & y_1^{(r)} \\ x_2 & x'_2 & \dots & x_2^{(m)} & y_2 & y'_2 & \dots & y_2^{(r)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_h & x'_h & \dots & x_h^{(m)} & y_h & y'_h & \dots & y_h^{(r)} \end{vmatrix} \quad (h = m + r + 1),$$

$x_1, x_2, \dots, x_h$  étant des fonctions déterminées de  $x$  qui sont linéairement indépendantes,  $y_1, y_2, \dots, y_h$  des fonctions déterminées de  $y$  qui sont linéairement indépendantes et le facteur non essentiel  $M$  une fonction déterminée de  $x$  et de  $y$ ; réciproquement, chaque expression de la forme (82),  $x_1, x_2, \dots, x_h$  étant des fonctions déterminées de  $x$  et  $y_1, y_2, \dots, y_h$  des fonctions déterminées de  $y$  et les coefficients de  $X^{(m)}$  et de  $Y^{(r)}$  dans le déterminant n'étant pas nuls, est l'intégrale générale d'une équation de la forme (1). L'équation qui définit  $z$  peut s'écrire

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \log \alpha}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \log \beta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial \log \alpha}{\partial y} \frac{\partial \log \beta}{\partial y} \right) \frac{z}{M} = 0,$$

où

$$\alpha = \begin{vmatrix} x_1 & x'_1 & \dots & x_1^{(m-1)} & y_1 & y'_1 & \dots & y_1^{(r)} \\ x_2 & x'_2 & \dots & x_2^{(m-1)} & y_2 & y'_2 & \dots & y_2^{(r)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_h & x'_h & \dots & x_h^{(m-1)} & y_h & y'_h & \dots & y_h^{(r)} \end{vmatrix}, \quad \beta = \begin{vmatrix} x_1 & x'_1 & \dots & x_1^{(m)} & y_1 & y'_1 & \dots & y_1^{(r-1)} \\ x_2 & x'_2 & \dots & x_2^{(m)} & y_2 & y'_2 & \dots & y_2^{(r-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_h & x'_h & \dots & x_h^{(m)} & y_h & y'_h & \dots & y_h^{(r-1)} \end{vmatrix}.$$

<sup>1)</sup> DARBOUX, Leçons. Partie II, Chap. II.



De l'intégrale générale  $z$ , écrite sous la forme (82), Darboux obtient directement l'intégrale générale de toutes les équations qui sont obtenues en appliquant les transformations de Laplace à l'équation (1). Darboux a montré que l'intégrale générale de l'équation  $(E_i)$  ( $m \geq i \geq -r$ ) est

$$z_i = N \begin{vmatrix} X & X' & \dots & X^{(m-i)} & Y & Y' & \dots & Y^{(r+i)} \\ x_1 & x'_1 & \dots & x_1^{(m-i)} & y_1 & y'_1 & \dots & y_1^{(r+i)} \\ x_2 & x'_2 & \dots & x_2^{(m-i)} & y_2 & y'_2 & \dots & y_2^{(r+i)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_h & x'_h & \dots & x_h^{(m-i)} & y_h & y'_h & \dots & y_h^{(r+i)} \end{vmatrix} \quad (h = r + m + 1),$$

où le facteur  $N$  peut être choisi arbitrairement, puisque  $(E_i)$  désigne toutes les équations équivalentes. Puis Darboux <sup>1)</sup> a montré que l'intégrale générale de l'équation adjointe  $(E')$  peut être déduite directement de l'intégrale générale de l'équation  $(E)$ , mise sous la forme (82); l'intégrale générale de l'équation  $(E')$  est

$$u = N \begin{vmatrix} X & X' & \dots & X^{(r)} & Y & Y' & \dots & Y^{(m)} \\ \xi_1 & \xi'_1 & \dots & \xi_1^{(r)} & \eta_1 & \eta'_1 & \dots & \eta_1^{(m)} \\ \xi_2 & \xi'_2 & \dots & \xi_2^{(r)} & \eta_2 & \eta'_2 & \dots & \eta_2^{(m)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_h & \xi'_h & \dots & \xi_h^{(r)} & \eta_h & \eta'_h & \dots & \eta_h^{(m)} \end{vmatrix},$$

où

$$\xi_i = \frac{\partial \log \Delta}{\partial x_i^{(m+r)}}; \quad \Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x'_1 & \dots & x_1^{(m+r)} \\ x_2 & x'_2 & \dots & x_2^{(m+r)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_h & x'_h & \dots & x_h^{(m+r)} \end{vmatrix}; \quad \eta_i = \frac{\partial \log \mathfrak{D}}{\partial y_i^{(m+r)}}; \quad \mathfrak{D} = \begin{vmatrix} y_1 & y'_1 & \dots & y_1^{(m+r)} \\ y_2 & y'_2 & \dots & y_2^{(m+r)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_h & y'_h & \dots & y_h^{(m+r)} \end{vmatrix}.$$

Nous allons essayer d'étendre ces résultats à l'équation (20).

Chaque expression de la forme

$$(83) \quad z = \begin{vmatrix} X_1 & X'_1 & \dots & X_1^{(m_1)} & X_2 & X'_2 & \dots & X_2^{(m_2)} & \dots & X_q & X'_q & \dots & X_q^{(m_q)} & Y & Y' & \dots & Y^{(r)} \\ x_{11} & x'_{11} & \dots & x_{11}^{(m_1)} & x_{12} & x'_{12} & \dots & x_{12}^{(m_2)} & \dots & x_{1q} & x'_{1q} & \dots & x_{1q}^{(m_q)} & y_1 & y'_1 & \dots & y_1^{(r)} \\ x_{21} & x'_{21} & \dots & x_{21}^{(m_1)} & x_{22} & x'_{22} & \dots & x_{22}^{(m_2)} & \dots & x_{2q} & x'_{2q} & \dots & x_{2q}^{(m_q)} & y_2 & y'_2 & \dots & y_2^{(r)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{h1} & x'_{h1} & \dots & x_{h1}^{(m_1)} & x_{h2} & x'_{h2} & \dots & x_{h2}^{(m_2)} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} & \dots & x_{hq}^{(m_q)} & y_h & y'_h & \dots & y_h^{(r)} \end{vmatrix},$$

$$\left( h = \sum_{i=1}^q m_i + r + q \right)$$

où le coefficient de  $Y^{(r)}$  n'est pas nul et où n'existe aucune relation de la forme

$$(84) \quad \sum_{i=1}^q f_i(x) \alpha_{0i} = 0,$$

<sup>1)</sup> DARBOUX, Leçons. Partie II, Chap. VI (page 131).

$\alpha_{0i}$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) désignant les coefficients de  $X_i^{(m_i)}$ , est l'intégrale générale d'une équation du type (20) d'ordre  $n$ . Par  $x_{ij}$  je désigne toujours des fonctions déterminées de  $x$  et par  $y_i$  des fonctions déterminées de  $y$ . La proposition peut être démontrée de la manière suivante. En différentiant l'équation (83), nous pouvons obtenir

$$\frac{\partial^{q+1} z}{\partial x \partial y^q}, \frac{\partial^q z}{\partial x \partial y^{q-1}}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^q z}{\partial y^q}, \frac{\partial^{q-1} z}{\partial y^{q-1}}, \dots, \frac{\partial z}{\partial y}$$

comme des fonctions linéaires et homogènes de

$$X_1, X'_1, \dots, X_1^{(m_1+1)}, X_2, X'_2, \dots, X_2^{(m_2+1)}, \dots, X_q, X'_q, \dots, X_q^{(m_q+1)}, Y, Y', \dots, Y^{(r+q)},$$

les coefficients étant des fonctions déterminées de  $x$  et de  $y$ . Entre les  $2q + 1$  équations qui déterminent ces dérivées, nous pouvons éliminer les  $2q$  quantités

$$X_i^{(m_i+1)}, Y^{(r+i)} \quad (i = 1, 2, \dots, q).$$

Nous obtiendrons de cette manière une expression de la forme

$$\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=1}^q B_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i},$$

qui contient les dérivées de  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) jusqu'à l'ordre  $m_i$  au plus, les dérivées de  $Y$  jusqu'à l'ordre  $r$  au plus et qui s'annule pour

$$\left. \begin{array}{l} Y = y_i, \\ X_j = x_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, q) \end{array} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, h).$$

Il en résulte que l'expression obtenue ne diffère que par un facteur du déterminant (83);  $z$  satisfait par suite à une équation de la forme

$$\sum_{i=0}^q \left( A_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z = 0.$$

Comme il n'existe pas de relation de la forme (84),  $\alpha_{0i}$  étant les coefficients de  $X_i^{(m_i)}$  dans le déterminant (83), les  $q$   $X$ -intégrales dans le déterminant (83) ne peuvent être remplacées par un nombre de  $X$ -intégrales moindre de  $q$  (selon la proposition 1). Le déterminant (83) est ainsi l'intégrale générale d'une équation du type (20) d'ordre  $n$ .

Si nous supposons que le coefficient de  $Y^{(r)}$  dans le déterminant (83) ne soit pas nul et qu'il existe  $s$ , et pas plus de  $s$ , relations distinctes de la forme (84), le déterminant (83) est l'intégrale générale d'une équation de la forme

$$\sum_{i=0}^{q-s} \left( A_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z = 0, \quad A_{q-s} = 1.$$

Cela peut être prouvé de la manière suivante. Comme il existe  $s$  — et pas plus de  $s$  — relations distinctes de la forme (84), les  $q$  quantités  $\alpha_{0i}$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) déterminent une équation d'ordre  $q - s$

$$\sum_{i=0}^{q-s} A_i \frac{\partial^i a_0}{\partial y^i} = 0.$$

En différentiant l'équation (83), nous pouvons obtenir

$$\sum_{i=0}^{q-s} A_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i}, \quad \frac{\partial^{q-s} z}{\partial y^{q-s}}, \quad \frac{\partial^{q-s-1} z}{\partial y^{q-s-1}}, \dots, \frac{\partial z}{\partial y}$$

comme des fonctions linéaires et homogènes de

$$X_1, X'_1, \dots, X_1^{(m_1)}, X_2, X'_2, \dots, X_2^{(m_2)}, \dots, X_q, X'_q, \dots, X_q^{(m_q)}, Y, Y', \dots, Y^{(r+q-s)},$$

les coefficients étant des fonctions déterminées de  $x$  et de  $y$ . En éliminant entre les équations obtenues les  $q-s$  quantités  $Y^{(r+i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, q-s$ ), nous obtenons une expression de la forme

$$\sum_{i=0}^{q-s} A_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=1}^q B_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i},$$

qui contient les dérivées de  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) jusqu'à l'ordre  $m_i$  au plus, les dérivées de  $Y$  jusqu'à l'ordre  $r$  au plus et qui s'annule pour

$$\left. \begin{array}{l} Y = y_i \\ X_j = x_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, q) \end{array} \right\} (i = 1, 2, \dots, h).$$

Ainsi l'expression obtenue ne diffère que par un facteur du déterminant (83), et  $z$  satisfait à une équation de la forme

$$\sum_{i=0}^{q-s} \left( A_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z = 0.$$

Comme il n'existe que  $s$  relations distinctes de la forme (84), les  $q$   $X$ -intégrales dans le déterminant (83) ne peuvent être remplacées par un nombre de  $X$ -intégrales moindre de  $q-s$ . Le déterminant (83) est ainsi l'intégrale générale d'une équation de la forme

$$\sum_{i=0}^{q-s} \left( A_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z = 0; \quad A_{q-s} = 1.$$

— La condition nécessaire et suffisante pour que les  $q$   $X$ -intégrales dans le déterminant (83) puissent être remplacées par  $q-s$   $X$ -intégrales est ainsi qu'il existe  $s$  relations distinctes de la forme (84).

Enfin, si nous supposons que le coefficient de  $Y^{(r)}$  dans le déterminant (83) soit nul, il en résulte que  $z$  satisfait à une équation de la forme

$$\frac{\partial z}{\partial y} + B_0 z = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que le déterminant (83) dépende d'une fonction arbitraire de  $y$  est ainsi que le coefficient de  $Y^{(r)}$  ne soit pas nul.



**Proposition 14.** Chaque expression de la forme

$$\begin{vmatrix} X_1 & X'_1 \dots X_1^{(m_1)} & X_2 & X'_2 \dots X_2^{(m_2)} & \dots & X_q & X'_q \dots X_q^{(m_q)} & Y & Y' \dots Y^{(r)} \\ x_{11} & x'_{11} \dots x_{11}^{(m_1)} & x_{12} & x'_{12} \dots x_{12}^{(m_2)} & \dots & x_{1q} & x'_{1q} \dots x_{1q}^{(m_q)} & y_1 & y'_1 \dots y_1^{(r)} \\ x_{21} & x'_{21} \dots x_{21}^{(m_1)} & x_{22} & x'_{22} \dots x_{22}^{(m_2)} & \dots & x_{2q} & x'_{2q} \dots x_{2q}^{(m_q)} & y_2 & y'_2 \dots y_2^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{h1} & x'_{h1} \dots x_{h1}^{(m_1)} & x_{h2} & x'_{h2} \dots x_{h2}^{(m_2)} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} \dots x_{hq}^{(m_q)} & y_h & y'_h \dots y_h^{(r)} \end{vmatrix}$$

$$\left( h = \sum_{i=1}^q m_i + r + q \right)$$

le coefficient de  $Y^{(r)}$  n'étant pas nul et les coefficients de  $X_i^{(m_i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) déterminant une équation d'ordre  $q - s$

$$\sum_{i=0}^{q-s} A_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0,$$

représente l'intégrale générale d'une équation de la forme

$$\sum_{i=0}^{q-s} \left( A_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z = 0; \quad A_{q-s} = 1.$$

Avant de démontrer la réciproque de cette proposition, nous allons examiner sous quelles conditions les  $X$ -intégrales dans le déterminant (83) peuvent être remplacées par des intégrales de rang inférieur à  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_q + 1$  ou l' $Y$ -intégrale est de rang inférieur à  $r + 1$ , puis nous allons aussi examiner de plus près les conditions nécessaires et suffisantes pour que le déterminant (83) dépende d'une fonction arbitraire de  $Y$  et de  $q - s$  fonctions arbitraires de  $x$ .

Supposons qu'existent les  $p$  relations

$$y_k = \sum_{i=p+1}^h a_{ik} y_i \quad (k = 1, 2, \dots, p),$$

les coefficients  $a_{ik}$  étant des constantes. Dans le déterminant (83) nous pourrions remplacer

$$x_{kj} \quad (j = 1, 2, \dots, q), \quad y_k$$

par

$$x_{kj} = \sum_{i=p+1}^h a_{ik} x_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, q), \quad y_k = \sum_{i=p+1}^h a_{ik} y_i;$$

de cette manière toutes les  $y_k$  ( $k = 1, 2, \dots, p$ ) seront remplacées par zéro. Supposons que les substitutions en question aient déjà été faites, ou autrement dit, supposons

$$y_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, p).$$

Nous pouvons toujours supposer  $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_q$ . Supposons

$$x_{1i} = 0 \quad (i = s + 1, s + 2, \dots, q), \quad x_{1s} \neq 0.$$

En effectuant la substitution

$$\left. \begin{aligned} X_j &= \bar{X}_j + \frac{x_{1j}}{x_{1s}} X_s, \\ x_{kj} &= \bar{x}_{kj} + \frac{x_{1j}}{x_{1s}} x_{ks} \end{aligned} \right\} \quad (j = 1, 2, \dots, s-1),$$

$$X_s = x_{1s} \bar{X}_s,$$

$$x_{ks} = \bar{x}_{1s} x_{ks} \quad (k = 1, 2, \dots, h),$$

le déterminant (83) peut s'écrire

$$(x_{1s})^{m_s+1} \begin{vmatrix} \bar{X}_1 & \bar{X}'_1 & \dots & \bar{X}_1^{(m_1)} & \dots & \bar{X}_s & \bar{X}'_s & \dots & \bar{X}_s^{(m_s)} & \dots & X_q & X'_q & \dots & X_q^{(m_q)} & Y & Y' & \dots & Y^{(r)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \bar{x}_{21} & \bar{x}'_{21} & \dots & \bar{x}_{21}^{(m_1)} & \dots & \bar{x}_{2s} & \bar{x}'_{2s} & \dots & \bar{x}_{2s}^{(m_s)} & \dots & x_{2q} & x'_{2q} & \dots & x_{2q}^{(m_q)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{x}_{p+1,1} & \bar{x}'_{p+1,1} & \dots & \bar{x}_{p+1,1}^{(m_1)} & \dots & \bar{x}_{p+1,s} & \bar{x}'_{p+1,s} & \dots & \bar{x}_{p+1,s}^{(m_s)} & \dots & x_{p+1,q} & x'_{p+1,q} & \dots & x_{p+1,q}^{(m_q)} & y_{p+1} & y'_{p+1} & \dots & y_{p+1}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{x}_{h1} & \bar{x}'_{h1} & \dots & \bar{x}_{h1}^{(m_1)} & \dots & \bar{x}_{hs} & \bar{x}'_{hs} & \dots & \bar{x}_{hs}^{(m_s)} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} & \dots & x_{hq}^{(m_q)} & y_h & y'_h & \dots & y_h^{(r)} \end{vmatrix}$$

où le coefficient de  $\bar{X}_s$  est nul, et l'ordre du déterminant peut se diminuer directement d'une unité. De même, nous pouvons continuer, l'ordre du déterminant peut être diminué de  $p$  unités. Ainsi pour chaque relation de la forme

$$\sum_{i=1}^h a_i y_i = 0,$$

les coefficients  $a_i$  étant des constantes, l'ordre du déterminant (83) peut se diminuer d'une unité.

Supposons qu'existent les  $q$  relations

$$x_{1j} = \sum_{i=2}^h a_i x_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, q),$$

les coefficients  $a_i$  étant des constantes. Dans le déterminant (83), nous pourrions remplacer

$$x_{1j} \quad (j = 1, 2, \dots, q), \quad y_1$$

par

$$x_{1j} = \sum_{i=2}^h a_i x_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, q), \quad y_1 = \sum_{i=2}^h a_i y_i;$$

par cette substitution,  $x_{1j}$  ( $j = 1, 2, \dots, q$ ) seront remplacées par zéro. Supposons que la substitution en question ait été déjà faite, ou autrement dit, supposons

$$x_{1j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, q).$$

En effectuant la substitution

$$Y = y_1 \bar{Y}, \quad y_k = y_1 \bar{y}_k \quad (k = 1, 2, \dots, h),$$

le déterminant (83) s'obtiendra sous une telle forme que le coefficient de  $\bar{Y}$  sera nul; l'ordre du déterminant peut se diminuer d'une unité, et le rang de l' $Y$ -intégrale est  $r$  au plus. Lorsqu'existent les  $qs$  relations

$$x_{kj} = \sum_{i=s+1}^h a_{ik} x_{ij} \quad \begin{pmatrix} j = 1, 2, \dots, q \\ k = 1, 2, \dots, s \end{pmatrix},$$

où  $a_{ik}$  sont des constantes, l'ordre du déterminant (83) peut se diminuer, de la même manière, de  $s$  unités, et le rang de l' $Y$ -intégrale est  $r + 1 - s$  au plus.

Nous voyons ainsi qu'il faut, pour que les  $X$ -intégrales dans le déterminant (83) soient de rang  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_q + 1$  et ne puissent être remplacées par des intégrales de rang inférieur et que l' $Y$ -intégrale soit de rang  $r + 1$ , que  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ) soient linéairement indépendantes et qu'une même relation linéaire et homogène de la forme

$$(84') \quad \sum_{i=1}^h a_i x_{ij} = 0,$$

les coefficients  $a_i$  étant des constantes, n'existe pas pour  $j = 1, 2, \dots, q$ .

Nous allons examiner si ces conditions sont suffisantes aussi.

Supposons que, dans le déterminant (83),  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ) soient linéairement indépendantes et qu'une même relation de la forme (84') n'existe pas pour  $j = 1, 2, \dots, q$ . Nous allons montrer que, dans le cas où le coefficient de  $Y^{(r)}$  n'est pas nul, le déterminant (83) ne s'annule que pour

$$X_j = \sum_{i=1}^h b_i x_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, q), \quad Y = \sum_{i=1}^h b_i y_i,$$

les coefficients  $b_i$  étant des constantes. Supposons que le déterminant (83) s'annule pour

$$X_j = f_j(x) \quad (j = 1, 2, \dots, q), \quad Y = g(y).$$

On pourra déterminer des coefficients finis  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ) tels que l'on ait

$$g^{(k)}(y) = \sum_{i=1}^h \lambda_i y_i^{(k)} \quad (k = 0, 1, \dots, r), \quad f_j^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^h \lambda_i x_{ij}^{(k)} \quad \begin{pmatrix} k = 0, 1, \dots, m_j \\ j = 1, 2, \dots, q \end{pmatrix}.$$

En différentiant ces équations par rapport à  $y$ , nous obtiendrons les  $h$  équations

$$\sum_{i=1}^h \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} y_i^{(k)} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, r-1), \quad \sum_{i=1}^h \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} x_{ij}^{(k)} = 0 \quad \begin{pmatrix} k = 0, 1, \dots, m_j \\ j = 1, 2, \dots, q \end{pmatrix}.$$

Comme nous avons supposé que le coefficient de  $Y^{(r)}$  dans le déterminant (83) ne soit pas nul, nous obtiendrons de ces  $h$  équations les  $h$  conditions

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial y} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, h).$$



En différentiant l'équation

$$g(y) = \sum_{i=1}^h \lambda_i y_i$$

par rapport à  $x$ , nous obtiendrons

$$\sum_{i=1}^h \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} y_i = 0.$$

Comme  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ) sont des fonctions de  $x$ , et que  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ) sont linéairement indépendantes, il suit de la condition

$$\sum_{i=1}^h \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} y_i = 0$$

que toutes les  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ) sont des constantes. Nous avons ainsi montré que les fonctions  $f_j(x)$  ( $j = 1, 2, \dots, q$ ) et  $g(y)$  sont de la forme

$$f_j(x) = \sum_{i=1}^h \lambda_i x_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, q), \quad g(y) = \sum_{i=1}^h \lambda_i y_i,$$

où  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ) sont des constantes. La preuve en question est la même que celle que Darboux<sup>1)</sup> a donnée pour le cas où  $q = 1$ . Pour  $q = 1$ , le coefficient de  $Y^{(r)}$  ne peut être nul sans qu'une relation de la forme

$$\sum_{i=1}^h a_i x_i = 0,$$

$a_i$  étant des constantes, ait lieu; mais dans le cas où  $q > 1$ , le coefficient de  $Y^{(r)}$  peut très bien être nul sans qu'une même relation de la forme (84') ait lieu pour  $j = 1, 2, \dots, q$ . La supposition que le coefficient de  $Y^{(r)}$  ne soit pas nul est ainsi essentielle, mais la supposition qu'une même relation de la forme (84') n'ait pas lieu pour  $j = 1, 2, \dots, q$  est superflue.

Supposons que le coefficient de  $Y^{(r)}$  dans le déterminant (83) ne soit pas nul, que  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ) soient linéairement indépendantes et qu'une même relation de la forme (84') n'existe pas pour  $j = 1, 2, \dots, q$ . Nous avons vu que le déterminant ne s'annule que pour

$$X_j = \sum_{i=1}^h b_i x_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, q), \quad Y = \sum_{i=1}^h b_i y_i,$$

$b_i$  étant des constantes. Il suit de la proposition 1 que la condition nécessaire et suffisante pour que les  $q$   $X$ -intégrales dans le déterminant (83) puissent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur à  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_q + 1$  est que le déterminant s'annule pour

<sup>1)</sup> DARBOUX, Leçons. Partie II, pages 51, 52.

$$X_j = f_j(x) \quad (j = 1, 2, \dots, q), \quad Y = 0,$$

où toutes les  $f_j(x)$  ne sont pas nulles. Comme  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) sont linéairement indépendantes, cette condition ne peut être remplie. Et la condition nécessaire et suffisante pour que l' $Y$ -intégrale soit de rang inférieur à  $r + 1$  est que le déterminant s'annule pour

$$X_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, q), \quad Y = g(y) \neq 0.$$

Mais comme il ne peut exister  $q$  relations

$$\sum_{i=1}^h b_i x_{ij} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, q),$$

$b_i$  étant des constantes, cette condition ne peut être remplie.

La condition nécessaire et suffisante pour que les  $X$ -intégrales dans le déterminant (83) soient de rang  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_q + 1$  et ne puissent être remplacées par des intégrales de rang inférieur et que l' $Y$ -intégrale soit de rang  $r + 1$ , est ainsi que le coefficient de  $Y^{(r)}$  ne soit pas nul, que  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ) soient linéairement indépendantes et qu'une même relation de la forme (84') n'existe pas pour  $j = 1, 2, \dots, q$ .

Nous allons maintenant examiner de plus près les conditions pour que le déterminant (83) dépende d'une fonction arbitraire de  $y$  et de  $q$  fonctions arbitraires de  $x$  (voir page 110).

Le coefficient de  $Y^{(r)}$  dans le déterminant (83) est (abstraction faite du signe)

$$(85) \quad \Delta = \begin{vmatrix} x_{11} & x'_{11} & \dots & x_{11}^{(m_1)} & x_{12} & x'_{12} & \dots & x_{12}^{(m_2)} & \dots & x_{1q} & x'_{1q} & \dots & x_{1q}^{(m_q)} & y_1 & y'_1 & \dots & y_1^{(r-1)} \\ x_{21} & x'_{21} & \dots & x_{21}^{(m_1)} & x_{22} & x'_{22} & \dots & x_{22}^{(m_2)} & \dots & x_{2q} & x'_{2q} & \dots & x_{2q}^{(m_q)} & y_2 & y'_2 & \dots & y_2^{(r-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{h1} & x'_{h1} & \dots & x_{h1}^{(m_1)} & x_{h2} & x'_{h2} & \dots & x_{h2}^{(m_2)} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} & \dots & x_{hq}^{(m_q)} & y_h & y'_h & \dots & y_h^{(r-1)} \end{vmatrix}.$$

Si  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ) sont linéairement indépendantes, le déterminant (85) n'est nul que si tous les coefficients de  $y_i^{(r-1)}$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ) dans le déterminant (85) sont nuls, ce qui suit de la preuve donnée pages 113, 114. Il en résulte que, si  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ) sont linéairement indépendantes, le déterminant (85) n'est nul que si tous les coefficients de

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_h \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_h \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(r-1)} & y_2^{(r-1)} & \dots & y_h^{(r-1)} \end{vmatrix} \quad {}^1)$$

<sup>1)</sup> La notation

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1h} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2h} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kh} \end{vmatrix} \quad (h > k)$$

dans le déterminant (85) sont nuls. Si toutes les  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ) ne sont pas linéairement indépendantes, mais que  $p$  relations linéaires et homogènes aient lieu entre  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ),  $p$  des quantités  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ) peuvent être remplacées par zéro dans le déterminant (83) (voir page 111). Supposons que les substitutions en question aient été faites, autrement dit, supposons que l'on ait

$$y_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

et que  $y_i$  ( $i = p+1, p+2, \dots, h$ ) soient linéairement indépendantes. Alors le déterminant (85) n'est nul que si tous les coefficients de  $y_i^{(r-1)}$  ( $i = p+1, p+2, \dots, h$ ) dans le déterminant (85) sont nuls (ce qui peut être prouvé à peu près comme auparavant). De cela nous pouvons encore déduire que le déterminant (85), où  $y_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) et où  $y_i$  ( $i = p+1, p+2, \dots, h$ ) sont linéairement indépendantes, n'est nul que si tous les coefficients de

$$\begin{vmatrix} y_{p+1} & y_{p+2} & \dots & y_h \\ y'_{p+1} & y'_{p+2} & \dots & y'_h \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{p+1}^{(r-1)} & y_{p+2}^{(r-1)} & \dots & y_h^{(r-1)} \end{vmatrix}$$

dans le déterminant (85) sont nuls.

Nous avons trouvé (page 110) que la condition nécessaire et suffisante pour que les  $q$   $X$ -intégrales dans le déterminant (83) puissent être remplacées par  $q-k$   $X$ -intégrales est que  $k$  relations distinctes de la forme (84) existent,  $\alpha_{0i}$  étant les coefficients de  $X_i^{(m_i)}$  dans le déterminant (83). — Lorsque le coefficient de  $Y^{(n)}$  est nul, il existe  $q-1$  relations distinctes du type en question. — Supposons que le coefficient de  $Y^{(n)}$  dans le déterminant (83) ne soit pas nul. Nous allons examiner quelles conditions doivent être remplies pour qu'une relation de la forme (84) existe. La condition nécessaire et suffisante pour que les  $q$   $X$ -intégrales puissent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur à  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_q + 1$  est que  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ) ne soient pas linéairement indépendantes. Supposons que  $p$  — et pas plus de  $p$  — relations linéaires et homogènes distinctes existent entre  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ). Supposons que les substitutions de la page 111 aient été faites, ou autrement dit, supposons que l'on ait

$$y_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

et que  $y_i$  ( $i = p+1, p+2, \dots, h$ ) soient linéairement indépendantes. J'ai déjà montré comment l'ordre du déterminant peut se diminuer de  $p$  unités (voir pages

---

est employée pour désigner tous les déterminants

$$\begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} & \dots & a_{1s} \\ a_{2i} & a_{2j} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{ki} & a_{kj} & \dots & a_{ks} \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, h \\ j = 1, 2, \dots, h \\ \vdots \\ s = 1, 2, \dots, h' \end{pmatrix}.$$



111, 112). Il en résulte que l'existence d'une relation de la forme (84) dépend seulement des valeurs de

$$x_{ij} \quad \left( \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, p \\ j = 1, 2, \dots, q \end{matrix} \right).$$

Supposons  $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_q$ . Si nous supposons que la relation

$$\alpha_{0s} = \sum_{j=1}^{s-1} g_j(x) \alpha_{0j}$$

existe, nous obtiendrons, en appliquant la substitution

$$\begin{aligned} x_{ij} &= \bar{x}_{ij} - g_j(x) x_{is}^{(m_s - m_j)} \\ X_j &= \bar{X}_j - g_j(x) X_s^{(m_s - m_j)} \end{aligned} \quad \left( \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, h \\ j = 1, 2, \dots, s-1 \end{matrix} \right),$$

le déterminant (83) sous une telle forme que le coefficient de  $X_s^{(m_s)}$  sera nul. La condition nécessaire et suffisante en est que tous les déterminants

$$\left\| \begin{array}{cccccc} \bar{x}_{11} \dots \bar{x}_{11}^{(m_1)} & \dots & \bar{x}_{1, s-1} \dots \bar{x}_{1, s-1}^{(m_{s-1})} & x_{1s} \dots x_{1s}^{(m_s-1)} & x_{1, s+1} \dots x_{1, s+1}^{(m_{s+1})} & \dots & x_{1q} \dots x_{1q}^{(m_q)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{p1} \dots x_{p1}^{(m_1)} & \dots & x_{p, s-1} \dots x_{p, s-1}^{(m_{s-1})} & x_{ps} \dots x_{ps}^{(m_s-1)} & x_{p, s+1} \dots x_{p, s+1}^{(m_{s+1})} & \dots & x_{pq} \dots x_{pq}^{(m_q)} \end{array} \right\| \quad 1)$$

c'est-à-dire les déterminants qui se composent des colonnes

$$\bar{x}_{ij}^{(k)} \quad \left( \begin{matrix} k = 0, 1, \dots, m_j \\ j = 1, 2, \dots, s-1 \end{matrix} \right), \quad x_{is}^{(k)} \quad (k = 0, 1, \dots, m_s-1), \quad x_{ij}^{(k)} \quad \left( \begin{matrix} k = 0, 1, \dots, m_j \\ j = s+1, s+2, \dots, q \end{matrix} \right),$$

soient nuls, car  $y_i$  ( $i = p+1, p+2, \dots, h$ ) sont linéairement indépendantes et le coefficient de  $Y^{(p)}$  dans le déterminant (83) est supposé non nul; (la seconde ligne dans les déterminants exclue seulement pour abrégier, ici comme, de règle, plus loin dans les déterminants du même type). Une condition nécessaire en est que tous les déterminants

$$(86) \quad \left\| \begin{array}{cccccc} x_{11} \dots x_{11}^{(m_1-1)} & \dots & x_{1, s-1} \dots x_{1, s-1}^{(m_{s-1}-1)} & x_{1s} \dots x_{1s}^{(m_s-1)} & x_{1, s+1} \dots x_{1, s+1}^{(m_{s+1})} & \dots & x_{1q} \dots x_{1q}^{(m_q)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{p1} \dots x_{p1}^{(m_1-1)} & \dots & x_{p, s-1} \dots x_{p, s-1}^{(m_{s-1}-1)} & x_{ps} \dots x_{ps}^{(m_s-1)} & x_{p, s+1} \dots x_{p, s+1}^{(m_{s+1})} & \dots & x_{pq} \dots x_{pq}^{(m_q)} \end{array} \right\| \quad 1)$$

soient nuls. Si nous supposons que les déterminants (86) soient nuls, sans que tous les déterminants

$$(86') \quad \left\| \begin{array}{cccccc} x_{11} \dots x_{11}^{(m_1-1)} & \dots & x_{1, s-1} \dots x_{1, s-1}^{(m_{s-1}-1)} & x_{1s} \dots x_{1s}^{(m_s)} & \dots & x_{1q} \dots x_{1q}^{(m_q)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{p1} \dots x_{p1}^{(m_1-1)} & \dots & x_{p, s-1} \dots x_{p, s-1}^{(m_{s-1}-1)} & x_{ps} \dots x_{ps}^{(m_s)} & \dots & x_{pq} \dots x_{pq}^{(m_q)} \end{array} \right\| \quad 1)$$

soient nuls, la relation

$$\alpha_{0s} = \sum_{i=1}^{s-1} g_i(x) \alpha_{0i}$$

<sup>1)</sup> C'est seulement pour abrégier que les termes  $x_{ij}'$  non pas été écrits dans ces déterminants.

existe, où

$$\begin{vmatrix} x_{1s}^{(m_s)} & u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1, p-1} \\ x_{2s}^{(m_s)} & u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2, p-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{ps}^{(m_s)} & u_{p1} & u_{p2} & \dots & u_{p, p-1} \end{vmatrix} g_i(x) + \begin{vmatrix} x_{1i}^{(m_i)} & u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1, p-1} \\ x_{2i}^{(m_i)} & u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2, p-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{pi}^{(m_i)} & u_{p1} & u_{p2} & \dots & u_{p, p-1} \end{vmatrix} = 0,$$

les colonnes  $u_{j1}, u_{j2}, \dots, u_{j, p-1}$  étant  $p-1$  des colonnes

$$x_{ji}^{(k)} \quad \left( \begin{matrix} k=0, 1, \dots, m_i-1 \\ i=1, 2, \dots, s \end{matrix} \right), \quad x_{ji}^{(k)} \quad \left( \begin{matrix} k=0, 1, \dots, m_i \\ i=s+1, s+2, \dots, q \end{matrix} \right).$$

Comme tous les déterminants (86) sont nuls, il est indifférent lesquelles des quantités en question seront choisies pour  $u_{j1}, u_{j2}, \dots, u_{j, p-1}$ , pourvu qu'elles soient choisies de manière que le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_{1s}^{(m_s)} & u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1, p-1} \\ x_{2s}^{(m_s)} & u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2, p-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{ps}^{(m_s)} & u_{p1} & u_{p1} & \dots & u_{p, p-1} \end{vmatrix}$$

ne soit pas nul; cela est toujours possible, puisque tous les déterminants (86') ne sont pas nuls. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une relation de la forme (84) existe, est ainsi que tous les déterminants

$$\left\| \begin{array}{cccccc} x_{11} & x'_{11} & \dots & x_{11}^{(m_1-1)} & x_{12} & x'_{12} & \dots & x_{12}^{(m_2-1)} & \dots & x_{1q} & x'_{1q} & \dots & x_{1q}^{(m_q-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{p1} & x'_{p1} & \dots & x_{p1}^{(m_1-1)} & x_{p2} & x'_{p2} & \dots & x_{p2}^{(m_2-1)} & \dots & x_{pq} & x'_{pq} & \dots & x_{pq}^{(m_q-1)} \end{array} \right\|$$

soient nuls; si tous les déterminants (86) sont nuls, sans que tous les déterminants

(86') soient nuls, la relation  $\alpha_{0s} = \sum_{i=1}^{s-1} g_i(x) \alpha_{0i}$  existe, et dans chacun des déterminants

$$\left\| \begin{array}{cccccc} X_1 & X'_1 & \dots & X_1^{(m_1)} & X_2 & X'_2 & \dots & X_2^{(m_2)} & \dots & X_q & X'_q & \dots & X_q^{(m_q)} \\ x_{11} & x'_{11} & \dots & x_{11}^{(m_1)} & x_{12} & x'_{12} & \dots & x_{12}^{(m_2)} & \dots & x_{1q} & x'_{1q} & \dots & x_{1q}^{(m_q)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{p1} & x'_{p1} & \dots & x_{p1}^{(m_1)} & x_{p2} & x'_{p2} & \dots & x_{p2}^{(m_2)} & \dots & x_{pq} & x'_{pq} & \dots & x_{pq}^{(m_q)} \end{array} \right\|$$

la relation  $\bar{\alpha}_{0s} = \sum_{i=1}^{s-1} g_i(x) \bar{\alpha}_{0i}$  existe entre les coefficients de  $X_i^{(m_i)}$ , qui sont désignés par

$\bar{\alpha}_{0i}$ ; aucune relation de la forme  $\alpha_{0t} = \sum_{i=1}^{t-1} f_i(x) \alpha_{0i}$  ne peut exister pour  $t < s$ , mais

bien pour  $t > s$ ; une condition nécessaire en est que tous les déterminants

$$\left\| \begin{array}{cccccc} x_{1s} \dots x_{1s}^{(m_s)} & x_{11} \dots x_{11}^{(m_1-1)} & \dots & x_{1t} \dots x_{1t}^{(m_t-1)} & x_{1, t+1} \dots x_{1, t+1}^{(m_{t+1})} & \dots & x_{1q} \dots x_{1q}^{(m_q)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{ps} \dots x_{ps}^{(m_s)} & x_{p1} \dots x_{p1}^{(m_1-1)} & \dots & x_{pt} \dots x_{pt}^{(m_t-1)} & x_{p, t+1} \dots x_{p, t+1}^{(m_{t+1})} & \dots & x_{pq} \dots x_{pq}^{(m_q)} \end{array} \right\|$$

soient nuls (c'est seulement pour abrégé que les termes  $x'_{ij}$  ont été exclus dans ces derniers déterminants et ce n'est qu'en vue de plus de netteté que l'ordre des termes a été changé). Etc.

Nous avons ainsi trouvé que la condition nécessaire et suffisante pour que le déterminant (83) où  $y_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) et où  $y_i$  ( $i = p + 1, p + 2, \dots, h$ ) sont linéairement indépendantes soit l'intégrale générale d'une équation du type (20) d'ordre  $q + 1$  est que tous les coefficients de

$$\begin{vmatrix} y_{p+1} & y_{p+2} & \dots & y_h \\ y'_{p+1} & y'_{p+2} & \dots & y'_h \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y^{(r-1)}_{p+1} & y^{(r-1)}_{p+2} & \dots & y^{(r-1)}_h \end{vmatrix}$$

dans le déterminant (85) ne soient pas nuls, et que tous les déterminants

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x'_{11} & \dots & x^{(m_1-1)}_{11} & x_{12} & x'_{12} & \dots & x^{(m_2-1)}_{12} & \dots & x_{1q} & x'_{1q} & \dots & x^{(m_q-1)}_{1q} \\ x_{21} & x'_{21} & \dots & x^{(m_1-1)}_{21} & x_{22} & x'_{22} & \dots & x^{(m_2-1)}_{22} & \dots & x_{2q} & x'_{2q} & \dots & x^{(m_q-1)}_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{p1} & x'_{p1} & \dots & x^{(m_1-1)}_{p1} & x_{p2} & x'_{p2} & \dots & x^{(m_2-1)}_{p2} & \dots & x_{pq} & x'_{pq} & \dots & x^{(m_q-1)}_{pq} \end{vmatrix}$$

ne soient pas nuls.

Nous allons maintenant prouver la proposition suivante (la réciproque de la proposition 14). Lorsque l'équation (20) admet une  $Y$ -intégrale de rang  $r + 1$  et  $q$   $X$ -intégrales de rang  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_q + 1$  qui ne peuvent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur, l'intégrale générale de l'équation (20) peut s'écrire

$$(87) \quad z = M \begin{vmatrix} X_1 & X'_1 & \dots & X^{(m_1)}_1 & X_2 & X'_2 & \dots & X^{(m_2)}_2 & \dots & X_q & X'_q & \dots & X^{(m_q)}_q & Y & Y' & \dots & Y^{(r)} \\ x_{11} & x'_{11} & \dots & x^{(m_1)}_{11} & x_{12} & x'_{12} & \dots & x^{(m_2)}_{12} & \dots & x_{1q} & x'_{1q} & \dots & x^{(m_q)}_{1q} & y_1 & y'_1 & \dots & y^{(r)}_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{h1} & x'_{h1} & \dots & x^{(m_1)}_{h1} & x_{h2} & x'_{h2} & \dots & x^{(m_2)}_{h2} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} & \dots & x^{(m_q)}_{hq} & y_h & y'_h & \dots & y^{(r)}_h \end{vmatrix},$$

$$\left( h = \sum_{i=1}^q m_i + r + q \right)$$

où  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ) sont linéairement indépendantes, où une même relation de la forme (84') n'existe pas pour  $j = 1, 2, \dots, q$ , où le coefficient de  $Y^{(r)}$  n'est pas nul et où le facteur non essentiel  $M$  est une fonction déterminée de  $x$  et de  $y$ . Pour l'équation (1), Darboux a démontré la proposition en question. Supposons que la proposition soit vraie pour les équations du type (20) d'ordre  $n - 1$ , nous allons montrer qu'alors elle est valable aussi pour l'équation (20).

Supposons que l'équation (20) admette une  $Y$ -intégrale de rang  $r + 1$  et  $q$   $X$ -intégrales de rang  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_q + 1$  qui ne puissent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur. Supposons  $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_q$ . L'équation (20) peut être ramenée par  $m_1$  transformations ( $t_1$ ), convenablement choisies, à une équation de même type et de même ordre admettant une  $Y$ -intégrale de rang  $r + m_1 + 1$  et  $q$   $X$ -intégrales de rang 1,  $m_2 + 1, \dots, m_q + 1$  qui ne peuvent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur. L'intégrale générale de cette dernière équation est de la forme



$$(88) \quad z_{m_1} = \sum_{i=2}^q (\alpha_{0i} X_i^{(m_i)} + \alpha_{1i} X_i^{(m_i-1)} + \dots + \alpha_{m_i i} X_i) + \\ + \alpha_{01} X_1 + \beta_0 Y^{(r+m_1)} + \beta_1 Y^{(r+m_1-1)} + \dots + \beta_{r+m_1} Y.$$

En appliquant la transformation  $z_{m_1+1} = \alpha_{01} \frac{\partial}{\partial y} \frac{z_{m_1}}{\alpha_{01}}$ , nous obtiendrons une équation d'ordre  $n-1$  admettant une  $Y$ -intégrale de rang  $r+m_1+2$  au plus et  $q-1$   $X$ -intégrales de rang  $m_2+1, m_3+1, \dots, m_q+1$  qui ne peuvent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur. Supposons que l' $Y$ -intégrale soit de rang  $r+m_1+2-s$ . Comme nous avons supposé que la proposition à démontrer soit vraie pour les équations du type (20) d'ordre  $n-1$ , l'intégrale générale  $z_{m_1+1}$  peut s'écrire

$$(89) \quad z_{m_1+1} = M \begin{vmatrix} X_2 & X_2' & \dots & X_2^{(m_2)} & \dots & X_q & X_q' & \dots & X_q^{(m_q)} & \bar{Y} & \bar{Y}' & \dots & \bar{Y}^{(r+m_1+1-s)} \\ x_{12} & x_{12}' & \dots & x_{12}^{(m_2)} & \dots & x_{1q} & x_{1q}' & \dots & x_{1q}^{(m_q)} & \bar{y}_1 & \bar{y}_1' & \dots & \bar{y}_1^{(r+m_1+1-s)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{h-s, 2} & x_{h-s, 2}' & \dots & x_{h-s, 2}^{(m_2)} & \dots & x_{h-s, q} & x_{h-s, q}' & \dots & x_{h-s, q}^{(m_q)} & \bar{y}_{h-s} & \bar{y}_{h-s}' & \dots & \bar{y}_{h-s}^{(r+m_1+1-s)} \end{vmatrix},$$

$$\left( h = \sum_{i=1}^q m_i + r + q \right)$$

où  $\bar{y}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, h-s$ ) sont linéairement indépendantes, où une même relation de la forme

$$\sum_{i=1}^{h-s} a_i x_{ij} = 0,$$

$a_i$  étant des constantes, n'existe pas pour  $j = 2, 3, \dots, q$  et où le coefficient de  $\bar{Y}^{(r+m_1+1-s)}$  n'est pas nul. Écrivons

$$\bar{Y} = \begin{vmatrix} Y & Y' & \dots & Y^{(s)} \\ y_{h-s+1} & y_{h-s+1}' & \dots & y_{h-s+1}^{(s)} \\ y_{h-s+2} & y_{h-s+2}' & \dots & y_{h-s+2}^{(s)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_h & y_h' & \dots & y_h^{(s)} \end{vmatrix}, \quad \bar{y}_i = \begin{vmatrix} y_i & y_i' & \dots & y_i^{(s)} \\ y_{h-s+1} & y_{h-s+1}' & \dots & y_{h-s+1}^{(s)} \\ y_{h-s+2} & y_{h-s+2}' & \dots & y_{h-s+2}^{(s)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_h & y_h' & \dots & y_h^{(s)} \end{vmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, h-s);$$

toutes les  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ) sont linéairement indépendantes. L'intégrale générale  $z_{m_1+1}$  peut s'écrire

$$(89') \quad z_{m_1+1} = \bar{M} \begin{vmatrix} X_2 & X_2' & \dots & X_2^{(m_2)} & \dots & X_q & X_q' & \dots & X_q^{(m_q)} & Y & Y' & \dots & Y^{(r+m_1+1)} \\ x_{12} & x_{12}' & \dots & x_{12}^{(m_2)} & \dots & x_{1q} & x_{1q}' & \dots & x_{1q}^{(m_q)} & y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(r+m_1+1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{h-s, 2} & x_{h-s, 2}' & \dots & x_{h-s, 2}^{(m_2)} & \dots & x_{h-s, q} & x_{h-s, q}' & \dots & x_{h-s, q}^{(m_q)} & y_{h-s} & y_{h-s}' & \dots & y_{h-s}^{(r+m_1+1)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & y_{h-s+1} & y_{h-s+1}' & \dots & y_{h-s+1}^{(r+m_1+1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & y_h & y_h' & \dots & y_h^{(r+m_1+1)} \end{vmatrix},$$

car le déterminant de (89') ne diffère de celui de (89) que par un facteur, fonction de  $y$ , qui n'est pas nul. Les coefficients

$$\alpha_{ij} \quad \left( \begin{matrix} i = 0, 1, \dots, m_j \\ j = 2, 3, \dots, q \end{matrix} \right), \quad \beta_i \quad (i = 0, 1, \dots, r + m_1)$$

et les fonctions

$$y_i \quad (i = h - s + 1, h - s + 2, \dots, h)$$

peuvent être déterminés de telle manière que l'égalité

$$z_{m_1+1} = \alpha_{01} \frac{\partial}{\partial y} \frac{z_{m_1}}{\alpha_{01}},$$

où  $z_{m_1+1}$  est définie par l'équation (89') et  $z_{m_1}$  par l'équation (88), existe pour toutes les formes possibles des fonctions arbitraires  $X_2, X_3, \dots, X_q, Y$ . En substituant, dans l'identité obtenue de cette manière,

$$\left. \begin{matrix} X_j = x_{ij} & (j = 2, 3, \dots, q) \\ Y = y_i \end{matrix} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, h - s)$$

et en intégrant, nous obtiendrons les  $h - s$  équations

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^q (\alpha_{0j} x_{ij}^{(m_j)} + \alpha_{1j} x_{ij}^{(m_j-1)} + \dots + \alpha_{m_j j} x_{ij}) + \beta_0 y_i^{(r+m_1)} + \\ + \beta_1 y_i^{(r+m_1-1)} + \dots + \beta_{r+m_1} y_i + \alpha_{01} x_{i1} = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, h - s); \end{aligned}$$

et de même, en substituant

$$\left. \begin{matrix} X_j = 0 & (j = 2, 3, \dots, q) \\ Y = y_i \end{matrix} \right\} \quad (i = h - s + 1, h - s + 2, \dots, h)$$

et en intégrant, nous aurons les  $s$  équations

$$\beta_0 y_i^{(r+m_1)} + \beta_1 y_i^{(r+m_1-1)} + \dots + \beta_{r+m_1} y_i + \alpha_{01} x_{i1} = 0 \quad (i = h - s + 1, h - s + 2, \dots, h).$$

De ces  $h$  équations il suit que l'intégrale générale  $z_{m_1}$  peut s'écrire

$$(90) \quad z_{m_1} = \bar{M} \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_2' & \dots & X_2^{(m_2)} & \dots & X_q & X_q' & \dots & X_q^{(m_q)} & Y & Y' & \dots & Y^{(r+m_1)} \\ x_{11} & x_{12} & x_{12}' & \dots & x_{12}^{(m_2)} & \dots & x_{1q} & x_{1q}' & \dots & x_{1q}^{(m_q)} & y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(r+m_1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{h-s, 1} & x_{h-s, 2} & x_{h-s, 2}' & \dots & x_{h-s, 2}^{(m_2)} & \dots & x_{h-s, q} & x_{h-s, q}' & \dots & x_{h-s, q}^{(m_q)} & y_{h-s} & y_{h-s}' & \dots & y_{h-s}^{(r+m_1)} \\ x_{h-s+1, 1} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & y_{h-s+1} & y_{h-s+1}' & \dots & y_{h-s+1}^{(r+m_1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{h1} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & y_h & y_h' & \dots & y_h^{(r+m_1)} \end{vmatrix},$$

pourvu que ce déterminant ne soit pas identiquement nul. Le coefficient de  $X_1$  dans le déterminant (90) est toujours le même que le coefficient de  $Y^{(r+m_1+1)}$  dans le déterminant (89') (abstraction faite du signe), et ce coefficient n'est pas nul; par conséquent, le déterminant (90) n'est pas identiquement nul, et l'intégrale générale

(88) peut s'écrire sous la forme (90). L'équation dont l'intégrale générale est  $z_{m_1}$  a été obtenue par l'application de  $m_1$  transformations  $(t_1)$  à l'équation (20); si nous appliquons seulement  $m_1 - 1$  de ces transformations  $(t_1)$  à l'équation (20), nous obtiendrons une équation qui admet une  $Y$ -intégrale de rang  $r + m_1$  et  $q$   $X$ -intégrales de rang 2,  $m_2 + 1, \dots, m_q + 1$  qui ne peuvent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur. L'intégrale générale de la dernière équation est de la forme

$$(91) \quad z_{m_1-1} = \sum_{i=2}^q (\bar{\alpha}_{0i} \bar{X}_i^{(m_i)} + \bar{\alpha}_{1i} \bar{X}_i^{(m_i-1)} + \dots + \bar{\alpha}_{m_i i} \bar{X}_i) + \\ + \bar{\alpha}_{01} \bar{X}_1' + \bar{\alpha}_{11} \bar{X}_1 + \bar{\beta}_0 Y^{(r+m_1-1)} + \bar{\beta}_1 Y^{(r+m_1-2)} + \dots + \bar{\beta}_{r+m_1-1} Y,$$

les coefficients étant des fonctions déterminées de  $x$  et de  $y$ . Nous avons

$$z_{m_1} = \bar{\alpha}_{01} \frac{\partial}{\partial y} \frac{z_{m_1-1}}{\bar{\alpha}_{01}},$$

et nous savons que  $z_{m_1-1}$  peut s'exprimer linéairement à l'aide de  $z_{m_1}$  et de dérivés de  $z_{m_1}$ . L'intégrale générale  $z_{m_1}$  est donnée par l'équation (90), de l'autre côté nous avons

$$z_{m_1} = \bar{\alpha}_{01} \frac{\partial}{\partial y} \frac{z_{m_1-1}}{\bar{\alpha}_{01}},$$

où  $z_{m_1-1}$  est donnée par l'équation (91). Il faut qu'il existe une substitution de la forme

$$X_1 = g_1(x) \bar{X}_1 + \sum_{j=2}^q \sum_{k=0}^{m_j} f_{1jk}(x) \bar{X}_j^{(k)}, \\ X_i = g_i(x) \bar{X}_i + \sum_{j=i+1}^q \sum_{k=0}^{m_j - m_i} f_{ijk}(x) \bar{X}_j^{(k)} \quad (i = 2, 3, \dots, q),$$

où  $g_i(x) \neq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ), qui fait passer, l'une à l'autre, les deux expressions des  $q$   $X$ -intégrales de l'intégrale  $z_{m_1}$ . Si nous effectuons cette substitution, nous obtiendrons l'intégrale générale (90) toujours sous la forme d'un déterminant;

$$X_i \quad (i = 1, 2, \dots, q), \quad x_{li} \quad \begin{pmatrix} l = 1, 2, \dots, h \\ i = 1, 2, \dots, q \end{pmatrix}$$

seront remplacées par  $\bar{X}_i, \bar{x}_{li}$ , où

$$x_{1l} = g_1(x) \bar{x}_{1l} + \sum_{j=2}^q \sum_{k=0}^{m_j} f_{1jk}(x) \bar{x}_{lj}^{(k)} \quad (l = 1, 2, \dots, h), \\ x_{li} = g_i(x) \bar{x}_{li} + \sum_{j=i+1}^q \sum_{k=0}^{m_j - m_i} f_{ijk}(x) \bar{x}_{lj}^{(k)} \quad \begin{pmatrix} l = 1, 2, \dots, h \\ i = 2, 3, \dots, q \end{pmatrix},$$

et le déterminant sera multiplié par un facteur, fonction de  $x$ . Il va de soi qu'une fonction  $f(y)$  peut être choisie telle que, si l'on remplace  $Y$  par  $f(y)Y$  dans l'équation (91), les deux expressions de l' $Y$ -intégrale de l'intégrale  $z_{m_1}$  coïncident; suppo-



sons que cette substitution ait déjà été faite. Ainsi les coefficients  $f_{ijk}(x)$ ,  $g_i(x)$  peuvent être choisis de manière que les relations entre  $z_{m_1-1}$  et  $z_{m_1}$  soient vérifiées pour toutes les formes possibles des fonctions arbitraires, lorsque  $z_{m_1-1}$  est définie par l'équation (91) et  $z_{m_1}$  par l'équation

$$(92) \quad z_{m_1} = \bar{M} \begin{vmatrix} \bar{X}_1 & \bar{X}_2 & \bar{X}'_2 \dots \bar{X}_2^{(m_2)} & \dots & \bar{X}_q & \bar{X}'_q \dots \bar{X}_q^{(m_q)} & Y & Y' \dots Y^{(r+m_1)} \\ \bar{x}_{11} & \bar{x}_{12} & \bar{x}'_{12} \dots \bar{x}_{12}^{(m_2)} & \dots & \bar{x}_{1q} & \bar{x}'_{1q} \dots \bar{x}_{1q}^{(m_q)} & y_1 & y'_1 \dots y_1^{(r+m_1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{x}_{h1} & \bar{x}_{h2} & \bar{x}'_{h2} \dots \bar{x}_{h2}^{(m_2)} & \dots & \bar{x}_{hq} & \bar{x}'_{hq} \dots \bar{x}_{hq}^{(m_q)} & y_h & y'_h \dots y_h^{(r+m_1)} \end{vmatrix}.$$

Il en résulte que l'expression de  $z_{m_1-1}$  donnée par l'équation (91) s'annule pour

$$\left. \begin{array}{l} \bar{X}_j = \bar{x}_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, q) \\ Y = y_i \end{array} \right\} (i = 1, 2, \dots, h);$$

et l'intégrale générale  $z_{m_1-1}$  est, à un facteur près, qui est une fonction déterminée de  $x$  et de  $y$ ,

$$(93) \quad \begin{vmatrix} \bar{X}_1 & \bar{X}'_1 & \bar{X}_2 & \bar{X}'_2 \dots \bar{X}_2^{(m_2)} & \dots & \bar{X}_q & \bar{X}'_q \dots \bar{X}_q^{(m_q)} & Y & Y' \dots Y^{(r+m_1-1)} \\ \bar{x}_{11} & \bar{x}'_{11} & \bar{x}_{12} & \bar{x}'_{12} \dots \bar{x}_{12}^{(m_2)} & \dots & \bar{x}_{1q} & \bar{x}'_{1q} \dots \bar{x}_{1q}^{(m_q)} & y_1 & y'_1 \dots y_1^{(r+m_1-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{x}_{h1} & \bar{x}'_{h1} & \bar{x}_{h2} & \bar{x}'_{h2} \dots \bar{x}_{h2}^{(m_2)} & \dots & \bar{x}_{hq} & \bar{x}'_{hq} \dots \bar{x}_{hq}^{(m_q)} & y_h & y'_h \dots y_h^{(r+m_1-1)} \end{vmatrix},$$

pourvu que ce déterminant ne soit pas identiquement nul. Le coefficient de  $X'_1$  dans le déterminant (93) est toujours le même que le coefficient de  $Y^{(r+m_1)}$  dans le déterminant (92) (abstraction faite du signe), et ce coefficient n'est pas nul; par conséquent, le déterminant (93) n'est pas identiquement nul. En continuant de cette manière, nous pouvons démontrer que l'intégrale générale de l'équation (20) est de la forme (87). Par conséquent, si la proposition en question est vraie pour les équations du type (20) d'ordre  $n-1$ , elle est vraie aussi pour l'équation (20); donc, comme la proposition est valable pour l'équation (1), elle est prouvée pour l'équation (20).

Nous partons maintenant de la supposition que l'intégrale générale de l'équation (20) soit donnée sous la forme (83); le coefficient de  $Y^{(r)}$  dans le déterminant (83) n'est pas nul, et aucune relation de la forme (84),  $\alpha_{0i}$  étant les coefficients de  $X_i^{(m_i)}$ , n'a lieu. Nous allons examiner si l'intégrale générale de l'équation  $(E_i)$  ( $i \geq 0$ ) peut se déduire directement de l'intégrale générale (83).

L'intégrale générale de l'équation  $(E_i)$  ( $i > 0$ ) peut être obtenue directement de l'intégrale générale (83). Supposons  $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_q$ . De même que pour l'équation (1), l'on trouve que l'intégrale générale de l'équation  $(E_i)$  ( $m_1 \geq i > 0$ ) est

$$(94) \quad N \begin{vmatrix} X_1 & X'_1 \dots X_1^{(m_1-i)} & X_2 & X'_2 \dots X_2^{(m_2-i)} & \dots & X_q & X'_q \dots X_q^{(m_q-i)} & Y & Y' \dots Y^{(r+qi)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{h1} & x'_{h1} \dots x_{h1}^{(m_1-i)} & x_{h2} & x'_{h2} \dots x_{h2}^{(m_2-i)} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} \dots x_{hq}^{(m_q-i)} & y_h & y'_h \dots y_h^{(r+qi)} \end{vmatrix}$$

(la seconde ligne dans le déterminant exclue seulement pour abrégé, ici comme, de règle, plus loin dans les déterminants du même type), pourvu que ce déterminant ne soit pas identiquement nul; comme  $(E_i)$  désigne toutes les équations équivalentes, le facteur non essentiel  $N$  peut être choisi arbitrairement. Supposons que  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ) soient linéairement indépendantes. Le déterminant (94) ne peut être identiquement nul, car le coefficient de  $Y^{(r+q)}$  n'est nul qu'à condition que le coefficient de  $Y^{(r)}$  dans le déterminant (83) le soit aussi. De même, l'intégrale générale de l'équation  $(E_i)$  ( $m_2 \geq i > m_1$ ) est

$$N \begin{vmatrix} X_2 & X'_2 & \dots & X_2^{(m_2-i)} & \dots & X_q & X'_q & \dots & X_q^{(m_q-i)} & Y & Y' & \dots & Y^{(t)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{h2} & x'_{h2} & \dots & x_{h2}^{(m_2-i)} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} & \dots & x_{hq}^{(m_q-i)} & y_h & y'_h & \dots & y_h^{(t)} \end{vmatrix},$$

$$(t = r + i(q-1) + m_1 + 1)$$

etc.— Mais supposons que l'on ait  $y_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) et que  $y_i$  ( $i = p+1, p+2, \dots, h$ ) soient linéairement indépendantes. Le déterminant (94) est identiquement nul seulement si tous les déterminants

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x'_{11} & \dots & x_{11}^{(m_1-i)} & x_{12} & x'_{12} & \dots & x_{12}^{(m_2-i)} & \dots & x_{1q} & x'_{1q} & \dots & x_{1q}^{(m_q-i)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{p1} & x'_{p1} & \dots & x_{p1}^{(m_1-i)} & x_{p2} & x'_{p2} & \dots & x_{p2}^{(m_2-i)} & \dots & x_{pq} & x'_{pq} & \dots & x_{pq}^{(m_q-i)} \end{vmatrix}$$

sont nuls, c'est-à-dire seulement si l'équation  $(E)$  admet une  $X$ -intégrale de rang inférieur à  $i$ .

Si nous appliquons la transformation

$$z_1 = \alpha_{0s} \frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{\alpha_{0s}}$$

à l'équation (20), nous obtiendrons une équation dont l'intégrale générale est

$$z_1 = M \begin{vmatrix} X_1 \dots X_1^{(m_1)} & \dots & X_{s-1} \dots X_{s-1}^{(m_{s-1})} & X_s \dots X_s^{(m_s-1)} & X_{s+1} \dots X_{s+1}^{(m_{s+1})} & \dots & X_q \dots X_q^{(m_q)} & Y \dots Y^{(r+1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{h1} \dots x_{h1}^{(m_1)} & \dots & x_{h,s-1} \dots x_{h,s-1}^{(m_{s-1})} & x_{hs} \dots x_{hs}^{(m_s-1)} & x_{h,s+1} \dots x_{h,s+1}^{(m_{s+1})} & \dots & x_{hq} \dots x_{hq}^{(m_q)} & y_h \dots y_h^{(r+1)} \end{vmatrix}^{(1)},$$

où  $M$  désigne toujours une fonction déterminée de  $x$  et de  $y$ . Et chaque expression de la forme

$$N \begin{vmatrix} X_1 & X'_1 & \dots & X_1^{(m_1-\bar{m}_1)} & X_2 & X'_2 & \dots & X_2^{(m_2-\bar{m}_2)} & \dots & X_q & X'_q & \dots & X_q^{(m_q-\bar{m}_q)} & Y & Y' & \dots & Y^{(t)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{h1} & x'_{h1} & \dots & x_{h1}^{(m_1-\bar{m}_1)} & x_{h2} & x'_{h2} & \dots & x_{h2}^{(m_2-\bar{m}_2)} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} & \dots & x_{hq}^{(m_q-\bar{m}_q)} & y_h & y'_h & \dots & y_h^{(t)} \end{vmatrix}$$

$$\left( t = r + \sum_{i=1}^q \bar{m}_i; \quad m_i + 1 \geq \bar{m}_i \geq 0 \right)$$

<sup>1)</sup> C'est seulement par manque de place qu'ici, et parfois plus loin, les termes  $X'_j$ ,  $x'_{ij}$ ,  $Y'$ ,  $y'_i$  n'ont pas été écrits dans les déterminants.

est l'intégrale générale d'une équation, obtenue de l'équation (E) à l'aide de  $\sum_{i=1}^q \bar{m}_i$  transformations ( $t_1$ ); bien entendu, à condition que le déterminant en question ne soit pas identiquement nul.

L'équation (20) peut s'écrire (47)

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \gamma \sum_{i=0}^{q-1} \left( R_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + S_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \right) \right] + Tz = 0, \quad \text{où } R_{q-1} = 1.$$

Si nous appliquons la transformation

$$z_{-1} = \sum_{i=0}^{q-1} \left( R_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + S_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z,$$

où

$$\sum_{i=0}^{q-1} R_i \frac{\partial^i \alpha_{0j}}{\partial y^i} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots, q),$$

nous obtiendrons une équation dont l'intégrale générale est, à un facteur près, qui est une fonction déterminée de  $x$  et de  $y$ ,

$$(95) \quad \begin{vmatrix} X_1 \dots X_1^{(m_1)} \dots X_{s-1} \dots X_{s-1}^{(m_{s-1})} & X_s \dots X_s^{(m_s+1)} & X_{s+1} \dots X_{s+1}^{(m_{s+1})} \dots X_q \dots X_q^{(m_q)} & Y \dots Y^{(r-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{h1} \dots x_{h1}^{(m_1)} \dots x_{h,s-1} \dots x_{h,s-1}^{(m_{s-1})} & x_{hs} \dots x_{hs}^{(m_s+1)} & x_{h,s+1} \dots x_{h,s+1}^{(m_{s+1})} \dots x_{hq} \dots x_{hq}^{(m_q)} & y_h \dots y_h^{(r-1)} \end{vmatrix},$$

pourvu que ce déterminant ne soit pas identiquement nul. Mais il ne peut être identiquement nul, parce que le coefficient de  $X_s^{(m_s+1)}$  est le même que le coefficient de  $Y^{(r)}$  dans le déterminant (83). Il en résulte que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (20) soit de la forme

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \gamma \sum_{i=0}^{q-1} \left( R_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + S_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \right) \right] = 0,$$

où

$$\sum_{i=0}^{q-1} R_i \frac{\partial^i \alpha_{0j}}{\partial y^i} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots, q),$$

est que le coefficient de  $Y^{(r-1)}$  dans le déterminant (95) soit nul.

Supposons que l'équation adjointe ( $E'$ ) n'admette pas de  $X$ -intégrale de rang 1 et appliquons la transformation complètement déterminée ( $T_{-1}$ ) à l'équation ( $E$ ). L'intégrale générale de l'équation ( $E_{-1}$ ) est

$$(96) \quad N \begin{vmatrix} X_1 & X'_1 \dots X_1^{(m_1+1)} & X_2 & X'_2 \dots X_2^{(m_2+1)} \dots X_q & X'_q \dots X_q^{(m_q+1)} & Y & Y' \dots Y^{(r-q)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{h1} & x_{h1} \dots x_{h1}^{(m_1+1)} & x_{h2} & x'_{h2} \dots x_{h2}^{(m_2+1)} \dots x_{hq} & x'_{hq} \dots x_{hq}^{(m_q+1)} & y_h & y'_h \dots y_h^{(r-q)} \end{vmatrix},$$

pourvu que le déterminant obtenu ne soit pas identiquement nul. En considérant la transformation ( $T_{-1}$ ) comme composée de  $q$  transformations ( $t_{-1}$ ), nous trouvons,



à l'aide des résultats de la page précédente, que le coefficient de  $Y^{(r-q)}$  dans le déterminant (96) ne peut être nul, puisque l'équation  $(E)$  n'admet pas de  $X$ -intégrale de rang 1. — Mais si nous supposons que l'équation adjointe  $(E')$  admette une  $X$ -intégrale de rang 1, il en résulte que le coefficient de  $Y^{(r-q)}$  dans le déterminant (96) est nul. La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation  $(E')$  admette une  $X$ -intégrale de rang 1 est ainsi que le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x'_{11} & \dots & x_{11}^{(m_1+1)} & x_{12} & x'_{12} & \dots & x_{12}^{(m_2+1)} & \dots & x_{1q} & x'_{1q} & \dots & x_{1q}^{(m_q+1)} & y_1 & y'_1 & \dots & y_1^{(r-q-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{h1} & x'_{h1} & \dots & x_{h1}^{(m_1+1)} & x_{h2} & x'_{h2} & \dots & x_{h2}^{(m_2+1)} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} & \dots & x_{hq}^{(m_q+1)} & y_h & y'_h & \dots & y_h^{(r-q-1)} \end{vmatrix}$$

soit nul. — De la même manière, nous pouvons montrer que l'intégrale générale de l'équation  $(E_{-i})$  d'ordre  $n$  est

$$(96') \quad N \begin{vmatrix} X_1 & X'_1 & \dots & X_1^{(m_1+i)} & X_2 & X'_2 & \dots & X_2^{(m_2+i)} & \dots & X_q & X'_q & \dots & X_q^{(m_q+i)} & Y & Y' & \dots & Y^{(r-qi)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{h1} & x'_{h1} & \dots & x_{h1}^{(m_1+i)} & x_{h2} & x'_{h2} & \dots & x_{h2}^{(m_2+i)} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} & \dots & x_{hq}^{(m_q+i)} & y_h & y'_h & \dots & y_h^{(r-qi)} \end{vmatrix}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation  $(E')$  n'admette pas une  $X$ -intégrale de rang inférieur à  $i + 1$  est que le coefficient de  $Y^{(r-qi)}$  dans le déterminant (96') ne soit pas nul.

*Proposition 15.* Lorsque l'équation  $(E)$  admet une  $Y$ -intégrale de rang  $r + 1$  et  $q$   $X$ -intégrales de rang  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_q + 1$  qui ne peuvent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur, l'intégrale générale peut s'écrire

$$N \begin{vmatrix} X_1 & X'_1 & \dots & X_1^{(m_1)} & X_2 & X'_2 & \dots & X_2^{(m_2)} & \dots & X_q & X'_q & \dots & X_q^{(m_q)} & Y & Y' & \dots & Y^{(r)} \\ x_{11} & x'_{11} & \dots & x_{11}^{(m_1)} & x_{12} & x'_{12} & \dots & x_{12}^{(m_2)} & \dots & x_{1q} & x'_{1q} & \dots & x_{1q}^{(m_q)} & y_1 & y'_1 & \dots & y_1^{(r)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{h1} & x'_{h1} & \dots & x_{h1}^{(m_1)} & x_{h2} & x'_{h2} & \dots & x_{h2}^{(m_2)} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} & \dots & x_{hq}^{(m_q)} & y_h & y'_h & \dots & y_h^{(r)} \end{vmatrix};$$

$$\left( h = \sum_{i=1}^q m_i + r + q \right)$$

$y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ) sont des fonctions de  $y$  qui sont linéairement indépendantes,  $x_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ;  $j = 1, 2, \dots, q$ ) sont des fonctions de  $x$  entre lesquelles il n'existe pas une même relation de la forme

$$\sum_{i=1}^h a_i x_{ij} = 0,$$

$a_i$  étant des constantes, pour  $j = 1, 2, \dots, q$ , et le coefficient de  $Y^{(r)}$  n'est pas nul;  $(E)$  désignant toutes les équations équivalentes, le facteur non essentiel  $N$  peut être

choisi arbitrairement. Supposons que l'intégrale générale de l'équation ( $E$ ) soit donnée sous la forme considérée,  $y_i$  et  $x_{ij}$  remplissant les conditions ci-dessus nommées. Supposons  $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_q$ . L'intégrale générale de l'équation  $E_i$  ( $m_s \geq i > m_{s-1}$ ) est

$$N \begin{vmatrix} X_s & X'_s \dots X_s^{(m_s-i)} & \dots & X_q & X'_q \dots X_q^{(m_q-i)} & Y & Y' \dots Y^{(r_i)} \\ x_{1s} & x'_{1s} \dots x_{1s}^{(m_s-i)} & \dots & x_{1q} & x'_{1q} \dots x_{1q}^{(m_q-i)} & y_1 & y'_1 \dots y_1^{(r_i)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{hs} & x'_{hs} \dots x_{hs}^{(m_s-i)} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} \dots x_{hq}^{(m_q-i)} & y_h & y'_h \dots y_h^{(r_i)} \end{vmatrix}.$$

$$\left( r_i = r + i(q - s + 1) + \sum_{j=1}^{s-1} (m_j + 1) \right)$$

Et l'intégrale générale de l'équation ( $E_{-i}$ ) d'ordre  $n$  est

$$N \begin{vmatrix} X_1 & X'_1 \dots X_1^{(m_1+i)} & X_2 & X'_2 \dots X_2^{(m_2+i)} & \dots & X_q & X'_q \dots X_q^{(m_q+i)} & Y & Y' \dots Y^{(r-qi)} \\ x_{11} & x'_{11} \dots x_{11}^{(m_1+i)} & x_{12} & x'_{12} \dots x_{12}^{(m_2+i)} & \dots & x_{1q} & x'_{1q} \dots x_{1q}^{(m_q+i)} & y_1 & y'_1 \dots y_1^{(r-qi)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{h1} & x'_{h1} \dots x_{h1}^{(m_1+i)} & x_{h2} & x'_{h2} \dots x_{h2}^{(m_2+i)} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} \dots x_{hq}^{(m_q+i)} & y_h & y'_h \dots y_h^{(r-qi)} \end{vmatrix}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation ( $E'$ ) admette une  $X$ -intégrale de rang inférieur à  $i + 1$  [l'équation ( $E_{-i}$ ) étant ainsi d'ordre inférieur à  $n$ ] est que le coefficient de  $Y^{(r-qi)}$  dans le dernier déterminant soit nul.

Aussi l'intégrale générale de l'équation adjointe (23) peut être déduite directement de l'intégrale générale de l'équation (20), donnée sous la forme (83). Avant de démontrer cette déduction, je vais d'abord prouver quelques thèses de déterminants, dont je me servirai après pour déduire l'intégrale générale de l'équation (20), donnée sous la forme (83).

Écrivons

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} x_{11} & x'_{11} \dots x_{11}^{(n_1)} & x_{12} & x'_{12} \dots x_{12}^{(n_2)} & \dots & x_{1q} & x'_{1q} \dots x_{1q}^{(n_q)} \\ x_{21} & x'_{21} \dots x_{21}^{(n_1)} & x_{22} & x'_{22} \dots x_{22}^{(n_2)} & \dots & x_{2q} & x'_{2q} \dots x_{2q}^{(n_q)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{h1} & x'_{h1} \dots x_{h1}^{(n_1)} & x_{h2} & x'_{h2} \dots x_{h2}^{(n_2)} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} \dots x_{hq}^{(n_q)} \end{vmatrix} \quad \left( h = \sum_{i=1}^q n_i + q \right).$$

Supposons  $\mathfrak{D} \neq 0$ . Écrivons

$$\xi_{ij} = \frac{\partial \log \mathfrak{D}}{\partial x_{ij}^{(n_j)}} \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, h \\ j = 1, 2, \dots, q \end{pmatrix}.$$

Nous avons

$$(97) \quad \left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^h x_{ij}^{(k)} \xi_{il} &= 0 & (k=0, 1, \dots, n_j-1), \\ \sum_{i=1}^h x_{ij}^{(n_j)} \xi_{il} &= 0 & (j \neq l), \quad \sum_{i=1}^h x_{ij}^{(n_j)} \xi_{ij} = 1 \end{aligned} \right\} \begin{pmatrix} j=1, 2, \dots, q \\ l=1, 2, \dots, q \end{pmatrix}.$$

En différentiant nous obtiendrons

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^h x_{ij}^{(k_1)} \xi_{il}^{(k_2)} &= 0 & (k_1 + k_2 = 0, 1, \dots, n_j-1), \\ \sum_{i=1}^h x_{ij}^{(n_j-k)} \xi_{il}^{(k)} &= 0 & (j \neq l), \quad \sum_{i=1}^h x_{ij}^{(n_j-k)} \xi_{ij}^{(k)} = (-1)^k \end{aligned} \right\} \begin{pmatrix} j=1, 2, \dots, q \\ l=1, 2, \dots, q \end{pmatrix}.$$

$$\text{Écrivons } \Delta = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi'_{11} \dots \xi_{11}^{(n_1)} & \xi_{12} & \xi'_{12} \dots \xi_{12}^{(n_2)} & \dots & \xi_{1q} & \xi'_{1q} \dots \xi_{1q}^{(n_q)} \\ \xi_{21} & \xi'_{21} \dots \xi_{21}^{(n_1)} & \xi_{22} & \xi'_{22} \dots \xi_{22}^{(n_2)} & \dots & \xi_{2q} & \xi'_{2q} \dots \xi_{2q}^{(n_q)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_{h1} & \xi'_{h1} \dots \xi_{h1}^{(n_1)} & \xi_{h2} & \xi'_{h2} \dots \xi_{h2}^{(n_2)} & \dots & \xi_{hq} & \xi'_{hq} \dots \xi_{hq}^{(n_q)} \end{vmatrix}.$$

Si non multiplions, nous trouvons  $\Delta \mathfrak{D} = 1$ . Écrivons ensuite

$$\mathfrak{D}_1 = \begin{vmatrix} y_1 & y'_1 \dots y_1^{(h-1)} \\ y_2 & y'_2 \dots y_2^{(h-1)} \\ \vdots & \vdots \\ y_h & y'_h \dots y_h^{(h-1)} \end{vmatrix}, \quad \eta_i = \frac{\partial \log \mathfrak{D}_1}{\partial y_i^{(h-1)}} \quad (i=1, 2, \dots, h);$$

nous sommes partis de la supposition  $\mathfrak{D}_1 \neq 0$ . Nous avons

$$\sum_{i=1}^h y_i^{(k_1)} \eta_i^{(k_2)} = 0 \quad (k_1 + k_2 = 0, 1, \dots, h-2), \quad \sum_{i=1}^h y_i^{(h-k-1)} \eta_i^{(k)} = (-1)^k.$$

Et écrivons

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta'_1 \dots \eta_1^{(h-1)} \\ \eta_2 & \eta'_2 \dots \eta_2^{(h-1)} \\ \vdots & \vdots \\ \eta_h & \eta'_h \dots \eta_h^{(h-1)} \end{vmatrix}.$$

Si nous multiplions, nous trouvons  $\Delta_1 \mathfrak{D}_1 = 1$ .

Si nous multiplions, colonne par colonne, les deux déterminants

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1q} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \dots & \xi_{2q} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{q1} & \xi_{q2} & \dots & \xi_{qq} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \xi_{q+1,1} & \xi_{q+1,2} & \dots & \xi_{q+1,q} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \xi_{q+2,1} & \xi_{q+2,2} & \dots & \xi_{q+2,q} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{h1} & \xi_{h2} & \dots & \xi_{hq} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_{11} & x'_{11} \dots x_{11}^{(n_1)} & x_{12} & x'_{12} \dots x_{12}^{(n_2)} & \dots & x_{1q} & x'_{1q} \dots x_{1q}^{(n_q)} \\ x_{21} & x'_{21} \dots x_{21}^{(n_1)} & x_{22} & x'_{22} \dots x_{22}^{(n_2)} & \dots & x_{2q} & x'_{2q} \dots x_{2q}^{(n_q)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{h1} & x'_{h1} \dots x_{h1}^{(n_1)} & x_{h2} & x'_{h2} \dots x_{h2}^{(n_2)} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} \dots x_{hq}^{(n_q)} \end{vmatrix},$$



nous trouverons

$$\mathfrak{D} \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1q} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \dots & \xi_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{q1} & \xi_{q2} & \dots & \xi_{qq} \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} x_{q+1,1} \dots x_{q+1,1}^{(n_1-1)} & x_{q+1,2} \dots x_{q+1,2}^{(n_2-1)} & \dots & x_{q+1,q} \dots x_{q+1,q}^{(n_q-1)} \\ x_{q+2,1} \dots x_{q+2,1}^{(n_1-1)} & x_{q+2,2} \dots x_{q+2,2}^{(n_2-1)} & \dots & x_{q+2,q} \dots x_{q+2,q}^{(n_q-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{h1} \dots x_{h1}^{(n_1-1)} & x_{h2} \dots x_{h2}^{(n_2-1)} & \dots & x_{hq} \dots x_{hq}^{(n_q-1)} \end{vmatrix}^{1)}$$

(comme le signe est sans importance à ce sujet, je ne l'écris pas). De même, nous aurons

$$\mathfrak{D} \begin{vmatrix} \xi_{11} & \dots & \xi_{1,s-1} & \xi_{1,s+1} & \dots & \xi_{1q} \\ \xi_{21} & \dots & \xi_{2,s-1} & \xi_{2,s+1} & \dots & \xi_{2q} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{q-1,1} & \dots & \xi_{q-1,s-1} & \xi_{q-1,s+1} & \dots & \xi_{q-1,q} \end{vmatrix} =$$

$$= \pm \begin{vmatrix} x_{q1} \dots x_{q1}^{(n_1-1)} & \dots & x_{q,s-1} \dots x_{q,s-1}^{(n_{s-1}-1)} & x_{qs} \dots x_{qs}^{(n_s)} & x_{q,s+1} \dots x_{q,s+1}^{(n_{s+1}-1)} & \dots & x_{qq} \dots x_{qq}^{(n_q-1)} \\ x_{q+1,1} \dots x_{q+1,1}^{(n_1-1)} & \dots & x_{q+1,s-1} \dots x_{q+1,s-1}^{(n_{s-1}-1)} & x_{q+1,s} \dots x_{q+1,s}^{(n_s)} & x_{q+1,s+1} \dots x_{q+1,s+1}^{(n_{s+1}-1)} & \dots & x_{q+1,q} \dots x_{q+1,q}^{(n_q-1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{h1} \dots x_{h1}^{(n_1-1)} & \dots & x_{h,s-1} \dots x_{h,s-1}^{(n_{s-1}-1)} & x_{hs} \dots x_{hs}^{(n_s)} & x_{h,s+1} \dots x_{h,s+1}^{(n_{s+1}-1)} & \dots & x_{hq} \dots x_{hq}^{(n_q-1)} \end{vmatrix}.$$

Nous avons ensuite

$$\mathfrak{D}_1 \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta'_1 & \dots & \eta_1^{(k-1)} \\ \eta_2 & \eta'_2 & \dots & \eta_2^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \eta_k & \eta'_k & \dots & \eta_k^{(k-1)} \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} y_{k+1} & y'_{k+1} & \dots & y_{k+1}^{(h-k-1)} \\ y_{k+2} & y'_{k+2} & \dots & y_{k+2}^{(h-k-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_h & y'_h & \dots & y_h^{(h-k-1)} \end{vmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, h-1).$$

Il en résulte

$$\mathfrak{D} \mathfrak{D}_1 \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1q} & \eta_1 & \dots & \eta_1^{(h-q-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{h1} & \xi_{h2} & \dots & \xi_{hq} & \eta_h & \dots & \eta_h^{(h-q-1)} \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} x_{11} \dots x_{11}^{(n_1-1)} & x_{12} \dots x_{12}^{(n_2-1)} & \dots & x_{1q} \dots x_{1q}^{(n_q-1)} & y_1 & \dots & y_1^{(q-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{h1} \dots x_{h1}^{(n_1-1)} & x_{h2} \dots x_{h2}^{(n_2-1)} & \dots & x_{hq} \dots x_{hq}^{(n_q-1)} & y_h & \dots & y_h^{(q-1)} \end{vmatrix},$$

$$\mathfrak{D} \mathfrak{D}_1 \begin{vmatrix} \xi_{11} & \dots & \xi_{1,s-1} & \xi_{1,s+1} & \dots & \xi_{1q} & \eta_1 & \dots & \eta_1^{(h-q)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{h1} & \dots & \xi_{h,s-1} & \xi_{h,s+1} & \dots & \xi_{hq} & \eta_h & \dots & \eta_h^{(h-q)} \end{vmatrix} =$$

$$= \pm \begin{vmatrix} x_{11} \dots x_{11}^{(n_1-1)} & \dots & x_{1,s-1} \dots x_{1,s-1}^{(n_{s-1}-1)} & x_{1,s} \dots x_{1,s}^{(n_s)} & x_{1,s+1} \dots x_{1,s+1}^{(n_{s+1}-1)} & \dots & x_{1q} \dots x_{1q}^{(n_q-1)} & y_1 & \dots & y_1^{(q-2)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{h1} \dots x_{h1}^{(n_1-1)} & \dots & x_{h,s-1} \dots x_{h,s-1}^{(n_{s-1}-1)} & x_{hs} \dots x_{hs}^{(n_s)} & x_{h,s+1} \dots x_{h,s+1}^{(n_{s+1}-1)} & \dots & x_{hq} \dots x_{hq}^{(n_q-1)} & y_h & \dots & y_h^{(q-2)} \end{vmatrix};$$

pour abréger, je n'écris pas, de règle, la deuxième ligne dans les déterminants.

<sup>1)</sup> C'est seulement pour abréger qu'ici les termes  $x'_{ij}$  n'ont pas été écrits dans le déterminant, comme c'est parfois plus loin le cas pour les termes  $\eta'_i$ ,  $y'_i$ ,  $\xi'_{ij}$ .

Maintenant nous allons chercher la condition pour que l'on ait

$$\mathfrak{D} \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi'_{11} & \dots & \xi_{11}^{(r_1-1)} & \xi_{12} & \xi'_{12} & \dots & \xi_{12}^{(r_2-1)} & \dots & \xi_{1q} & \xi'_{1q} & \dots & \xi_{1q}^{(r_q-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{r1} & \xi'_{r1} & \dots & \xi_{r1}^{(r_1-1)} & \xi_{r2} & \xi'_{r2} & \dots & \xi_{r2}^{(r_2-1)} & \dots & \xi_{rq} & \xi'_{rq} & \dots & \xi_{rq}^{(r_q-1)} \end{vmatrix} =$$

$$= \pm \begin{vmatrix} x_{r+1,1} & x'_{r+1,1} & \dots & x_{r+1,1}^{(m_1)} & x_{r+1,2} & x'_{r+1,2} & \dots & x_{r+1,2}^{(m_2)} & \dots & x_{r+1,q} & x'_{r+1,q} & \dots & x_{r+1,q}^{(m_q)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{h1} & x'_{h1} & \dots & x_{h1}^{(m_1)} & x_{h2} & x'_{h2} & \dots & x_{h2}^{(m_2)} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} & \dots & x_{hq}^{(m_q)} \end{vmatrix},$$

où  $n_i = m_i + r_i$ ,  $\sum_{i=1}^q r_i = r$ . En faisant la multiplication dans le premier membre, colonne par colonne, nous trouverons qu'une condition suffisante pour que cette égalité ait lieu est

$$\sum_{i=1}^h x_{ij}^{(k_i)} \xi_{il}^{(k_l)} = 0 \quad \left( \begin{array}{l} k_1 + k_2 = 0, 1, \dots, m_j + r_l - 1 \\ j = 1, 2, \dots, q; \quad l = 1, 2, \dots, q \end{array} \right).$$

Ces conditions peuvent s'écrire

$$(98) \quad \sum_{i=1}^h x_{ij}^{(k)} \xi_{il} = 0 \quad \left( \begin{array}{l} k = 0, 1, \dots, m_j + r_l - 1 \\ j = 1, 2, \dots, q; \quad l = 1, 2, \dots, q \end{array} \right).$$

Écrivons  $\sum_{i=1}^q m_i = m$ . Dans le cas où les conditions (98) sont remplies, nous aurons ainsi

$$(99) \quad \mathfrak{D}\mathfrak{D}_1\mathfrak{B} = \pm \mathfrak{A},$$

où

$$\mathfrak{B} = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi'_{11} & \dots & \xi_{11}^{(r_1-1)} & \xi_{12} & \xi'_{12} & \dots & \xi_{12}^{(r_2-1)} & \dots & \xi_{1q} & \xi'_{1q} & \dots & \xi_{1q}^{(r_q-1)} & \eta_1 & \eta'_1 & \dots & \eta_1^{(m+q-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{h1} & \xi'_{h1} & \dots & \xi_{h1}^{(r_1-1)} & \xi_{h2} & \xi'_{h2} & \dots & \xi_{h2}^{(r_2-1)} & \dots & \xi_{hq} & \xi'_{hq} & \dots & \xi_{hq}^{(r_q-1)} & \eta_h & \eta'_h & \dots & \eta_h^{(m+q-1)} \end{vmatrix}$$

et où  $\mathfrak{A}$  est défini par l'équation (85); l'égalité obtenue a lieu aussi dans le cas où la colonne  $\xi_{ij}$  manque, c'est-à-dire, si  $r_j = 0$ ; de même l'égalité a lieu dans le cas où  $m_j = -1$ , c'est-à-dire, si la colonne  $x_{ij}$  manque.

Écrivons

$$(100) \quad u = \begin{vmatrix} X_1 & X'_1 & \dots & X_1^{(r_1)} & X_2 & X'_2 & \dots & X_2^{(r_2)} & \dots & X_q & X'_q & \dots & X_q^{(r_q)} & Y & Y' & \dots & Y^{(m)} \\ \xi_{11} & \xi'_{11} & \dots & \xi_{11}^{(r_1)} & \xi_{12} & \xi'_{12} & \dots & \xi_{12}^{(r_2)} & \dots & \xi_{1q} & \xi'_{1q} & \dots & \xi_{1q}^{(r_q)} & \eta_1 & \eta'_1 & \dots & \eta_1^{(m)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{h1} & \xi'_{h1} & \dots & \xi_{h1}^{(r_1)} & \xi_{h2} & \xi'_{h2} & \dots & \xi_{h2}^{(r_2)} & \dots & \xi_{hq} & \xi'_{hq} & \dots & \xi_{hq}^{(r_q)} & \eta_h & \eta'_h & \dots & \eta_h^{(m)} \end{vmatrix}$$





Les coefficients de  $X_s^{(r_s)}$  dans le déterminants (100) sont désignés par  $\bar{\gamma}_{0s}$  ( $s = 1, 2, \dots, q$ ) et le coefficient de  $Y^{(m)}$  par  $\mathfrak{B}_1$ . Nous allons ainsi montrer que, dans le cas où les conditions (98) sont remplies, les fonctions  $\gamma_{0s}$  ( $s = 1, 2, \dots, q$ ), multipliées par  $\mathfrak{A}$ , et les fonctions  $\bar{\gamma}_{0s}$  ( $s = 1, 2, \dots, q$ ), divisées par  $\mathfrak{B}_1$ , considérées comme fonctions de  $y$ , déterminent une même équation différentielle linéaire.

Supposons que les relations (98) aient lieu. De même que nous avons obtenu l'égalité (99), nous aurons aussi

$$\mathfrak{D} \mathfrak{D}_1 \mathfrak{B}_1 = \pm \mathfrak{A}_1.$$

Supposons pour un moment  $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_q$ ; nous pouvons, sans diminuer la généralité, faire cette supposition, puisque nous n'avons pas supposé ici  $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_q$ . Écrivons

$$f_j(x) = (-1)^{r_1-1} \sum_{i=1}^h x_{i1}^{(m_1)} \xi_{ij}^{(r_j)} \quad (j = 2, 3, \dots, q).$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} \begin{vmatrix} \xi_{11} \dots \xi_{11}^{(r_1-1)} & \xi_{12} \dots \xi_{12}^{(r_2-1)} & \xi_{12}^{(r_2)} + f_2(x) \xi_{11}^{(r_1)} & \xi_{13} \dots \xi_{13}^{(r_3-1)} & \xi_{13}^{(r_3)} + f_3(x) \xi_{11}^{(r_1)} & \dots & \xi_{1q} \dots \xi_{1q}^{(r_q-1)} & \xi_{1q}^{(r_q)} + f_q(x) \xi_{11}^{(r_1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \xi_{t1} \dots \xi_{t2}^{(r_1-1)} & \xi_{t2} \dots \xi_{t2}^{(r_2-1)} & \xi_{t2}^{(r_2)} + f_2(x) \xi_{t1}^{(r_1)} & \xi_{t3} \dots \xi_{t3}^{(r_3-1)} & \xi_{t3}^{(r_3)} + f_3(x) \xi_{t1}^{(r_1)} & \dots & \xi_{tq} \dots \xi_{tq}^{(r_q-1)} & \xi_{tq}^{(r_q)} + f_q(x) \xi_{t1}^{(r_1)} \end{vmatrix} = \\ = \pm \begin{vmatrix} x_{t+1, 1} \dots x_{t+1, 1}^{(m_1)} & x_{t+1, 2} \dots x_{t+1, 2}^{(m_2-1)} & x_{t+1, 3} \dots x_{t+1, 3}^{(m_3-1)} & \dots & x_{t+1, q} \dots x_{t+1, q}^{(m_q-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{h1} \dots x_{h1}^{(m_1)} & x_{h2} \dots x_{h2}^{(m_2-1)} & x_{h3} \dots x_{h3}^{(m_3-1)} & \dots & x_{hq} \dots x_{hq}^{(m_q-1)} \end{vmatrix}, \\ \left( t = \sum_{i=1}^q r_i + q - 1 \right) \end{aligned}$$

ce qui peut être vérifié, en effectuant la multiplication, colonne par colonne, et en tenant compte des relations

$$\sum_{i=1}^h x_{i1}^{(m_1)} (\xi_{ij}^{(r_j)} + f_j(x) \xi_{i1}^{(r_1)}) = 0 \quad (j = 2, 3, \dots, q).$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} \mathfrak{D}_1 \begin{vmatrix} \xi_{11} \dots \xi_{11}^{(r_1-1)} & \xi_{12} \dots \xi_{12}^{(r_2-1)} & \xi_{12}^{(r_2)} + f_2(x) \xi_{11}^{(r_1)} & \dots & \xi_{1q} \dots \xi_{1q}^{(r_q-1)} & \xi_{1q}^{(r_q)} + f_q(x) \xi_{11}^{(r_1)} & \eta_1 \dots \eta_1^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_{h1} \dots \xi_{h1}^{(r_1-1)} & \xi_{h2} \dots \xi_{h2}^{(r_2-1)} & \xi_{h2}^{(r_2)} + f_2(x) \xi_{h1}^{(r_1)} & \dots & \xi_{hq} \dots \xi_{hq}^{(r_q-1)} & \xi_{hq}^{(r_q)} + f_q(x) \xi_{h1}^{(r_1)} & \eta_h \dots \eta_h^{(m)} \end{vmatrix} = \\ = \pm \begin{vmatrix} x_{11} \dots x_{11}^{(m_1)} & x_{12} \dots x_{12}^{(m_2-1)} & \dots & x_{1q} \dots x_{1q}^{(m_q-1)} & y_1 \dots y_1^{(r+q-2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{h1} \dots x_{h1}^{(m_1)} & x_{h2} \dots x_{h2}^{(m_2-1)} & \dots & x_{hq} \dots x_{hq}^{(m_q-1)} & y_h \dots y_h^{(r+q-2)} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Nous avons ainsi une relation de la forme

$$\frac{1}{\mathfrak{A} \mathfrak{B}_1} (\pm \bar{\gamma}_{01} \pm f_2(x) \bar{\gamma}_{02} \pm \dots \pm f_q(x) \bar{\gamma}_{0q}) = \gamma_{01}.$$

Si nous écrivons

$$g_j(x) = (-1)^{r_2-1} \sum_{i=1}^h x_{i2}^{(m_2)} \xi_{ij}^{(r_j)}, \quad (j = 3, 4, \dots, q),$$

nous obtiendrons de la même manière une relation de la forme

$$\frac{1}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1} (\pm \bar{\gamma}_{02} \pm g_3(x) \bar{\gamma}_{03} \pm \dots \pm g_q(x) \bar{\gamma}_{0q}) = \gamma_{02}.$$

De même nous pourrions continuer; nous pourrions déterminer des fonctions  $f_{ij}(x)$   $\left( \begin{smallmatrix} i=j+1, j+2, \dots, q \\ j=1, 2, \dots, q \end{smallmatrix} \right)$  d'une telle manière que nous ayons

$$\gamma_{0j} = \frac{1}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1} \left( \pm \bar{\gamma}_{0j} + \sum_{i=j+1}^q f_{ij}(x) \bar{\gamma}_{0i} \right) \quad (j = 1, 2, \dots, q).$$

Nous avons ainsi trouvé que, dans le cas où les relations (98) sont remplies, les fonctions  $\alpha_{0s}$  ( $s = 1, 2, \dots, q$ ), divisées par  $\mathfrak{A}$ , et les fonctions  $\bar{\gamma}_{0s}$  ( $s = 1, 2, \dots, q$ ), divisées par  $\mathfrak{B}_1$ , considérées comme fonctions de  $y$ , nous donnent deux équations différentielles linéaires, qui sont adjointes.

Supposons d'abord

$$r_1 = r_2 = \dots = r_q = 0,$$

et ainsi

$$r = 0.$$

Dans ce cas, le déterminant (83), divisé par  $\mathfrak{A}$ , est l'intégrale générale d'une équation

$$\sum_{i=0}^q \bar{A}_i \frac{\partial^{i+1} \bar{z}}{\partial x \partial y^i} = 0 \quad (\bar{A}_q = 1);$$

et le déterminant (100), divisé par  $\mathfrak{B}_1$ , est l'intégrale générale d'une équation

$$\frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=0}^q \bar{C}_i \frac{\partial^i \bar{u}}{\partial y^i} = 0 \quad (\bar{C}_q = 1).$$

Comme  $\alpha_{0s}$  ( $s = 1, 2, \dots, q$ ), divisées par  $\mathfrak{A}$ , sont  $q$  intégrales distinctes de l'équation

$$\sum_{i=0}^q \bar{A}_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0$$

et que  $\bar{\gamma}_{0s}$  ( $s = 1, 2, \dots, q$ ), divisées par  $\mathfrak{B}_1$ , sont  $q$  intégrales distinctes de l'équation

$$\sum_{i=0}^q \bar{C}_i \frac{\partial^i \gamma_0}{\partial y^i} = 0,$$

il en suit que les deux équations

$$\sum_{i=0}^q \bar{A}_i \frac{\partial^{i+1} \bar{z}}{\partial x \partial y^i} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=0}^q \bar{C}_i \frac{\partial^i \bar{u}}{\partial y^i} = 0$$

sont adjointes, puisque les conditions (98) sont remplies.

*Proposition 16.* Si l'intégrale générale de l'équation (E) est

$$z = N \begin{vmatrix} X_1 & X'_1 \dots X_1^{(m_1)} & X_2 & X'_2 \dots X_2^{(m_2)} & \dots & X_q & X'_q \dots X_q^{(m_q)} & Y \\ x_{11} & x'_{11} \dots x_{11}^{(m_1)} & x_{12} & x'_{12} \dots x_{12}^{(m_2)} & \dots & x_{1q} & x'_{1q} \dots x_{1q}^{(m_q)} & y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{h1} & x'_{h1} \dots x_{h1}^{(m_1)} & x_{h2} & x'_{h2} \dots x_{h2}^{(m_2)} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} \dots x_{hq}^{(m_q)} & y_h \end{vmatrix},$$

$$\left( h = \sum_{i=1}^q m_i + q \right)$$

où  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ) sont linéairement indépendantes, l'intégrale générale de l'équation (E') est

$$u = N \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \dots X_q & Y & Y' \dots Y^{(m)} \\ \xi_{11} & \xi_{12} \dots \xi_{1q} & \eta_1 & \eta'_1 \dots \eta_1^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_{h1} & \xi_{h2} \dots \xi_{hq} & \eta_h & \eta'_h \dots \eta_h^{(m)} \end{vmatrix} \quad (m = \sum_{i=1}^q m_i),$$

où

$$\eta_i = \frac{\partial \log \mathfrak{D}_1}{\partial y_i^{(h-1)}} \quad (i = 1, 2, \dots, h), \quad \mathfrak{D}_1 = \begin{vmatrix} y_1 & y'_1 \dots y_1^{(h-1)} \\ y_2 & y'_2 \dots y_2^{(h-1)} \\ \vdots & \vdots \\ y_h & y'_h \dots y_h^{(h-1)} \end{vmatrix},$$

$$\xi_{ij} = \frac{\partial \log \mathfrak{D}}{\partial x_{ij}^{(m_j)}} \quad \left( \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, h \\ j = 1, 2, \dots, q \end{matrix} \right),$$

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} x_{11} & x'_{11} \dots x_{11}^{(m_1)} & x_{12} & x'_{12} \dots x_{12}^{(m_2)} & \dots & x_{1q} & x'_{1q} \dots x_{1q}^{(m_q)} \\ x_{21} & x'_{21} \dots x_{21}^{(m_1)} & x_{22} & x'_{22} \dots x_{22}^{(m_2)} & \dots & x_{2q} & x'_{2q} \dots x_{2q}^{(m_q)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{h1} & x'_{h1} \dots x_{h1}^{(m_1)} & x_{h2} & x'_{h2} \dots x_{h2}^{(m_2)} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} \dots x_{hq}^{(m_q)} \end{vmatrix};$$

(E) et (E') désignant toutes les équations équivalentes, le facteur non essentiel  $N$  peut être choisi arbitrairement.

Si l' $Y$ -intégrale de l'équation (20) est de rang supérieur à 1, il n'est pas aussi simple de déduire l'intégrale générale de l'équation adjointe (23) de l'intégrale générale de l'équation (20), donnée sous la forme (83). Lorsque l'équation (20) admet une  $Y$ -intégrale de rang  $r + 1$  et  $q$   $X$ -intégrales de rang  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_q + 1$  qui ne peuvent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur, l'équation adjointe (23) admet (selon la proposition 10) une  $Y$ -intégrale de rang  $\sum_{i=1}^q m_i + 1$  et  $q$   $X$ -intégrales, et si ces  $X$ -intégrales sont écrites sous une telle forme



qu'elles ne puissent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur, la somme de leur rang est  $r + q$ . Pour déduire l'intégrale générale de l'équation (23) de l'intégrale générale de l'équation (20) donnée sous la forme (83), il nous faut savoir d'abord le rang des  $X$ -intégrales de l'équation (23) — il ne suffit pas de savoir que la somme de leur rang est  $r + q$ .

Supposons que, dans le déterminant (83),  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ) soient linéairement indépendantes et qu'il n'existe pas une même relation de la forme (84') pour  $j = 1, 2, \dots, q$ . Et supposons  $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_q$ .

Nous avons déjà vu (page 126) que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation ( $E'$ ) admette une  $X$ -intégrale de rang inférieur à  $i + 1$  est que le coefficient de  $Y^{(r-q)}$  dans le déterminant (96') soit nul. Pour abréger, désignons les déterminants

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{h1} \\ x'_{11} & x'_{21} & \dots & x'_{h1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{11}^{(m_1+i)} & x_{21}^{(m_1+i)} & \dots & x_{h1}^{(m_1+i)} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{h2} \\ x'_{12} & x'_{22} & \dots & x'_{h2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{12}^{(m_2+j)} & x_{22}^{(m_2+j)} & \dots & x_{h2}^{(m_2+j)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{1q} & x_{2q} & \dots & x_{hq} \\ x'_{1q} & x'_{2q} & \dots & x'_{hq} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{1q}^{(m_q+k)} & x_{2q}^{(m_q+k)} & \dots & x_{hq}^{(m_q+k)} \end{vmatrix}$$

par

$$\mathfrak{D} [m_1 + i, m_2 + j, \dots, m_q + k].$$

La condition nécessaire et suffisante pour que le coefficient de  $Y^{(r-q)}$  dans le déterminant (96') soit nul est que tous les déterminants

$$\mathfrak{D} [m_1 + i, m_2 + i, \dots, m_q + i],$$

qui sont d'ordre  $\sum_{i=1}^q m_i + q(i + 1)$ , soient nuls, puisque  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ) sont linéairement indépendantes. La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (23) n'admette pas de  $X$ -intégrale de rang inférieur à  $p_1 + 1$  est ainsi que tous les déterminants

$$\mathfrak{D} [m_1 + p_1, m_2 + p_1, \dots, m_q + p_1]$$

ne soient pas nuls. Supposons que tous les déterminants

$$(101) \quad \mathfrak{D} [m_1 + p_1, \dots, m_{s_1-1} + p_1, m_{s_1} + p_1 + 1, \dots, m_q + p_1 + 1]$$

soient nuls, sans que tous les déterminants

$$(101') \quad \mathfrak{D} [m_1 + p_1, \dots, m_{s_1} + p_1, m_{s_1+1} + p_1 + 1, \dots, m_q + p_1 + 1]$$

soient nuls. Cette hypothèse exprime que  $h_j(x)$  ( $j = s_1 + 1, s_1 + 2, \dots, q$ ) peuvent être choisies d'une telle manière que tous les déterminants qui s'obtiennent en remplaçant, dans les déterminants

$$\mathfrak{D} [m_1 + p_1, \dots, m_{s_1-1} + p_1, m_{s_1} + p_1 + 1, m_{s_1+1} + p_1, \dots, m_q + p_1],$$

$x_{is_1}$  par  $\bar{x}_{is_1}$ , où

$$\bar{x}_{is_1} = x_{is_1} + \sum_{j=s_1+1}^q h_j(x) x_{ij}^{(m_j-m_{s_1})} \quad (i = 1, 2, \dots, h),$$

soient nuls. Nous pouvons en déduire que l'équation (23) admet une  $X$ -intégrale de rang  $p_1 + 1$  qui correspond à

$$\gamma_{0s_1} + \sum_{j=s_1+1}^q h_j(x) \gamma_{0j};$$

on obtient ce résultat en appliquant la substitution

$$\bar{X}_{s_1} = X_{s_1} + \sum_{j=s_1+1}^q h_j(x) X_j^{(m_j-m_{s_1})}$$

et en tenant compte du résultat page 125. Comme tous les déterminants

$$\mathfrak{D} [m_1 + p_1, m_2 + p_1, \dots, m_q + p_1]$$

ne sont pas nuls, l'équation (23) ne peut admettre de  $X$ -intégrale de rang inférieur à  $p_1 + 1$ . L'intégrale générale de l'équation ( $E_{-p_1}$ ) est

$$N \begin{vmatrix} X_1 & X'_1 & \dots & X_1^{(m_1+p_1)} & X_2 & X'_2 & \dots & X_2^{(m_2+p_1)} & \dots & X_q & X'_q & \dots & X_q^{(m_q+p_1)} & Y & Y' & \dots & Y^{(r-p_1q)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{h1} & x'_{h1} & \dots & x_{h1}^{(m_1+p_1)} & x_{h2} & x'_{h2} & \dots & x_{h2}^{(m_2+p_1)} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} & \dots & x_{hq}^{(m_q+p_1)} & y_h & y'_h & \dots & y_h^{(r-p_1q)} \end{vmatrix}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation adjointe ( $E'_{p_1}$ ), outre la  $X$ -intégrale de rang 1, n'admette pas de  $X$ -intégrale de rang inférieur à  $i + 1$ , est que tous les déterminants

$$\mathfrak{D} [m_{s_1} + p_1, m_1 + p_1 + i, \dots, m_q + p_1 + i]$$

ne soient pas nuls (ce n'est qu'en vue de plus de netteté que l'ordre des termes a été changé dans les déterminants). Supposons que tous les déterminants

$$(102) \quad \mathfrak{D} [m_{s_1} + p_1, m_1 + p_2, \dots, m_{s_2-1} + p_2, m_{s_2} + p_2 + 1, \dots, m_q + p_2 + 1]$$

soient nuls, sans que tous les déterminants

$$(102') \quad \mathfrak{D} [m_{s_1} + p_1, m_1 + p_2, \dots, m_{s_2} + p_2, m_{s_2+1} + p_2 + 1, \dots, m_q + p_2 + 1]$$

soient nuls; cette hypothèse exprime que  $g_j(x)$  ( $j = s_2 + 1, s_2 + 2, \dots, q$ ) peuvent

être choisies d'une telle manière que tous les déterminants qui s'obtiennent en remplaçant, dans les déterminants

$$\mathfrak{D} [m_{s_1} + p_1, m_1 + p_2, \dots, m_{s_2-1} + p_2, m_{s_2} + p_2 + 1, m_{s_2+1} + p_2, \dots, m_q + p_2],$$

$x_{is_2}$  par

$$x_{is_2} + \sum_{j=s_2+1}^q g_j(x) x_{ij}^{(m_j - m_{s_2})} \quad (i = 1, 2, \dots, h)$$

soient nuls, et par suite l'équation (23) admet une  $X$ -intégrale de rang  $p_2 + 1$  qui correspond à

$$\gamma_{0s_2} + \sum_{j=s_2+1}^q g_j(x) \gamma_{0j}.$$

Nous pourrions continuer de la même manière. Lorsque l'équation (23), outre les  $X$ -intégrales de rang  $p_1 + 1, p_2 + 1$  correspondant à

$$\gamma_{0s_1} + \sum_{j=s_1+1}^q h_j(x) \gamma_{0j}, \quad \gamma_{0s_2} + \sum_{j=s_2+1}^q g_j(x) \gamma_{0j},$$

admet une  $X$ -intégrale de rang  $p_3 + 1$ , tous les déterminants

$$\mathfrak{D} [m_{s_1} + p_1, m_{s_2} + p_2, m_1 + p_3 + 1, \dots, m_q + p_3 + 1]$$

sont nuls etc. — Si nous continuons de cette manière, nous obtiendrons à la fin un déterminant

$$\mathfrak{D} [m_{s_1} + p_1, m_{s_2} + p_2, m_{s_3} + p_3, \dots, m_{s_q} + p_q]$$

d'ordre  $h$  qui n'est pas nul; nous avons

$$p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_q, \quad \sum_{i=1}^q p_i = r.$$

Et l'équation (23) admet  $q$   $X$ -intégrales de rang  $p_1 + 1, p_2 + 1, \dots, p_q + 1$  qui ne peuvent être remplacées par des intégrales de rang inférieur. Écrivons

$$p_i = r_{s_i} \quad (i = 1, 2, \dots, q), \quad n_i = m_i + r_i \quad (i = 1, 2, \dots, q), \quad \sum_{i=1}^q m_i = m.$$

Le déterminant obtenu d'ordre  $h$  peut s'écrire

$$\mathfrak{D} [n_1, n_2, \dots, n_q];$$

pour abréger, ce déterminant est désigné par  $\mathfrak{D}$ , il est identique au déterminant  $\mathfrak{D}$  page 127.

Le déterminant

$$\begin{vmatrix} X_1 & X'_1 & \dots & X_1^{(n_1)} & X_2 & X'_2 & \dots & X_2^{(n_2)} & \dots & X_q & X'_q & \dots & X_q^{(n_q)} & Y \\ x_{11} & x'_{11} & \dots & x_{11}^{(n_1)} & x_{12} & x'_{12} & \dots & x_{12}^{(n_2)} & \dots & x_{1q} & x'_{1q} & \dots & x_{1q}^{(n_q)} & y_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{h1} & x'_{h1} & \dots & x_{h1}^{(n_1)} & x_{h2} & x'_{h2} & \dots & x_{h2}^{(n_2)} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} & \dots & x_{hq}^{(n_q)} & y_h \end{vmatrix}$$



est l'intégrale générale d'une équation qui peut être ramenée à l'équation (E) par  $r$  transformations  $(t_1)$ , convenablement choisies. Le déterminant

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_q & Y & Y' & \dots & Y^{(h-q)} \\ \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1q} & \eta_1 & \eta'_1 & \dots & \eta_1^{(h-q)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{h1} & \xi_{h2} & \dots & \xi_{hq} & \eta_h & \eta'_h & \dots & \eta_h^{(h-q)} \end{vmatrix}$$

où  $\xi_{ij}$ ,  $\eta_i$  ont été définies pages 127, 128, est par suite l'intégrale générale d'une équation qui peut être ramenée à l'équation (E') par  $r$  transformations  $(t_{-1})$ , convenablement choisies. Nous allons maintenant montrer que le déterminant (100) nous donne l'intégrale générale de l'équation (E').

Nous voyons immédiatement que les déterminants

$$\begin{vmatrix} X_1 & X'_1 & \dots & X_1^{(p_1)} & X_2 & X'_2 & \dots & X_2^{(p_1)} & \dots & X_q & X'_q & \dots & X_q^{(p_1)} & Y & Y' & \dots & Y^{(h-(p_1+1)q)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{h1} & \xi'_{h1} & \dots & \xi_{h1}^{(p_1)} & \xi_{h2} & \xi'_{h2} & \dots & \xi_{h2}^{(p_1)} & \dots & \xi_{hq} & \xi'_{hq} & \dots & \xi_{hq}^{(p_1)} & \eta_h & \eta'_h & \dots & \eta_h^{(h-(p_1+1)q)} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} X_1 & X'_1 & \dots & X_1^{(n_1-p_1)} & X_2 & X'_2 & \dots & X_2^{(n_2-p_1)} & \dots & X_q & X'_q & \dots & X_q^{(n_q-p_1)} & Y & Y' & \dots & Y^{(qp_1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{h1} & x'_{h1} & \dots & x_{h1}^{(n_1-p_1)} & x_{h2} & x'_{h2} & \dots & x_{h2}^{(n_2-p_1)} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} & \dots & x_{hq}^{(n_q-p_1)} & y_h & y'_h & \dots & y_h^{(qp_1)} \end{vmatrix}$$

représentent l'intégrale générale de deux équations qui, à l'aide de la substitution  $z = \lambda \bar{z}$ , se ramènent à deux équations adjointes. Nous avons trouvé (pages 55, 56) que, si une transformation  $(t_j)$  qui diminue le rang des  $X$ -intégrales correspondant à  $\alpha_{0i}$  ( $i = 1, 2, \dots, j$ ) est appliquée à une équation de la forme (20) et si une transformation  $(t_{-j})$  qui ne change pas le rang des  $X$ -intégrales correspondant à  $\gamma_{0i}$  ( $i = j+1, j+2, \dots, q$ ) est appliquée à l'équation adjointe, nous obtenons deux équations qui, à l'aide de la substitution  $z = \lambda \bar{z}$ , se ramènent à deux équations adjointes; les fonctions  $\gamma_{0i}$  désignant toujours les adjointes des solutions  $\alpha_{0i}$ . En s'appuyant sur ce résultat et sur le résultat page 130, on trouve qu'une condition suffisante pour que les déterminants

$$\begin{vmatrix} X_{s_1} & X'_{s_1} & \dots & X_{s_1}^{(p_1)} & X_1 & X'_1 & \dots & X_1^{(p_2)} & \dots & X_q & X'_q & \dots & X_q^{(p_2)} & Y & Y' & \dots & Y^{(t)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{hs_1} & \xi'_{hs_1} & \dots & \xi_{hs_1}^{(p_1)} & \xi_{h1} & \xi'_{h1} & \dots & \xi_{h1}^{(p_2)} & \dots & \xi_{hq} & \xi'_{hq} & \dots & \xi_{hq}^{(p_2)} & \eta_h & \eta'_h & \dots & \eta_h^{(t)} \end{vmatrix},$$

$$(t = h - q - p_1 - p_2(q-1))$$

$$\begin{vmatrix} X_{s_1} & X'_{s_1} & \dots & X_{s_1}^{(m_{s_1})} & X_1 & X'_1 & \dots & X_1^{(n_1-p_2)} & \dots & X_q & X'_q & \dots & X_q^{(n_q-p_2)} & Y & Y' & \dots & Y^{(p_1+p_2(q-1))} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{hs_1} & x'_{hs_1} & \dots & x_{hs_1}^{(m_{s_1})} & x_{h1} & x'_{h1} & \dots & x_{h1}^{(n_1-p_2)} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} & \dots & x_{hq}^{(n_q-p_2)} & y_h & y'_h & \dots & y_h^{(p_1+p_2(q-1))} \end{vmatrix}$$

(ce n'est qu'en vue de plus de netteté que l'ordre des colonnes a été changé) représentent l'intégrale générale de deux équations qui, à l'aide de la substitution  $z = \lambda \bar{z}$ , se ramènent à deux équations adjointes est

$$(103) \quad \sum_{i=1}^h x_{is_1} \xi_{il}^{(k)} = 0 \quad \left( \begin{array}{l} k = 0, 1, \dots, m_{s_1} + p_2 - 1 \\ l = s_2, s_3, \dots, s_q \end{array} \right).$$

Nous avons supposé que tous les déterminants (101) soient nuls, sans que tous les déterminants (101') soient nuls; il résulte de ces hypothèses que les conditions (103) soient remplies. Nous pouvons continuer de la même manière. Nous avons supposé que tous les déterminants (102), soient nuls, sans que tous les déterminants (102') soient nuls; de ces suppositions et des suppositions précédentes nous pouvons déduire

$$\sum_{i=1}^h x_{is_1} \xi_{il}^{(k)} = 0 \quad \left( \begin{array}{l} k = 0, 1, \dots, m_{s_1} + p_3 - 1 \\ l = s_3, s_4, \dots, s_q \end{array} \right),$$

$$\sum_{i=1}^h x_{is_2} \xi_{il}^{(k)} = 0 \quad \left( \begin{array}{l} k = 0, 1, \dots, m_{s_2} + p_3 - 1 \\ l = s_3, s_4, \dots, s_q \end{array} \right).$$

Il en résulte que les déterminants

$$\left| \begin{array}{cccccc} X_{s_1} \dots X_{s_1}^{(p_1)} & X_{s_2} \dots X_{s_2}^{(p_2)} & X_1 \dots X_1^{(p_3)} & \dots & X_q \dots X_q^{(p_3)} & Y \dots Y^{(t)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \xi_{hs_1} \dots \xi_{hs_1}^{(p_1)} & \xi_{hs_2} \dots \xi_{hs_2}^{(p_2)} & \xi_{h1} \dots \xi_{h1}^{(p_3)} & \dots & \xi_{hq} \dots \xi_{hq}^{(p_3)} & \eta_h \dots \eta_h^{(t)} \end{array} \right|,$$

$$(t = h - q - p_1 - p_2 - p_3(q - 2))$$

$$\left| \begin{array}{cccccc} X_{s_1} \dots X_{s_1}^{(m_{s_1})} & X_{s_2} \dots X_{s_2}^{(m_{s_2})} & X_1 \dots X_1^{(n_1 - p_3)} & \dots & X_q \dots X_q^{(n_q - p_3)} & Y \dots Y^{(p_1 + p_2 + p_3(q - 2))} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{hs_1} \dots x_{hs_1}^{(m_{s_1})} & x_{hs_2} \dots x_{hs_2}^{(m_{s_2})} & x_{h1} \dots x_{h1}^{(n_1 - p_3)} & \dots & x_{hq} \dots x_{hq}^{(n_q - p_3)} & y_h \dots y_h^{(p_1 + p_2 + p_3(q - 2))} \end{array} \right|$$

déterminent deux équations qui, à l'aide de la substitution  $z = \lambda \bar{z}$ , se ramènent à deux équations adjointes. De cette façon, nous pourrions continuer: de la manière dont a été obtenu le déterminant  $\mathfrak{D}$ , il résulte que nous avons

$$(104) \quad \sum_{i=1}^h x_{ij} \xi_{il}^{(k)} = 0 \quad \left( \begin{array}{l} k = 0, 1, \dots, m_j + r_l - 1 \\ j = 1, 2, \dots, q; l = 1, 2, \dots, q \end{array} \right),$$

et il en suit que le déterminant (100) nous donne l'intégrale générale de l'équation ( $E'$ ). L'intégrale générale de l'équation (23) est ainsi représentée par le déterminant (100), multiplié par un facteur; on obtient ce facteur d'une façon très simple, par exemple, en le déduisant du coefficient de  $Y^{(m)}$ .

Pour déduire l'intégrale générale de l'équation ( $E'$ ) de l'intégrale générale de l'équation ( $E$ ), donnée sous la forme (83), il fallait donc obtenir le déterminant  $\mathfrak{D}$ . Il faut remarquer que le déterminant  $\mathfrak{D}$  n'est pas complètement déterminé. Si le déterminant (83) avait été écrite sous la forme

$$\begin{vmatrix} \bar{X}_1 & \bar{X}'_1 \dots \bar{X}_1^{(m_1)} & \bar{X}_2 & \bar{X}'_2 \dots \bar{X}_2^{(m_2)} & \dots & \bar{X}_q & \bar{X}'_q \dots \bar{X}_q^{(m_q)} & Y & Y' \dots Y^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{x}_{h1} & \bar{x}'_{h1} \dots \bar{x}_{h1}^{(m_1)} & \bar{x}_{h2} & \bar{x}'_{h2} \dots \bar{x}_{h2}^{(m_2)} & \dots & \bar{x}_{hq} & \bar{x}'_{hq} \dots \bar{x}_{hq}^{(m_q)} & y_h & y'_h \dots y_h^{(r)} \end{vmatrix},$$

où

$$\bar{X}_j = X_j + \sum_{l=j+1}^q \sum_{k=0}^{m_l-m_j} f_{jlk}(x) X_l^{(k)} \quad (j=1, 2, \dots, q),$$

$$\bar{x}_{ij} = x_{ij} + \sum_{l=j+1}^q \sum_{k=0}^{m_l-m_j} f_{jlk}(x) x_{il}^{(k)} \quad \begin{pmatrix} i=1, 2, \dots, h \\ j=1, 2, \dots, q \end{pmatrix},$$

nous aurions, de règle, reçu un autre déterminant  $\mathfrak{D}$  et d'autres valeurs pour  $\xi_{ij}$  ( $i=1, 2, \dots, h$ ,  $j=1, 2, \dots, q$ ). Cela n'est pas absurde, car si nous appliquons la substitution

$$X_{s_i} = \bar{X}_{s_i} + \sum_{j=i+1}^q \sum_{k=0}^{p_j-p_i} f_{ijk}(x) \bar{X}_{s_j}^{(k)} \quad (i=1, 2, \dots, q),$$

$$\xi_{ls_i} = \bar{\xi}_{ls_i} + \sum_{j=i+1}^q \sum_{k=0}^{p_j-p_i} f_{ijk}(x) \bar{\xi}_{ls_j}^{(k)} \quad \begin{pmatrix} l=1, 2, \dots, h \\ i=1, 2, \dots, q \end{pmatrix},$$

le déterminant (100) est remplacé par

$$\begin{vmatrix} \bar{X}_1 & \bar{X}'_1 \dots \bar{X}_1^{(r_1)} & \bar{X}_2 & \bar{X}'_2 \dots \bar{X}_2^{(r_2)} & \dots & \bar{X}_q & \bar{X}'_q \dots \bar{X}_q^{(r_q)} & Y & Y' \dots Y^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{\xi}_{h1} & \bar{\xi}'_{h1} \dots \bar{\xi}_{h1}^{(r_1)} & \bar{\xi}_{h2} & \bar{\xi}'_{h2} \dots \bar{\xi}_{h2}^{(r_2)} & \dots & \bar{\xi}_{hq} & \bar{\xi}'_{hq} \dots \bar{\xi}_{hq}^{(r_q)} & \eta_h & \eta'_h \dots \eta_h^{(m)} \end{vmatrix};$$

il en résulte que les quantités  $\xi_{ij}$  ( $i=1, 2, \dots, h$ ,  $j=1, 2, \dots, q$ ) ne sont pas complètement déterminées.

Les quantités  $\xi_{ij}$  ont été choisies d'une telle manière que les relations (97), (104) existent. Si nous effectuons la substitution

$$\bar{x}_{ij} = x_{ij} + \sum_{l=j+1}^q \sum_{k=0}^{m_l-m_j} f_{jlk}(x) x_{il}^{(k)} \quad \begin{pmatrix} i=1, 2, \dots, h \\ j=1, 2, \dots, q \end{pmatrix},$$

où  $f_{jlk}(x) = 0$  pour  $k \geq m_l + r_l - m_j - r_j$ , les relations (97) et (104) entre les fonctions  $x_{ij}$ ,  $\xi_{ij}$  existent encore entre les fonctions  $\bar{x}_{ij}$ ,  $\xi_{ij}$ . Puis les coefficients  $f_{jlk}(x)$  peuvent être choisies d'une telle manière qu'existent aussi les relations



$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^h \bar{x}_{ij} \xi_{il}^{(k)} &= 0 & (k = 0, 1, \dots, n_l - 1) \\ \sum_{i=1}^h \bar{x}_{ij} \xi_{il}^{(n_l)} &= 0 & (j \neq l) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (j = 1, 2, \dots, q) \\ (l = 1, 2, \dots, q) \end{aligned}$$

Il en résulte que l'intégrale générale de l'équation  $(E)$  s'obtient du déterminant (100) de la même manière que l'intégrale générale de l'équation  $(E')$  a été obtenu du déterminant (83), ce qui est tout naturel.

*Proposition 17.* Si l'intégrale générale de l'équation  $(E)$  est donnée sous la forme

$$N \begin{vmatrix} X_1 & X'_1 \dots X_1^{(m_1)} & X_2 & X'_2 \dots X_2^{(m_2)} & \dots & X_q & X'_q \dots X_q^{(m_q)} & Y & Y' \dots Y^{(r)} \\ x_{11} & x'_{11} \dots x_{11}^{(m_1)} & x_{12} & x'_{12} \dots x_{12}^{(m_2)} & \dots & x_{1q} & x'_{1q} \dots x_{1q}^{(m_q)} & y_1 & y'_1 \dots y_1^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{h1} & x'_{h1} \dots x_{h1}^{(m_1)} & x_{h2} & x'_{h2} \dots x_{h2}^{(m_2)} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} \dots x_{hq}^{(m_q)} & y_h & y'_h \dots y_h^{(r)} \end{vmatrix},$$

$$\left( m = \sum_{i=1}^q m_i; \quad h = m + r + q; \quad m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_q \right)$$

où  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ) sont linéairement indépendantes et où une même relation de la forme

$$\sum_{i=1}^h a_i x_{ij} = 0,$$

$a_i$  étant des constantes, n'existe pas pour  $j = 1, 2, \dots, q$ , l'intégrale générale de l'équation  $(E')$  en pourra être obtenue. L'équation  $(E')$  admet, comme nous l'avons vu, une  $Y$ -intégrale de rang  $m + 1$  et  $q$   $X$ -intégrales distinctes, et si ces  $X$ -intégrales sont écrites sous une telle forme qu'elles ne puissent être remplacées par des intégrales de rang inférieur, la somme de leur rang est  $r + q$ . La condition nécessaire et suffisante pour que la  $X$ -intégrale du rang le moins élevé de l'équation  $(E')$  soit de rang  $p_1 + 1$  est que tous les déterminants

$$\mathfrak{D} [m_1 + p_1 + 1, m_2 + p_1 + 1, \dots, m_q + p_1 + 1]$$

(en ce qui concerne cette notation, voir page 135) soient nuls, sans que tous les déterminants

$$\mathfrak{D} [m_1 + p_1, m_2 + p_1, \dots, m_q + p_1]$$

soient nuls. Supposons que tous les déterminants

$$\mathfrak{D} [m_1 + p_1, \dots, m_{s_1-1} + p_1, m_{s_1} + p_1 + 1, \dots, m_q + p_1 + 1]$$

soient nuls, sans que tous les déterminants

$$\mathfrak{D} [m_1 + p_1, \dots, m_{s_1} + p_1, m_{s_1+1} + p_1 + 1, \dots, m_q + p_1 + 1]$$

soient nuls. La condition nécessaire et suffisante pour que la  $X$ -intégrale de l'équation  $(E')$  du rang immédiatement supérieur à  $p_1 + 1$  soit de rang  $p_2 + 1$  est que tous les déterminants

$$\mathfrak{D} [m_{s_1} + p_1, m_1 + p_2 + 1, \dots, m_q + p_2 + 1]$$

(ce n'est qu'en vue de plus de netteté que l'ordre des termes a été changé dans les déterminants) soient nuls, sans que tous les déterminants

$$\mathfrak{D} [m_{s_1} + p_1, m_1 + p_2, \dots, m_q + p_2]$$

soient nuls. Supposons que tous les déterminants

$$\mathfrak{D} [m_{s_1} + p_1, m_1 + p_2, \dots, m_{s_2-1} + p_2, m_{s_2} + p_2 + 1, \dots, m_q + p_2 + 1]$$

soient nuls, sans que tous les déterminants

$$\mathfrak{D} [m_{s_1} + p_1, m_1 + p_2, \dots, m_{s_2} + p_2, m_{s_2+1} + p_2 + 1, \dots, m_q + p_2 + 1]$$

soient nuls. La condition nécessaire et suffisante pour que la  $X$ -intégrale de l'équation  $(E')$  du rang immédiatement supérieur à  $p_2 + 1$  soit de rang  $p_3 + 1$  est que tous les déterminants

$$\mathfrak{D} [m_{s_1} + p_1, m_{s_2} + p_2, m_{s_3} + p_3 + 1, \dots, m_q + p_3 + 1]$$

soient nuls, sans que tous les déterminants

$$\mathfrak{D} [m_{s_1} + p_1, m_{s_2} + p_2, m_{s_3} + p_3, \dots, m_q + p_3]$$

soient nuls. Etc. De cette manière, nous obtiendrons à la fin un déterminant d'ordre  $h$  qui n'est pas nul. Écrivons

$$p_i = r_{s_i} \quad (i = 1, 2, \dots, q).$$

Le déterminant obtenu peut s'écrire

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} x_{11} & x'_{11} & \dots & x_{11}^{(m_1+r_1)} & x_{12} & x'_{12} & \dots & x_{12}^{(m_2+r_2)} & \dots & x_{1q} & x'_{1q} & \dots & x_{1q}^{(m_q+r_q)} \\ x_{21} & x'_{21} & \dots & x_{21}^{(m_1+r_1)} & x_{22} & x'_{22} & \dots & x_{22}^{(m_2+r_2)} & \dots & x_{2q} & x'_{2q} & \dots & x_{2q}^{(m_q+r_q)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{h1} & x'_{h1} & \dots & x_{h1}^{(m_1+r_1)} & x_{h2} & x'_{h2} & \dots & x_{h2}^{(m_2+r_2)} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} & \dots & x_{hq}^{(m_q+r_q)} \end{vmatrix}$$

L'intégrale générale de l'équation adjointe  $(E')$  est

$$N \begin{vmatrix} X_1 & X'_1 & \dots & X_1^{(r_1)} & X_2 & X'_2 & \dots & X_2^{(r_2)} & \dots & X_q & X'_q & \dots & X_q^{(r_q)} & Y & Y' & \dots & Y^{(m)} \\ \xi_{11} & \xi'_{11} & \dots & \xi_{11}^{(r_1)} & \xi_{12} & \xi'_{12} & \dots & \xi_{12}^{(r_2)} & \dots & \xi_{1q} & \xi'_{1q} & \dots & \xi_{1q}^{(r_q)} & \eta_1 & \eta'_1 & \dots & \eta_1^{(m)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{h1} & \xi'_{h1} & \dots & \xi_{h1}^{(r_1)} & \xi_{h2} & \xi'_{h2} & \dots & \xi_{h2}^{(r_2)} & \dots & \xi_{hq} & \xi'_{hq} & \dots & \xi_{hq}^{(r_q)} & \eta_h & \eta'_h & \dots & \eta_h^{(m)} \end{vmatrix},$$

où

$$\xi_{ij} = \frac{\partial \log \mathfrak{D}}{\partial x_{ij}^{(m_j + r_j)}}, \quad \eta_{ij} = \frac{\partial \log \mathfrak{D}_1}{\partial y_j^{(h-1)}}, \quad \mathfrak{D}_1 = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(h-1)} \\ y_2 & y_2' & \dots & y_2^{(h-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_h & y_h' & \dots & y_h^{(h-1)} \end{vmatrix};$$

( $E$ ) et ( $E'$ ) désignant toutes les équations équivalentes, le facteur non essentiel  $N$  peut être choisi arbitrairement.

---



## IV.

Darboux<sup>1)</sup> a donné la forme la plus générale des équations (1) qui sont intégrables par la méthode de Laplace. Lorsque l'équation (1) admet une  $Y$ -intégrale de rang  $r + 1$ , l'équation (1) peut se mettre sous la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + ab z = 0,$$

où

$$a = -\frac{\partial}{\partial y} \log \begin{vmatrix} \alpha & \frac{\partial \alpha}{\partial y} & \dots & \frac{\partial^r \alpha}{\partial y^r} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} & \dots & \frac{\partial^{r+1} \alpha}{\partial x \partial y^r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^r \alpha}{\partial x^r} & \frac{\partial^{r+1} \alpha}{\partial x^r \partial y} & \dots & \frac{\partial^{2r} \alpha}{\partial x^r \partial y^r} \end{vmatrix}, \quad b = -\frac{\partial}{\partial x} \log \begin{vmatrix} \alpha & \frac{\partial \alpha}{\partial y} & \dots & \frac{\partial^{r-1} \alpha}{\partial y^{r-1}} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} & \dots & \frac{\partial^r \alpha}{\partial x \partial y^{r-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^{r-1} \alpha}{\partial x^{r-1}} & \frac{\partial^r \alpha}{\partial x^{r-1} \partial y} & \dots & \frac{\partial^{2(r-1)} \alpha}{\partial x^{r-1} \partial y^{r-1}} \end{vmatrix},$$

et l'intégrale générale est

$$z = \begin{vmatrix} \theta & \frac{\partial \theta}{\partial y} & \dots & \frac{\partial^r \theta}{\partial y^r} \\ \alpha & \frac{\partial \alpha}{\partial y} & \dots & \frac{\partial^r \alpha}{\partial y^r} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} & \dots & \frac{\partial^{r+1} \alpha}{\partial x \partial y^r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^{r-1} \alpha}{\partial x^{r-1}} & \frac{\partial^r \alpha}{\partial x^{r-1} \partial y} & \dots & \frac{\partial^{2r-1} \alpha}{\partial x^{r-1} \partial y^r} \end{vmatrix},$$

$\theta$  étant l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

---

<sup>1)</sup> DARBOUX, Leçons. Partie II, Livre IV, chap. VI.

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = 0$$

admette une  $X$ -intégrale de rang  $m + 1$  (l'équation (1) ainsi admettant une  $X$ -intégrale de rang  $m + 1 - r$ ) est que l'on ait

$$\begin{vmatrix} \alpha & \frac{\partial \alpha}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial^{m+1} \alpha}{\partial y^{m+1}} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} & \cdots & \frac{\partial^{m+2} \alpha}{\partial x \partial y^{m+1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^{m+1} \alpha}{\partial x^{m+1}} & \frac{\partial^{m+2} \alpha}{\partial x^{m+1} \partial y} & \cdots & \frac{\partial^{2(m+1)} \alpha}{\partial x^{m+1} \partial y^{m+1}} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \frac{\partial \alpha}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial^m \alpha}{\partial y^m} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} & \cdots & \frac{\partial^{m+1} \alpha}{\partial x \partial y^m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^m \alpha}{\partial x^m} & \frac{\partial^{m+1} \alpha}{\partial x^m \partial y} & \cdots & \frac{\partial^{2m} \alpha}{\partial x^m \partial y^m} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Nous allons essayer d'étendre ces résultats aux équations du type (20) qui admettent une  $Y$ -intégrale.

Nous savons que si l'équation (20) admet une  $Y$ -intégrale de rang  $r + 1$ , l'équation peut se ramener, à l'aide de  $r$  transformations ( $t_{-1}$ ), à une équation de même type et de même ordre qui admet une  $Y$ -intégrale de rang 1.

Nous partons maintenant d'une équation (20) qui admet une  $Y$ -intégrale de rang 1; l'équation peut s'écrire

$$(105) \quad \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = 0.$$

Écrivons

$$F_m(z) \equiv \begin{vmatrix} z & \alpha_1 & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial^{m-1} \alpha_1}{\partial x^{m-1}} & \alpha_2 & \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial^{m-1} \alpha_2}{\partial x^{m-1}} & \cdots & \alpha_q & \frac{\partial \alpha_q}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial^{m-1} \alpha_q}{\partial x^{m-1}} \\ \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x \partial y} & \cdots & \frac{\partial^m \alpha_1}{\partial x^{m-1} \partial y} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x \partial y} & \cdots & \frac{\partial^m \alpha_2}{\partial x^{m-1} \partial y} & \cdots & \frac{\partial \alpha_q}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_q}{\partial x \partial y} & \cdots & \frac{\partial^m \alpha_q}{\partial x^{m-1} \partial y} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^h z}{\partial y^h} & \frac{\partial^h \alpha_1}{\partial y^h} & \frac{\partial^{h+1} \alpha_1}{\partial x \partial y^h} & \cdots & \frac{\partial^{h+m-1} \alpha_1}{\partial x^{m-1} \partial y^h} & \frac{\partial^h \alpha_2}{\partial y^h} & \frac{\partial^{h+1} \alpha_2}{\partial x \partial y^h} & \cdots & \frac{\partial^{h+m-1} \alpha_2}{\partial x^{m-1} \partial y^h} & \cdots & \frac{\partial^h \alpha_q}{\partial y^h} & \frac{\partial^{h+1} \alpha_q}{\partial x \partial y^h} & \cdots & \frac{\partial^{h+m-1} \alpha_q}{\partial x^{m-1} \partial y^h} \end{vmatrix},$$

( $h = mq$ )

$\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) étant  $q$  intégrales distinctes de l'équation (33)  $\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0$ <sup>1)</sup>. D'après cette désignation, l'équation considérée s'écrit

$$F_1 \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = 0.$$

En partant de l'intégrale générale de cette équation, on peut déduire directement l'intégrale générale de toutes les équations qui s'obtiennent, en appliquant la transformation ( $T_1$ ); l'intégrale générale de l'équation ( $E_i$ ) d'ordre  $n$  est

$$Z_i = N F_i(z),$$

où  $z$  est l'intégrale générale de l'équation (105); ( $E_i$ ) désignant toutes les équations

<sup>1)</sup> Dans ce chapitre, j'écris, pour abrégé,  $\alpha_i$  au lieu de  $\alpha_{0i}$ .

équivalentes, nous ajoutons toujours un facteur  $N$  qui peut être choisi arbitrairement. Cette proposition peut être démontrée de la manière suivante. Écrivons

$$(F_m)'_x(z) \equiv \frac{\partial}{\partial x} F_m(z) - F_m\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

L'expression  $F_m(z)$  peut, à un facteur près, qui est une fonction déterminée de  $x$  et de  $y$ , s'écrire

$$\begin{vmatrix} F_1(z) & F_1\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}\right) & \dots & F_1\left(\frac{\partial^{m-1} \alpha_1}{\partial x^{m-1}}\right) & \dots & F_1\left(\frac{\partial \alpha_q}{\partial x}\right) & \dots & F_1\left(\frac{\partial^{m-1} \alpha_q}{\partial x^{m-1}}\right) \\ \frac{\partial}{\partial y} F_1(z) & \frac{\partial}{\partial y} F_1\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}\right) & \dots & \frac{\partial}{\partial y} F_1\left(\frac{\partial^{m-1} \alpha_1}{\partial x^{m-1}}\right) & \dots & \frac{\partial}{\partial y} F_1\left(\frac{\partial \alpha_q}{\partial x}\right) & \dots & \frac{\partial}{\partial y} F_1\left(\frac{\partial^{m-1} \alpha_q}{\partial x^{m-1}}\right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^{h-q}}{\partial y^{h-q}} F_1(z) & \frac{\partial^{h-q}}{\partial y^{h-q}} F_1\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}\right) & \dots & \frac{\partial^{h-q}}{\partial y^{h-q}} F_1\left(\frac{\partial^{m-1} \alpha_1}{\partial x^{m-1}}\right) & \dots & \frac{\partial^{h-q}}{\partial y^{h-q}} F_1\left(\frac{\partial \alpha_q}{\partial x}\right) & \dots & \frac{\partial^{h-q}}{\partial y^{h-q}} F_1\left(\frac{\partial^{m-1} \alpha_q}{\partial x^{m-1}}\right) \end{vmatrix}$$

$(h = mq)$

et nous avons par suite

$$F_m\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0.$$

Nous avons

$$(F_m)'_x\left(\frac{\partial^j \alpha_i}{\partial x^j}\right) = 0 \quad \left( \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, q \\ j = 0, 1, \dots, m-2 \end{array} \right).$$

Écrivons

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_m\left(\frac{\partial^m \alpha_1}{\partial x^m}\right) & F_m\left(\frac{\partial^m \alpha_2}{\partial x^m}\right) & \dots & F_m\left(\frac{\partial^m \alpha_q}{\partial x^m}\right) \\ \frac{\partial}{\partial y} F_m\left(\frac{\partial^m \alpha_1}{\partial x^m}\right) & \frac{\partial}{\partial y} F_m\left(\frac{\partial^m \alpha_2}{\partial x^m}\right) & \dots & \frac{\partial}{\partial y} F_m\left(\frac{\partial^m \alpha_q}{\partial x^m}\right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^{q-1}}{\partial y^{q-1}} F_m\left(\frac{\partial^m \alpha_1}{\partial x^m}\right) & \frac{\partial^{q-1}}{\partial y^{q-1}} F_m\left(\frac{\partial^m \alpha_2}{\partial x^m}\right) & \dots & \frac{\partial^{q-1}}{\partial y^{q-1}} F_m\left(\frac{\partial^m \alpha_q}{\partial x^m}\right) \end{vmatrix},$$

et supposons  $\Delta \neq 0$ . Écrivons

$$\sum_{i=0}^q [A_i]_m \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \equiv \frac{(-1)^q}{\Delta} \begin{vmatrix} z & F_m\left(\frac{\partial^m \alpha_1}{\partial x^m}\right) & F_m\left(\frac{\partial^m \alpha_2}{\partial x^m}\right) & \dots & F_m\left(\frac{\partial^m \alpha_q}{\partial x^m}\right) \\ \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial y} F_m\left(\frac{\partial^m \alpha_1}{\partial x^m}\right) & \frac{\partial}{\partial y} F_m\left(\frac{\partial^m \alpha_2}{\partial x^m}\right) & \dots & \frac{\partial}{\partial y} F_m\left(\frac{\partial^m \alpha_q}{\partial x^m}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^q z}{\partial y^q} & \frac{\partial^q}{\partial y^q} F_m\left(\frac{\partial^m \alpha_1}{\partial x^m}\right) & \frac{\partial^q}{\partial y^q} F_m\left(\frac{\partial^m \alpha_2}{\partial x^m}\right) & \dots & \frac{\partial^q}{\partial y^q} F_m\left(\frac{\partial^m \alpha_q}{\partial x^m}\right) \end{vmatrix}.$$

Nous obtiendrons

$$\sum_{i=0}^q [A_i]_m \frac{\partial^i}{\partial y^i} (F_m)'_x\left(\frac{\partial^{m-1} \alpha_j}{\partial x^{m-1}}\right) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, q),$$



parce que

$$(F_m)'_x \left( \frac{\partial^{m-1} \alpha_j}{\partial x^{m-1}} \right) = - F_m \left( \frac{\partial^m \alpha_j}{\partial x^m} \right) \quad (j = 1, 2, \dots, q).$$

Comme  $F_m \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = 0$ , nous aurons

$$\sum_{i=0}^q [A_i]_m \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} F_m(z) = \sum_{i=0}^q [A_i]_m \frac{\partial^i}{\partial y^i} (F_m)'_x(z).$$

Comme

$$\sum_{i=0}^q [A_i]_m \frac{\partial^i}{\partial y^i} (F_m)'_x \left( \frac{\partial^k \alpha_j}{\partial x^k} \right) = 0 \quad \left( \begin{matrix} k = 0, 1, \dots, m-1 \\ j = 1, 2, \dots, q \end{matrix} \right),$$

il existe une identité de la forme

$$\sum_{i=0}^q [A_i]_m \frac{\partial^i}{\partial y^i} (F_m)'_x(z) + \sum_{i=0}^q [B_i]_m \frac{\partial^i}{\partial y^i} F_m(z) \equiv 0,$$

les coefficients  $[B_i]_m$  ( $i = 0, 1, \dots, q$ ) étant des fonctions de  $x$  et de  $y$ , et ainsi nous obtiendrons

$$\sum_{i=0}^q \left( [A_i]_m \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + [B_i]_m \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) F_m(z) = 0.$$

De la supposition  $\Delta \neq 0$ , nous pouvons déduire que  $F_m(z)$  ne peut satisfaire à une équation du type (20) d'ordre inférieur à  $n$ . En effet, si  $F_m(z)$  était l'intégrale d'une équation de la forme

$$\sum_{i=0}^{q-1} \left( [\bar{A}_i]_m \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + [\bar{B}_i]_m \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) Z_m = 0,$$

nous aurions

$$\sum_{i=0}^{q-1} \left( [\bar{A}_i]_m \frac{\partial^i}{\partial y^i} (F_m)'_x(z) + [\bar{B}_i]_m \frac{\partial^i}{\partial y^i} F_m(z) \right) \equiv 0,$$

et une condition nécessaire en est

$$\sum_{i=0}^{q-1} [\bar{A}_i]_m \frac{\partial^i}{\partial y^i} F_m \left( \frac{\partial^m \alpha_j}{\partial x^m} \right) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, q),$$

ce qui est contraire à l'hypothèse  $\Delta \neq 0$ .  $F_m(z)$  est ainsi l'intégrale générale de l'équation

$$\sum_{i=0}^q \left( [A_i]_m \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + [B_i]_m \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) Z_m = 0 \quad ([A_q]_m = 1).$$

Nous pouvons définir un facteur  $M$ , fonction de  $x$  et de  $y$ , de telle manière que l'identité

$$M \sum_{i=0}^q [A_i]_m \frac{\partial^i}{\partial y^i} F_m(z) \equiv F_{m+1}(z)$$

ait lieu. Par conséquent, si  $N F_m(z)$  est l'intégrale générale de l'équation  $(E_m)$ ,  $N F_{m+1}(z)$  est l'intégrale générale de l'équation  $(E_{m+1})$ . Nous voyons directement que l'intégrale générale de l'équation  $(E_1)$  est  $N F_1(z)$ . Par suite,  $N F_{i+1}(z)$  est l'intégrale générale de l'équation  $(E_{i+1})$ , à condition que l'on ait

$$(106) \quad \begin{vmatrix} F_i \left( \frac{\partial^i \alpha_1}{\partial x^i} \right) & F_i \left( \frac{\partial^i \alpha_2}{\partial x^i} \right) & \cdots & F_i \left( \frac{\partial^i \alpha_q}{\partial x^i} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} F_i \left( \frac{\partial^i \alpha_1}{\partial x^i} \right) & \frac{\partial}{\partial y} F_i \left( \frac{\partial^i \alpha_2}{\partial x^i} \right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial y} F_i \left( \frac{\partial^i \alpha_q}{\partial x^i} \right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^{q-1}}{\partial y^{q-1}} F_i \left( \frac{\partial^i \alpha_1}{\partial x^i} \right) & \frac{\partial^{q-1}}{\partial y^{q-1}} F_i \left( \frac{\partial^i \alpha_2}{\partial x^i} \right) & \cdots & \frac{\partial^{q-1}}{\partial y^{q-1}} F_i \left( \frac{\partial^i \alpha_q}{\partial x^i} \right) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Supposons que  $i = m + 1$  soit la valeur la plus petite de  $i$  pour laquelle le déterminant (106) soit nul. Il en résulte qu'il existe entre  $\frac{\partial^j \alpha_i}{\partial x^j}$  ( $j = 0, 1, \dots, m + 1$ ) ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) une relation linéaire et homogène, les coefficients étant des fonctions de  $x$ . Supposons d'abord qu'il n'y ait qu'une telle relation entre  $\frac{\partial^j \alpha_i}{\partial x^j}$  ( $j = 0, 1, \dots, m + 1$ ) ( $i = 1, 2, \dots, q$ ). Que la relation en question soit

$$(107) \quad \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1}} \left( \alpha_1 + \sum_{i=2}^q f_i(x) \alpha_i \right) = \sum_{i=1}^q \sum_{j=0}^m g_{ij}(x) \frac{\partial^j \alpha_i}{\partial x^j}.$$

Écrivons

$$\sum_{i=0}^{q-1} [A_i]_{m+1} \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \equiv \frac{(-1)^{q-1}}{D} \begin{vmatrix} z & F_{m+1} \left( \frac{\partial^{m+1} \alpha_2}{\partial x^{m+1}} \right) & \cdots & F_{m+1} \left( \frac{\partial^{m+1} \alpha_q}{\partial x^{m+1}} \right) \\ \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial y} F_{m+1} \left( \frac{\partial^{m+1} \alpha_2}{\partial x^{m+1}} \right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial y} F_{m+1} \left( \frac{\partial^{m+1} \alpha_q}{\partial x^{m+1}} \right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^{q-1} z}{\partial y^{q-1}} & \frac{\partial^{q-1}}{\partial y^{q-1}} F_{m+1} \left( \frac{\partial^{m+1} \alpha_2}{\partial x^{m+1}} \right) & \cdots & \frac{\partial^{q-1}}{\partial y^{q-1}} F_{m+1} \left( \frac{\partial^{m+1} \alpha_q}{\partial x^{m+1}} \right) \end{vmatrix},$$

où

$$D = \begin{vmatrix} F_{m+1} \left( \frac{\partial^{m+1} \alpha_2}{\partial x^{m+1}} \right) & F_{m+1} \left( \frac{\partial^{m+1} \alpha_3}{\partial x^{m+1}} \right) & \cdots & F_{m+1} \left( \frac{\partial^{m+1} \alpha_q}{\partial x^{m+1}} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} F_{m+1} \left( \frac{\partial^{m+1} \alpha_2}{\partial x^{m+1}} \right) & \frac{\partial}{\partial y} F_{m+1} \left( \frac{\partial^{m+1} \alpha_3}{\partial x^{m+1}} \right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial y} F_{m+1} \left( \frac{\partial^{m+1} \alpha_q}{\partial x^{m+1}} \right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^{q-2}}{\partial y^{q-2}} F_{m+1} \left( \frac{\partial^{m+1} \alpha_2}{\partial x^{m+1}} \right) & \frac{\partial^{q-2}}{\partial y^{q-2}} F_{m+1} \left( \frac{\partial^{m+1} \alpha_3}{\partial x^{m+1}} \right) & \cdots & \frac{\partial^{q-2}}{\partial y^{q-2}} F_{m+1} \left( \frac{\partial^{m+1} \alpha_q}{\partial x^{m+1}} \right) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Nous obtiendrons

$$\sum_{i=0}^{q-1} [A_i]_{m+1} \frac{\partial^i}{\partial y^i} (F_{m+1})'_x \left( \frac{\partial^k \alpha_j}{\partial x^k} \right) = 0 \quad \begin{pmatrix} k = 0, 1, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, q \end{pmatrix},$$

et une identité de la forme

$$\sum_{i=0}^{q-1} [A_i]_{m+1} \frac{\partial^i}{\partial y^i} (F_{m+1})'_x (z) + \sum_{i=0}^{q-1} [B_i]_{m+1} \frac{\partial^i}{\partial y^i} F_{m+1} (z) \equiv 0$$

existe ainsi. Comme  $D \neq 0$ , il en suit que  $F_{m+1}(z)$  ne peut être l'intégrale d'une équation du type (20) d'ordre inférieur à  $n - 1$ . Il en résulte que l'équation  $(E_{m+1})$  peut s'écrire

$$\sum_{i=0}^{q-1} \left( [A_i]_{m+1} \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + [B_i]_{m+1} \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) Z_{m+1} = 0,$$

et ainsi l'équation  $(E_{m+1})$  est d'ordre  $n - 1$ . Comme le déterminant (106) sera nul pour  $i = m + 1$ , l'expression  $F_{m+2}(z)$  est identiquement nul. Il suit des valeurs des coefficients  $[A_i]_{m+1}$  que l'intégrale générale de l'équation  $(E_{m+2})$  est

$$(108) \quad N \begin{vmatrix} z & \alpha_1 & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} \dots \frac{\partial^m \alpha_1}{\partial x^m} & \alpha_2 & \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} \dots \frac{\partial^h \alpha_2}{\partial x^h} & \dots & \alpha_q & \frac{\partial \alpha_q}{\partial x} \dots \frac{\partial^h \alpha_q}{\partial x^h} \\ \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x \partial y} \dots \frac{\partial^{m+1} \alpha_1}{\partial x^m \partial y} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x \partial y} \dots \frac{\partial^{h+1} \alpha_2}{\partial x^h \partial y} & \dots & \frac{\partial \alpha_q}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_q}{\partial x \partial y} \dots \frac{\partial^{h+1} \alpha_q}{\partial x^h \partial y} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^k z}{\partial y^k} & \frac{\partial^k \alpha_1}{\partial y^k} & \frac{\partial^{k+1} \alpha_1}{\partial x \partial y^k} \dots \frac{\partial^{m+k} \alpha_1}{\partial x^m \partial y^k} & \frac{\partial^k \alpha_2}{\partial y^k} & \frac{\partial^{k+1} \alpha_2}{\partial x \partial y^k} \dots \frac{\partial^{h+k} \alpha_2}{\partial x^h \partial y^k} & \dots & \frac{\partial^k \alpha_q}{\partial y^k} & \frac{\partial^{k+1} \alpha_q}{\partial x \partial y^k} \dots \frac{\partial^{h+k} \alpha_q}{\partial x^h \partial y^k} \end{vmatrix},$$

$$(k = (h + 1)(q - 1) + m + 1)$$

où il faut substituer  $h = m + 1$ . En général, nous trouverons que l'intégrale générale de l'équation  $(E_{h+1})$ ,  $h > m$ , est donnée par le déterminant (108), pourvu que ce déterminant ne soit pas identiquement nul, et il n'est identiquement nul que si l'équation  $(E_h)$  est d'ordre inférieur à  $n - 1$ . De cette manière, nous pourrions continuer. — Nous sommes partis de ce qu'il n'existe entre  $\frac{\partial^j \alpha_i}{\partial x^j} \begin{pmatrix} j = 0, 1, \dots, m+1 \\ i = 1, 2, \dots, q \end{pmatrix}$  qu'une relation linéaire et homogène, les coefficients étant des fonctions de  $x$ . Si nous supposons que  $s$  relations distinctes de ce type existent entre  $\frac{\partial^j \alpha_i}{\partial x^j} \begin{pmatrix} j = 0, 1, \dots, m+1 \\ i = 1, 2, \dots, q \end{pmatrix}$ , nous trouverons de la même manière que l'intégrale générale de l'équation  $(E_{m+1})$  est  $NF_{m+1}(z)$ , et que l'équation  $(E_{m+1})$  est d'ordre  $n - s$ .

Il résulte directement de ce qui précède que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (105) admette une  $X$ -intégrale de rang inférieur à  $m + 2$ , ou autrement dit que l'équation  $(E_{m+1})_i$  soit d'ordre inférieur à  $n$ , est que le déterminant (106) soit nul pour  $i = m + 1$ . Supposons de nouveau que  $i = m + 1$  soit la valeur



la plus petite de  $i$  pour laquelle le déterminant (106) soit nul, et supposons que la relation entre  $\frac{\partial^j \alpha_i}{\partial x^j} \left( \begin{matrix} i = 1, 2, \dots q \\ j = 0, 1, \dots m+1 \end{matrix} \right)$  soit la relation (107). Il en résulte que l'équation (105) admet une  $X$ -intégrale de rang  $m+1$ , correspondant à  $\alpha_1 + \sum_{i=2}^q f_i(x) \alpha_i$ , et que l'équation n'admet pas de  $X$ -intégrale de rang inférieur. De ce qui précède, il résulte que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (105) admette encore une  $X$ -intégrale de rang inférieur à  $\bar{m}+2$ , où  $\bar{m} \geq m$ , est qu'il existe entre

$$\frac{\partial^j \alpha_i}{\partial x^j} \left( \begin{matrix} j = 0, 1, \dots \bar{m}+1 \\ i = 2, 3, \dots q \end{matrix} \right), \quad \frac{\partial^j \alpha_1}{\partial x^j} \quad (j = 0, 1, \dots m)$$

une relation linéaire et homogène, les coefficients étant des fonctions de  $x$ . Nous pourrions continuer de cette manière. A l'aide des valeurs de  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots q$ ) nous pouvons reconnaître si l'équation (105) admet des  $X$ -intégrales et, dans ce cas, décider quel est le rang de cette  $X$ -intégrale ou de ces  $X$ -intégrales.

De ce qui précède, nous pouvons déduire que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (105) admette  $q$   $X$ -intégrales distinctes de rang  $m_1+1, m_2+1, \dots m_q+1$ , où  $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_q$ , correspondant à  $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_q$ , qui ne peuvent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur est qu'il existe des relations

$$\frac{\partial^{m_i+1} \alpha_i}{\partial x^{m_i+1}} = \sum_{k=1}^q \sum_{j=0}^{m_i} f_{kji}(x) \frac{\partial^j \alpha_k}{\partial x^j} \quad (i = 1, 2, \dots q),$$

sans qu'il y ait des relations de la forme

$$\sum_{i=1}^q \sum_{j=0}^{m_1} g_{ij}(x) \frac{\partial^j \alpha_i}{\partial x^j} = 0, \quad \sum_{i=2}^q \sum_{j=0}^{m_2} h_{ij}(x) \frac{\partial^j \alpha_i}{\partial x^j} + \sum_{j=0}^{m_1} k_j(x) \frac{\partial^j \alpha_1}{\partial x^j} = 0$$

etc. Faisons cette supposition. Écrivons  $\sum_{i=1}^q m_i = m$ . Les  $m+q$  quantités

$\frac{\partial^j \alpha_i}{\partial x^j} \left( \begin{matrix} j = 0, 1, \dots m_i \\ i = 1, 2, \dots q \end{matrix} \right)$  déterminent une équation de la forme

$$(109) \quad \sum_{i=0}^{m+q} f_i(y) \frac{\partial^i \alpha}{\partial y^i} = 0 \quad (f_{m+q}(y) = 1).$$

— Supposons, inversement, que  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots q$ ) satisfassent à une équation de la forme (109). Toutes les quantités  $\frac{\partial^j \alpha_i}{\partial x^j} \left( \begin{matrix} i = 1, 2, \dots q \\ j \geq 0 \end{matrix} \right)$  sont des intégrales de cette équation, et par suite, si nous considérons  $\frac{\partial^j \alpha_i}{\partial x^j} \left( \begin{matrix} i = 1, 2, \dots q \\ j \geq 0 \end{matrix} \right)$  comme fonctions de  $y$ , au plus  $m+q$  de celles-ci peuvent être linéairement indépendantes. Il en

résulte que l'équation (105) admet  $q$   $X$ -intégrales distinctes qui peuvent s'écrire de telle manière que la somme de leur rang soit  $m + q$  au plus

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (105) admette  $q$   $X$ -intégrales distinctes qui puissent s'écrire de telle manière que la somme de leur rang soit  $m + q$  au plus est ainsi que toutes les intégrales de l'équation (33)

$$\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0$$

soient des intégrales d'une même équation de la forme (109). Nous pouvons aussi dire que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$\frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=0}^q (-1)^i \frac{\partial^i}{\partial y^i} (A_i u) = 0$$

admette une  $Y$ -intégrale de rang  $m + 1$  est que toutes les intégrales de l'équation (33) satisfassent à une équation du type (109) d'ordre  $m + q$ , et qu'elles ne satisfassent pas à une équation du même type, mais d'ordre moindre <sup>1)</sup>. — Il résulte de la proposition 15 du chapitre précédent que si l'équation (105) admet  $q$   $X$ -intégrales de rang  $m_1 + 1$ ,  $m_2 + 1$ , ...,  $m_q + 1$  qui ne peuvent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur, l'intégrale générale pourra s'écrire

$$z = \frac{1}{\mathfrak{D}} \begin{vmatrix} X_1 & X'_1 & \dots & X_1^{(m_1)} & X_2 & X'_2 & \dots & X_2^{(m_2)} & \dots & X_q & X'_q & \dots & X_q^{(m_q)} & Y \\ x_{11} & x'_{11} & \dots & x_{11}^{(m_1)} & x_{12} & x'_{12} & \dots & x_{12}^{(m_2)} & \dots & x_{1q} & x'_{1q} & \dots & x_{1q}^{(m_q)} & y_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{h1} & x'_{h1} & \dots & x_{h1}^{(m_1)} & x_{h2} & x'_{h2} & \dots & x_{h2}^{(m_2)} & \dots & x_{hq} & x'_{hq} & \dots & x_{hq}^{(m_q)} & y_h \end{vmatrix} \begin{pmatrix} h = m + q \\ m = \sum_{i=1}^q m_i \end{pmatrix},$$

$y_i$  ( $i = 1, 2 \dots h$ ) étant linéairement indépendantes et  $\mathfrak{D}$  étant le coefficient de  $Y$  dans le déterminant. Il en résulte que toutes les intégrales de l'équation (33) satisfassent à l'équation

$$\begin{vmatrix} \alpha & \frac{\partial \alpha}{\partial y} & \dots & \frac{\partial^{m+q} \alpha}{\partial y^{m+q}} \\ y_1 & y'_1 & \dots & y_1^{(m+q)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_h & y'_h & \dots & y_h^{(m+q)} \end{vmatrix} = 0 \quad (h = m + q),$$

et qu'elles ne satisfassent pas à une équation semblable, mais d'ordre moindre. Ce résultat est identique à celui que nous venons d'obtenir. Réciproquement, nous pourrions déduire la proposition 15, pour le cas où  $r = 0$ , du résultat que nous avons obtenu ici. Nous voyons aisément que les deux résultats peuvent se déduire l'un de l'autre.

<sup>1)</sup> Comparer Darboux, Lecons. Partie II, page 42.

Écrivons

$$G(z) \equiv \begin{vmatrix} z & \alpha_1 & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial^{r_1-1} \alpha_1}{\partial x^{r_1-1}} & \alpha_2 & \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial^{r_2-1} \alpha_2}{\partial x^{r_2-1}} & \dots & \alpha_q & \frac{\partial \alpha_q}{\partial x} & \dots & \frac{\partial^{r_q-1} \alpha_q}{\partial x^{r_q-1}} \\ \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x \partial y} & \dots & \frac{\partial^{r_1} \alpha_1}{\partial x^{r_1-1} \partial y} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x \partial y} & \dots & \frac{\partial^{r_2} \alpha_2}{\partial x^{r_2-1} \partial y} & \dots & \frac{\partial \alpha_q}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_q}{\partial x \partial y} & \dots & \frac{\partial^{r_q} \alpha_q}{\partial x^{r_q-1} \partial y} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^r z}{\partial y^r} & \frac{\partial^r \alpha_1}{\partial y^r} & \frac{\partial^{r+1} \alpha_1}{\partial x \partial y^r} & \dots & \frac{\partial^{r+r_1-1} \alpha_1}{\partial x^{r_1-1} \partial y^r} & \frac{\partial^r \alpha_2}{\partial y^r} & \frac{\partial^{r+1} \alpha_2}{\partial x \partial y^r} & \dots & \frac{\partial^{r+r_2-1} \alpha_2}{\partial x^{r_2-1} \partial y^r} & \dots & \frac{\partial^r \alpha_q}{\partial y^r} & \frac{\partial^{r+1} \alpha_q}{\partial x \partial y^r} & \dots & \frac{\partial^{r+r_q-1} \alpha_q}{\partial x^{r_q-1} \partial y^r} \end{vmatrix}.$$

$$(r = \sum_{i=1}^q r_i)$$

Nous allons montrer que  $G(z)$  divisé par le coefficient de  $\frac{\partial^r z}{\partial y^r}$ ,  $z$  étant toujours l'intégrale générale de l'équation (105) et  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) étant  $q$  intégrales distinctes de l'équation (33), est l'intégrale générale d'une équation du type (20) d'ordre  $n$  au plus, laquelle on obtient de l'équation (105) en appliquant  $r$  transformations ( $t_1$ ) convenablement choisies. Écrivons

$$G'_x(z) \equiv \frac{\partial}{\partial x} G(z) - G\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

— Supposons  $r_i \geq 1$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ). De l'équation (105) nous obtiendrons  $G\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$ . La condition nécessaire et suffisante pour que  $G(z)$  satisfasse à une équation

$$(110) \quad \sum_{i=0}^q \left( A_{ir} \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + B_{ir} \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) z_r = 0 \quad (A_{qr} = 1)$$

est que l'identité

$$\sum_{i=0}^q A_{ir} \frac{\partial^i}{\partial y^i} G'_x(z) + \sum_{i=0}^q B_{ir} \frac{\partial^i}{\partial y^i} G(z) \equiv 0$$

existe. Nous avons

$$G'_x\left(\frac{\partial^j \alpha_i}{\partial x^j}\right) = 0 \quad \begin{pmatrix} j = 0, 1, \dots, r_i - 2 \\ i = 1, 2, \dots, q \end{pmatrix}$$

Comme

$$G'_x\left(\frac{\partial^{r_i-1} \alpha_i}{\partial x^{r_i-1}}\right) + G\left(\frac{\partial^{r_i} \alpha_i}{\partial x^{r_i}}\right) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, q),$$

il résulte des conditions

$$\sum_{i=0}^q A_{ir} \frac{\partial^i}{\partial y^i} G'_x\left(\frac{\partial^{r_h-1} \alpha_h}{\partial x^{r_h-1}}\right) = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, q)$$

que les coefficients  $A_{ir}$  doivent être choisis d'une manière qui résulte de l'identité suivante



$$(111) \quad \sum_{i=0}^q A_{ir} \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \equiv \frac{(-1)^q}{\Delta} \begin{vmatrix} z & G\left(\frac{\partial^{r_1} \alpha_1}{\partial x^{r_1}}\right) & G\left(\frac{\partial^{r_2} \alpha_2}{\partial x^{r_2}}\right) & \dots & G\left(\frac{\partial^{r_q} \alpha_q}{\partial x^{r_q}}\right) \\ \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial y} G\left(\frac{\partial^{r_1} \alpha_1}{\partial x^{r_1}}\right) & \frac{\partial}{\partial y} G\left(\frac{\partial^{r_2} \alpha_2}{\partial x^{r_2}}\right) & \dots & \frac{\partial}{\partial y} G\left(\frac{\partial^{r_q} \alpha_q}{\partial x^{r_q}}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^q z}{\partial y^q} & \frac{\partial^q}{\partial y^q} G\left(\frac{\partial^{r_1} \alpha_1}{\partial x^{r_1}}\right) & \frac{\partial^q}{\partial y^q} G\left(\frac{\partial^{r_2} \alpha_2}{\partial x^{r_2}}\right) & \dots & \frac{\partial^q}{\partial y^q} G\left(\frac{\partial^{r_q} \alpha_q}{\partial x^{r_q}}\right) \end{vmatrix},$$

$$\text{où } \Delta = \begin{vmatrix} G\left(\frac{\partial^{r_1} \alpha_1}{\partial x^{r_1}}\right) & G\left(\frac{\partial^{r_2} \alpha_2}{\partial x^{r_2}}\right) & \dots & G\left(\frac{\partial^{r_q} \alpha_q}{\partial x^{r_q}}\right) \\ \frac{\partial}{\partial y} G\left(\frac{\partial^{r_1} \alpha_1}{\partial x^{r_1}}\right) & \frac{\partial}{\partial y} G\left(\frac{\partial^{r_2} \alpha_2}{\partial x^{r_2}}\right) & \dots & \frac{\partial}{\partial y} G\left(\frac{\partial^{r_q} \alpha_q}{\partial x^{r_q}}\right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^{q-1}}{\partial y^{q-1}} G\left(\frac{\partial^{r_1} \alpha_1}{\partial x^{r_1}}\right) & \frac{\partial^{q-1}}{\partial y^{q-1}} G\left(\frac{\partial^{r_2} \alpha_2}{\partial x^{r_2}}\right) & \dots & \frac{\partial^{q-1}}{\partial y^{q-1}} G\left(\frac{\partial^{r_q} \alpha_q}{\partial x^{r_q}}\right) \end{vmatrix};$$

nous sommes partis de la supposition  $\Delta \neq 0$ . Les coefficients  $B_{ir}$  ( $i = 0, 1, \dots, q$ ) sont définis par les  $q$  conditions

$$(111') \quad \sum_{i=0}^q A_{ir} \frac{\partial^i}{\partial y^i} G_x' \left( \frac{\partial^{r_h} \alpha_h}{\partial x^{r_h}} \right) + \sum_{i=0}^q B_{ir} \frac{\partial^i}{\partial y^i} G \left( \frac{\partial^{r_h} \alpha_h}{\partial x^{r_h}} \right) = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, q)$$

et par la condition

$$(111'') \quad B_{qr} = - \frac{\partial \log D}{\partial x},$$

où  $D$  est le coefficient de  $\frac{\partial^r z}{\partial y^r}$  dans l'expression  $G(z)$ . De la supposition  $\Delta \neq 0$ , il résulte que  $G(z)$  ne peut être l'intégrale d'une équation du type (20) d'ordre inférieur à  $n$ , et  $G(z)$  est ainsi l'intégrale générale de l'équation (110) où les coefficients sont définis par les relations (111), (111'), (111''). — Si nous supposons  $\Delta = 0$  et si nous supposons qu'il existe  $s$ , et pas plus de  $s$ , relations distinctes de la forme

$$\sum_{i=1}^q f_i(x) G \left( \frac{\partial^{r_i} \alpha_i}{\partial x^{r_i}} \right) = 0,$$

nous trouverons également que  $G(z)$  sera l'intégrale générale d'une équation du type (20) d'ordre  $n - s$ . — L'expression  $G(z)$  peut s'écrire

$$G(z) = M \frac{\partial}{\partial y} \frac{g(z)}{g \left( \frac{\partial^{r_1-1} \alpha_1}{\partial x^{r_1-1}} \right)},$$

où

$$g(z) \equiv \begin{vmatrix} z & \alpha_1 & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial^{r_1-2} \alpha_1}{\partial x^{r_1-2}} & \alpha_2 & \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial^{r_2-1} \alpha_2}{\partial x^{r_2-1}} & \dots & \alpha_q & \frac{\partial \alpha_q}{\partial x} & \dots & \frac{\partial^{r_q-1} \alpha_q}{\partial x^{r_q-1}} \\ \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x \partial y} & \dots & \frac{\partial^{r_1-1} \alpha_1}{\partial x^{r_1-2} \partial y} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x \partial y} & \dots & \frac{\partial^{r_2} \alpha_2}{\partial x^{r_2-1} \partial y} & \dots & \frac{\partial \alpha_q}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_q}{\partial x \partial y} & \dots & \frac{\partial^{r_q} \alpha_q}{\partial x^{r_q-1} \partial y} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^{r-1} z}{\partial y^{r-1}} & \frac{\partial^{r-1} \alpha_1}{\partial y^{r-1}} & \frac{\partial^r \alpha_1}{\partial x \partial y^{r-1}} & \dots & \frac{\partial^{r_1+r-3} \alpha_1}{\partial x^{r_1-2} \partial y^{r-1}} & \frac{\partial^{r-1} \alpha_2}{\partial y^{r-1}} & \frac{\partial^r \alpha_2}{\partial x \partial y^{r-1}} & \dots & \frac{\partial^{r_2+r-2} \alpha_2}{\partial x^{r_2-1} \partial y^{r-1}} & \dots & \frac{\partial^{r-1} \alpha_q}{\partial y^{r-1}} & \frac{\partial^r \alpha_q}{\partial x \partial y^{r-1}} & \dots & \frac{\partial^{r_q+r-2} \alpha_q}{\partial x^{r_q-1} \partial y^{r-1}} \end{vmatrix}$$

$$\left( r = \sum_{i=1}^q r_i \right)$$

et  $M$  une fonction déterminée de  $x$  et de  $y$ . La transformation

$$z_r = g \left( \frac{\partial^{r_1-1} \alpha_1}{\partial x^{r_1-1}} \right) \frac{\partial}{\partial y} \frac{z_{r-1}}{g \left( \frac{\partial^{r_1-1} \alpha_1}{\partial x^{r_1-1}} \right)}$$

est ainsi une transformation  $(t_1)$  de l'équation dont l'intégrale générale est  $z_{r-1} = g(z)$ .

Il en résulte que  $G(z)$  divisé par le coefficient de  $\frac{\partial^r z}{\partial y^r}$  est l'intégrale générale d'une équation du type (20) d'ordre  $n$  au plus, qui peut se déduire de l'équation (105) à l'aide de  $r$  transformations  $(t_1)$ . — Nous avons supposé  $r_i \geq 1$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ). Mais si nous supposons  $r_1 = r_2 = \dots = r_s = 0$ , nous obtiendrons le même résultat.

Supposons  $\Delta \neq 0$ .  $G(z)$  est l'intégrale générale de l'équation (110) où les coefficients  $A_{ir}$  et  $B_{ir}$  remplissent les conditions (111), (111') et (111''). Posons  $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_q$ . En regardant la transformation  $z_r = G(z)$  comme composée de  $r_1$  transformations  $(t_q)$ ,  $r_2 - r_1$  transformations  $(t_{q-1})$ ,  $\dots$ ,  $r_q - r_{q-1}$  transformations  $(t_1)$ , l'on trouve que l'équation adjointe

$$(112) \quad \sum_{i=0}^q (-1)^i \left[ \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} (A_{ir} u_{-r}) - \frac{\partial^i}{\partial y^i} (B_{ir} u_{-r}) \right] = 0$$

admet  $q$   $X$ -intégrales distinctes de rang  $r_1 + 1, r_2 + 1, \dots, r_q + 1$  qui ne peuvent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur. Chaque équation de la forme (110) où les coefficients  $A_{ir}$  et  $B_{ir}$  remplissent les conditions (111), (111') et (111'') admet ainsi une  $Y$ -intégrale de rang  $\sum_{i=1}^q r_i + 1$ , et l'équation adjointe admet  $q$   $X$ -intégrales distinctes de rang  $r_1 + 1, r_2 + 1, \dots, r_q + 1$ .

Réciproquement, nous pourrions montrer que l'intégrale générale d'une équation du type (20) d'ordre  $n$  qui admet une  $Y$ -intégrale de rang  $r + 1$  et dont l'équation adjointe admet  $q$   $X$ -intégrales distinctes de rang  $r_1 + 1, r_2 + 1, \dots, r_q + 1$ , où  $\sum_{i=1}^q r_i = r$ , peut toujours s'écrire sous la forme

$$z_r = MG(z),$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$ ,  $M$  étant des fonctions de  $x$  et de  $y$ , et  $z$  étant l'intégrale générale de l'équation

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} & \cdots & \frac{\partial^{q+1} z}{\partial x \partial y^q} \\ \alpha_1 & \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial y^2} & \cdots & \frac{\partial^q \alpha_1}{\partial y^q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_q & \frac{\partial \alpha_q}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_q}{\partial y^2} & \cdots & \frac{\partial^q \alpha_q}{\partial y^q} \end{vmatrix} = 0.$$

Supposons que l'équation proposée soit (110), les coefficients  $A_{ir}$  et  $B_{ir}$  étant des fonctions de  $x$  et de  $y$ . Supposons  $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_q$ . A l'aide de  $r_q - r_{q-1}$  transformations  $(t_1)$ ,  $r_{q-1} - r_{q-2}$  transformations  $(t_2)$ ,  $\dots$   $r_1$  transformations  $(t_q)$ , l'équation adjointe (112) peut se ramener à une équation du type (20) d'ordre  $n$  qui admet  $q$   $X$ -intégrales distinctes de rang 1. L'adjointe de l'équation obtenue peut ainsi, à l'aide de la substitution  $z = \lambda \bar{z}$ , se mettre sous la forme (105). De la manière dont l'équation

$$\sum_{i=0}^q (-1)^i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} (A_i u) = 0$$

a été déduite de l'équation (112), il résulte que les intégrales  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) de l'équation  $\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha}{\partial y^i} = 0$  peuvent toujours être choisies d'une telle manière que l'équation (110) s'obtienne de l'équation (105) par la transformation  $z_r = MG(z)$ , où  $M$  est une fonction déterminée de  $x$  et de  $y$ .

Par cela est donnée la forme générale de l'intégrale générale des équations (20) qui admettent une  $Y$ -intégrale. Je n'ai pas réussi à donner la forme générale de l'intégrale générale des équations (20) qui admettent  $q$   $X$ -intégrales distinctes, et, par conséquent, je n'ai pas réussi non plus à déduire, de l'intégrale générale  $z_r = G(z)$  de l'équation (110), l'intégrale générale de l'équation adjointe.

*Proposition 18.* L'intégrale générale des équations (20) qui admettent une  $Y$ -intégrale est donnée par la formule

$$z = M \begin{vmatrix} \theta & \alpha_1 & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial^{r_1-1} \alpha_1}{\partial x^{r_1-1}} & \alpha_2 & \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial^{r_2-1} \alpha_2}{\partial x^{r_2-1}} & \cdots & \alpha_q & \frac{\partial \alpha_q}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial^{r_q-1} \alpha_q}{\partial x^{r_q-1}} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x \partial y} & \cdots & \frac{\partial^{r_1} \alpha_1}{\partial x^{r_1-1} \partial y} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x \partial y} & \cdots & \frac{\partial^{r_2} \alpha_2}{\partial x^{r_2-1} \partial y} & \cdots & \frac{\partial \alpha_q}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_q}{\partial x \partial y} & \cdots & \frac{\partial^{r_q} \alpha_q}{\partial x^{r_q-1} \partial y} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^r \theta}{\partial y^r} & \frac{\partial^r \alpha_1}{\partial y^r} & \frac{\partial^{r+1} \alpha_1}{\partial x \partial y^r} & \cdots & \frac{\partial^{r+r_1-1} \alpha_1}{\partial x^{r_1-1} \partial y^r} & \frac{\partial^r \alpha_2}{\partial y^r} & \frac{\partial^{r+1} \alpha_2}{\partial x \partial y^r} & \cdots & \frac{\partial^{r+r_2-1} \alpha_2}{\partial x^{r_2-1} \partial y^r} & \cdots & \frac{\partial^r \alpha_q}{\partial y^r} & \frac{\partial^{r+1} \alpha_q}{\partial x \partial y^r} & \cdots & \frac{\partial^{r+r_q-1} \alpha_q}{\partial x^{r_q-1} \partial y^r} \end{vmatrix} \equiv G(\theta);$$

$r = \sum_{i=1}^q r_i$ ;  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$ ,  $M$  étant des fonctions déterminées de  $x$  et de  $y$ ;  $\theta$  étant l'intégrale générale de l'équation



$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial y^2} & \dots & \frac{\partial^{q+1} \theta}{\partial x \partial y^q} \\ \alpha_1 & \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial^q \alpha_1}{\partial y^q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_q & \frac{\partial \alpha_q}{\partial y} & \frac{\partial^2 \alpha_q}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial^q \alpha_q}{\partial y^q} \end{vmatrix} = 0.$$

Inversement, chaque expression  $G(\theta)$  où  $\theta$  est définie de cette manière représente l'intégrale générale d'une équation du type (20) d'ordre  $n$  au plus. Lorsque  $s$ , et pas plus de  $s$ , relations distinctes de la forme

$$\sum_{i=1}^q f_i(x) G\left(\frac{\partial^{r_i} \alpha_i}{\partial x^{r_i}}\right) = 0$$

existent,  $G(\theta)$  est l'intégrale générale d'une équation du type (20) d'ordre  $n - s$ . — A l'aide des valeurs de  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ), nous pouvons reconnaître si l'équation qui définit  $\theta$  admet des  $X$ -intégrales et, dans ce cas, décider le rang de cette  $X$ -intégrale ou de ces  $X$ -intégrales. La condition nécessaire et suffisante pour que l'adjointe de l'équation en  $\theta$  admette une  $Y$ -intégrale de rang  $m + 1$  est que toutes les  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) satisfassent à une équation de la forme

$$\sum_{i=0}^{q+m} f_i(y) \frac{\partial^i \alpha}{\partial y^i} = 0 \quad (f_{q+m}(y) = 1)$$

et qu'elles ne satisfassent pas à une équation du même type, mais d'ordre moindre.

A l'aide des résultats obtenus dans ce chapitre, nous pouvons directement déduire une partie de ceux obtenus dans le chapitre précédent; l'équation traitée dans ce chapitre-là étant un cas spécial de l'équation traitée dans celui-ci. Nous avons déjà vu (page 151) que la proposition 15, pour le cas où  $r = 0$ , peut être déduite des résultats que nous avons obtenus ici, et ensuite, il est très facile de déduire la proposition 15 aussi pour le cas où  $r > 0$ .

## V.

Dans les chapitres précédents, nous sommes partis de l'équation (20). L'équation

$$\sum_{i=0}^{n-1} A_{1i} \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^n A_{0i} \frac{\partial^i z}{\partial y^i} = 0 \quad (A_{1, n-1} = 1)$$

peut, par un changement de variables indépendantes, se mettre sous la forme (20). Maintenant nous allons succinctement étudier comment la méthode de Laplace s'applique à l'équation

$$\sum_{i=0}^{n-1} A_{1i} \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^n A_{0i} \frac{\partial^i z}{\partial y^i} = 0 \quad (A_{1, n-1} = 0; A_{0n} \neq 0).$$

Cette équation je l'écris (26)

$$\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^n B_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} = 0 \quad (A_q = 1; B_n \neq 0; q+1 < n).$$

L'équation (26) n'admet qu'un système de caractéristiques, c'est-à-dire le système de caractéristiques multiple d'ordre  $n$

$$x = \text{const.}$$

Lorsque l'équation (26) admet une intégrale de la forme d'Euler, celle-ci doit par suite être une  $X$ -intégrale. Si

$$\alpha_0 X_3^{(m)} + \alpha_1 X^{(m-1)} + \dots + \alpha_m X$$

est une intégrale de l'équation (26), il faut que l'on ait

$$\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0;$$

il en résulte que l'équation (26) n'admet qu'au plus  $q$   $X$ -intégrales distinctes. L'intégrale générale de l'équation (26) ne peut par suite jamais être représentée par des intégrales de la forme d'Euler.

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (26) admette  $s$   $X$ -intégrales distinctes de rang 1 est que les deux équations

$$\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0, \quad \sum_{i=0}^n B_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} - \sum_{i=0}^q \frac{\partial A_i}{\partial x} \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0$$

admettent  $s$  intégrales distinctes communes. La condition nécessaire et suffisante pour cela est obtenue par des différentiations et des éliminations. Si nous différencions la première équation  $j + n - q - 1$  fois par rapport à  $y$  et la dernière équation  $j - 1$  fois par rapport à  $y$  et que nous éliminons les  $2j + n - q - 1$  quantités

$$\frac{\partial^h \alpha_0}{\partial y^h} \quad (h = q - j + 1, q - j + 2, \dots, n + j - 1)$$

entre les équations obtenues, nous aurons une équation de la forme

$$\sum_{i=0}^{q-j} P_{ij} \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0,$$

les coefficients  $P_{ij}$  étant des déterminants d'ordre  $2j + n - q$ . La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (26) admette  $s$   $X$ -intégrales distinctes de rang 1 est  $P_{i, q-i} = 0$  ( $i = 0, 1, \dots, s-1$ ). Si nous supposons  $P_{i, q-i} = 0$  ( $i = 0, 1, \dots, s-1$ ),  $P_{s, q-s} \neq 0$ , nous pourrions mettre l'équation (26) sous la forme

$$\left[ \sum_{i=0}^{q-s} M_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^{n-s} N_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right] \sum_{h=0}^s \frac{P_{h, q-s}}{P_{s, q-s}} \frac{\partial^h z}{\partial y^h} = 0,$$

les coefficients  $M_i$ ,  $N_i$  étant des fonctions de  $x$  et de  $y$ .

Nous désignons toujours la transformation

$$z_1 = \alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{\alpha_0}, \quad \text{où} \quad \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0,$$

comme une transformation  $(t_1)$ . Par cette transformation l'équation (26) est ramenée à l'équation

$$\alpha_0 \bar{B}_0 \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{\bar{B}_0} \left( \sum_{i=1}^q \bar{A}_i \frac{\partial^i}{\partial x \partial y^{i-1}} + \sum_{i=1}^n \bar{B}_i \frac{\partial^{i-1}}{\partial y^{i-1}} \right) \frac{z_1}{\alpha_0} \right] + \bar{B}_0 z_1 = 0,$$

$$\text{où} \quad \begin{cases} \bar{A}_i = \frac{1}{\alpha_0} \sum_{j=0}^{q-i} \frac{(i+j)!}{i! j!} A_{i+j} \frac{\partial^j \alpha_0}{\partial y^j}, \\ \bar{B}_i = \frac{1}{\alpha_0} \sum_{j=0}^{n-i} \frac{(i+j)!}{i! j!} B_{i+j} \frac{\partial^j \alpha_0}{\partial y^j} + \frac{1}{\alpha_0} \sum_{j=0}^{q-i} \frac{(i+j)!}{i! j!} A_{i+j} \frac{\partial^{j+1} \alpha_0}{\partial x \partial y^j}, \end{cases}$$

pourvu que  $\bar{B}_0 \neq 0$ . La transformation

$$! \quad z_1 = \alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{\alpha_0}, \quad \text{où} \quad \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0, \quad \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^{i+1} \alpha_0}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^n B_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} \neq 0,$$

appliquée à l'équation (26), conduit ainsi à une équation de même type et de même ordre; les deux équations s'intègrent en même temps; de chaque intégrale de l'une des équations, nous obtiendrons sans intégration une intégrale de l'autre équation. Par la transformation



$$z_1 = \alpha_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{z}{\alpha_0}$$

le rang de la  $X$ -intégrale correspondant à  $\alpha_0$  est diminué d'une unité. Si nous appliquons une transformation  $(t_1)$  à une équation (26) qui admet les  $s$   $X$ -intégrales (29), nous obtiendrons les mêmes résultats que pour l'équation (20) (voir les propositions 4 et 5), et de la même manière. Il en résulte que la condition nécessaire et suffisante pour que les  $s$   $X$ -intégrales (29) de l'équation (26) ne puissent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur à  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_s + 1$  est qu'aucune relation de la forme

$$\sum_{j=1}^s \sum_{i=0}^{m_j} f_{ij}(x) \alpha_{ij} = 0$$

n'existe. Ensuite il en résulte aussi que, lorsque l'équation (26) admet  $s$   $X$ -intégrales distinctes (29) qui ne peuvent être remplacées par des  $X$ -intégrales de rang inférieur à  $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots, m_s + 1$ , l'équation (26) peut être ramenée, à l'aide de  $\sum_{i=1}^s (m_i + 1)$  transformations  $(t_1)$ , convenablement choisies, à une équation de la forme

$$\sum_{i=0}^{q-s} A_{ih} \frac{\partial^{i+1} z_h}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^{n-s} B_{ih} \frac{\partial^i z_h}{\partial y^i} = 0, \text{ où } A_{q-s, h} = 1, \quad B_{n-s, h} \neq 0.$$

$$\left( h = \sum_{i=1}^s (m_i + 1) \right)$$

Mais, si  $q > 1$ , la transformation  $(t_1)$  n'est pas complètement déterminée;  $\alpha_0$  est assujettie à la seule condition

$$\sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0,$$

et nous ne pouvons pas d'avance choisir celles des transformations  $(t_1)$  par lesquelles l'ordre de l'équation pourra être diminué.

Les transformations  $(t_2), (t_3), \dots, (t_q)$  de l'équation (26) sont définies de la même manière que ces transformations de l'équation (20) (voir page 35). La transformation complètement déterminée  $(t_q)$

$$z_q = \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i}$$

sera aussi notée par la lettre  $(T_1)$ . Toutes les transformations  $(t_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) peuvent être considérées comme des transformations de Laplace à l'équation (26).

La transformation complètement déterminée de Laplace  $(T_1)$ , appliquée à l'équation (26), conduit à une équation de même type et de même ordre au plus. La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation obtenue soit d'ordre  $n - s$  est que l'équation (26) admette  $s$ , et pas plus de  $s$ ,  $X$ -intégrales distinctes de rang 1. Si nous appliquons la transformation  $(T_1)$  à une équation (26) qui admet les  $s$   $X$ -intégrales (29), nous obtiendrons les mêmes résultats que pour l'équation (20)

(voir les propositions 6 et 7); la transformation  $(T_1)$  diminue ainsi le rang de chaque  $X$ -intégrale d'une unité.

L'équation donnée (26) est notée par la lettre  $(E)$ . Si nous appliquons la transformation complètement déterminée  $(T_1)$  plusieurs fois de suite, nous obtiendrons une série d'équations de même type et d'ordre  $n$  au plus, qui sont notées par  $(E_1)$ ,  $(E_2)$ ,  $(E_3)$  etc.; dans cette série, chaque équation suivante est au plus de même ordre que l'équation précédente.

En appliquant la transformation  $(T_1)$  plusieurs fois de suite à l'équation  $(E)$  nous pouvons reconnaître si l'équation  $(E)$  admet de  $X$ -intégrales. La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation  $(E)$  admette  $s$   $X$ -intégrales distinctes de rang inférieur à  $m + 2$ , est que l'équation  $(E_{m+1})$  soit d'ordre  $n - s$ . Les  $X$ -intégrales de l'équation (26) sont obtenues de la même manière que les  $X$ -intégrales de l'équation (20). Pour obtenir les  $X$ -intégrales de l'équation (26), il ne faut que l'intégration d'équations différentielles linéaires, de règle, du premier ordre, dans des cas spéciaux, d'ordre supérieur. Pour chaque  $X$ -intégrale obtenue de l'équation (26), l'ordre de l'équation peut être diminué d'une unité.

Les résultats obtenus jusqu'ici pour l'équation (26) sont identiques aux résultats correspondants, obtenus pour l'équation (20).

La transformation inverse à la transformation

$$z_1 = \alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} \frac{z}{\alpha_0}, \quad \text{où} \quad \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0,$$

est

$$z = -\frac{\alpha_0}{B_0} \left( \sum_{i=1}^q \bar{A}_i \frac{\partial^i}{\partial x \partial y^{i-1}} + \sum_{i=1}^n \bar{B}_i \frac{\partial^{i-1}}{\partial y^{i-1}} \right) \frac{z_1}{\alpha_0}.$$

L'équation (26) peut s'écrire

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \gamma \left( \sum_{i=0}^{q-1} R_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^{n-1} S_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \right) \right] + Tz = 0 \quad [R_{q-1} = 1; S_{n-1} \neq 0; T \neq 0],$$

$R_i$ ,  $S_i$ ,  $T$ ,  $\gamma$  étant des fonctions de  $x$  et de  $y$ , si l'équation adjointe (28)

$$\sum_{i=0}^q (-1)^{i+1} \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} (A_i u) + \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{\partial^i}{\partial y^i} (B_i u) = 0$$

n'admet pas  $q$   $X$ -intégrales distinctes de rang 1. La transformation  $(t_{-1})$

$$z_{-1} = \sum_{i=0}^{q-1} R_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^{n-1} S_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i}$$

est, à un facteur près qui est une fonction déterminée de  $x$  et de  $y$ , inverse à une transformation  $(t_1)$ .

Les transformations  $(t_{-j})$  ( $j = 1, 2 \dots q$ ) peuvent être définies de la même manière dont ont été définies les transformations en question de l'équation (20)

(voir page 48), c'est-à-dire comme les transformations inverses, à un facteur près, aux transformations  $(t_j)$ . La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (26) admette une transformation  $(t_{-j})$  est que l'équation adjointe (28) admette au plus  $q - j$  X-intégrales distinctes de rang 1. Écrivons

$$\mathcal{E}_k(z) \equiv \sum_{i=k}^q (-1)^{q-i} \frac{\partial^{i+1-k}}{\partial x \partial y^{i-k}} (C_i z) - \sum_{i=k}^n (-1)^{q-i} \frac{\partial^{i-k}}{\partial y^{i-k}} (D_i z) \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

les coefficients  $C_i, D_i$  étant définis par l'identité

$$(-1)^q \left[ \sum_{i=0}^q (-1)^i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} (A_i u) - \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{\partial^i}{\partial y^i} (B_i u) \right] \equiv \sum_{i=0}^q C_i \frac{\partial^{i+1} u}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^n D_i \frac{\partial^i u}{\partial y^i}.$$

Une transformation  $(t_{-j})$  est de la forme

$$z_{-j} = \sum_{i=0}^{q-1} T_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^{n-1} U_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} \equiv \sum_{i=1}^n c_i \mathcal{E}_i(z);$$

les coefficients  $T_i$  vérifient les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations

$$\sum_{i=0}^{q-1} T_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0, \quad \sum_{i=0}^q A_i \frac{\partial^i \alpha_0}{\partial y^i} = 0$$

admettent  $q - j$  intégrales distinctes en commun, et, de plus, les coefficients  $c_i$  satisfont à  $n - q + j - 1$  relations linéaires et homogènes; ces dernières relations peuvent s'écrire

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{q+h} (-1)^i \left[ c_{i+1} \sum_{k=0}^h \frac{h}{k! (h-k)!} C_{i+k-h}^{(k)} \right] = 0 & (h = 0, 1, \dots, n - q - 1), \\ \sum_{i=0}^{q-h} (-1)^i c_{i+1} Q_{ih} = 0 & (h = 1, 2, \dots, j - 1), \end{cases}$$

pourvu que  $Q_{q-i, i} \neq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, j - 2$ ); dans le cas où

$$Q_{q-i, i} \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s - 1, s + 1, \dots, j - 2), \quad Q_{q-s, s} = 0, \quad (s \leq j - 2)$$

la relation

$$\sum_{i=0}^{q-s} (-1)^i c_{i+1} (Q_{i-1, s} + Q'_{is}) = 0$$

y est ajoutée etc., tout à fait comme pour l'équation (20). Dans ces formules la désignation  $C_i^{(k)} = \frac{\partial^k C_i}{\partial y^k}$  est employée, et  $Q_{ih}$  ont été formés des coefficients de l'équation (28) de la même manière dont  $P_{ih}$  ont été formés des coefficients de l'équation (26). Les relations en question sont obtenues de la même manière, à peu près, que les relations (56') et (56''). La transformation  $(t_{-q})$ , aussi désignée  $(T_{-1})$ , est par là complètement déterminée, à un facteur près.

Nous trouvons de la même manière que pour l'équation (20) (voir proposition 9) que, si l'équation (26) est ramenée à une équation de même ordre par une transformation  $(t_j)$   $[(t_{-j})]$ , il existe aussi une transformation  $(t_j)$   $[(t_{-j})]$  respectivement,



par laquelle l'adjointe de cette équation est ramenée à l'équation (28); cette proposition est valable pour  $j = 1, 2, \dots, q$ . Les transformations  $(t_{-j})$  ( $j = 1, 2, \dots, q$ ) ont été définies comme inverses aux transformations  $(t_j)$  ( $j = 1, 2, \dots, q$ ). Pour l'équation (20) nous pourrions aussi définir la transformation  $(t_{-j})$  ( $q \geq j \geq 1$ ) en partant directement de son caractère d'être une transformation de Laplace. Pour l'équation (26) cette définition de la transformation  $(t_{-j})$  ( $q \geq j \geq 1$ ) est hors de question, car la transformation  $(t_{-j})$  n'est pas une transformation de Laplace à l'équation (26). Nous ne pourrions non plus obtenir une intégrale de la forme d'Euler de l'équation (26) en appliquant les transformations  $(t_{-j})$  ( $j = 1, 2, \dots, q$ ). Les transformations en question peuvent cependant être d'intérêt: Si l'équation adjointe (28) admet une  $X$ -intégrale de rang  $m + 1$ , nous obtiendrons en appliquant la transformation complètement déterminée  $(T_{-1})$   $m$  fois de suite une équation de la forme

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \gamma \left( \sum_{i=0}^{q-1} R_i \frac{\partial^{i+1}}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^{n-1} S_i \frac{\partial^i}{\partial y^i} \right) Z_{-m} \right] = 0 \quad (R_{q-1} = 1; \quad S_{n-1} \neq 0),$$

dont l'ordre peut être directement diminué d'une unité; et si l'équation adjointe (28) admet  $s$   $X$ -intégrales distinctes, nous pourrions de même ramener l'intégration de l'équation (26) à l'intégration d'une équation du même type et d'ordre  $n - s$ ; il faut pourtant remarquer que le second membre de la dernière équation est une fonction linéaire de  $s$  fonctions arbitraires de  $x$  et de ses dérivées.

L'intégration de l'équation (26) ne peut jamais être ramenée à l'intégration d'équations différentielles linéaires par la méthode de Laplace. En appliquant les transformations  $(T_1)$  et  $(T_{-1})$  nous pourrions diminuer l'ordre de l'équation (26) de  $q$  unités au plus, et l'intégration de l'équation pourra être ramenée à l'intégration d'une équation de la forme

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \sum_{i=0}^{n-q} b_i \frac{\partial^i z}{\partial y^i} = 0 \quad (b_{n-q} \neq 0),$$

les coefficients  $b_i$  étant des fonctions de  $x$  et de  $y$ .

De même que pour l'équation (20), nous trouverons que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (26) admette une  $X$ -intégrale de rang  $m + 1$  correspondant à  $\alpha_0$ , est que l'équation adjointe (28) admette une intégrale intermédiaire de la forme

$$\sum_{i=0}^{m+1} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{i+j} \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} (\lambda_{i,j+1} u) = X,$$

où  $\lambda_{m+1,q} = \alpha_0$  et où  $\lambda_{m+1,i} = 0$  pour  $i > q$ . Si l'intégrale intermédiaire de l'équation (28) est donnée, nous obtiendrons la  $X$ -intégrale de l'équation (26) sans intégration; et inversement.

En effectuant la substitution  $z = \lambda \bar{z}$ , l'équation (26) s'écrit

$$\sum_{i=0}^q \bar{A}_i \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^n \bar{B}_i \frac{\partial^i \bar{z}}{\partial y^i} = 0,$$

où

$$\begin{cases} \bar{A}_i = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{q-i} \frac{(i+j)!}{i! j!} A_{i+j} \frac{\partial^j \lambda}{\partial y^j}, \\ \bar{B}_i = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{n-i} \frac{(i+j)!}{i! j!} B_{i+j} \frac{\partial^j \lambda}{\partial y^j} + \frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{q-i} \frac{(i+j)!}{i! j!} A_{i+j} \frac{\partial^{j+1} \lambda}{\partial x \partial y^j}. \end{cases}$$

Les fonctions des coefficients de l'équation (26) qui ne changent pas pour la substitution  $z = \lambda \bar{z}$  peuvent être obtenues de la manière suivante. Écrivons

$$I_i = \frac{1}{\nu} \sum_{j=0}^{q-i} \frac{(i+j)!}{i! j!} A_{i+j} \frac{\partial^j \nu}{\partial y^j} \quad (i = 0, 1, \dots, q-2), \quad \text{où} \quad \frac{\partial \log \nu}{\partial y} = -\frac{1}{q} A_{q-1},$$

$$H_i = \frac{1}{\nu} \sum_{j=0}^{n-i} \frac{(i+j)!}{i! j!} B_{i+j} \frac{\partial^j \nu}{\partial y^j} \quad (i = q, q+1, \dots, n), \quad \text{où} \quad \frac{\partial \log \nu}{\partial y} = -\frac{1}{q} A_{q-1}.$$

$$I_{q-1} = \frac{\partial A_{q-1}}{\partial x} - q \frac{\partial H_q}{\partial y}.$$

Les  $q$  fonctions  $I_i$  ( $i = 0, 1, \dots, q-1$ ) et les  $n-q$  fonctions  $H_i$  ( $i = q+1, q+2, \dots, n$ ) ne changent pas pour la substitution  $z = \lambda \bar{z}$ . Écrivons ensuite

$$H_i = \frac{1}{\nu} \sum_{j=0}^{q-i} \frac{(i+j)!}{i! j!} \left( \frac{\partial A_{i+j}}{\partial x} + A_{i+j} H_q \right) \frac{\partial^j \nu}{\partial y^j} - \frac{1}{\nu} \sum_{j=0}^{n-i} \frac{(i+j)!}{i! j!} B_{i+j} \frac{\partial^j \nu}{\partial y^j}$$

$$(i = 0, 1, \dots, q-1),$$

$$\text{où} \quad \frac{\partial \log \nu}{\partial y} = -\frac{1}{q} A_{q-1}.$$

Les  $q$  quantités  $H_i$  ( $i = 0, 1, \dots, q-1$ ) ne changent pas non plus pour la substitution  $z = \lambda \bar{z}$ . Lorsque  $A_{q-1} = 0$ , nous obtiendrons

$$I_{q-1} = -q \frac{\partial B_q}{\partial y}, \quad I_i = A_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-2),$$

$$H_i = B_i \quad (i = q+1, q+2, \dots, n), \quad H_i = \frac{\partial A_i}{\partial x} + A_i B_q - B_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-1).$$

Il en résulte que deux équations de la forme (26) qui ont les mêmes valeurs des  $n+q$  invariants

$$I_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-1), \quad H_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-1, q+1, \dots, n)$$

peuvent se ramener l'une à l'autre par une substitution de la forme  $z = \lambda \bar{z}$ . Et tout invariant de l'équation (26) est ainsi une fonction des  $n+q$  invariants

$$I_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-1), \quad H_i \quad (i = 0, 1, \dots, q-1, q+1, \dots, n).$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (26) admette  $s$  X-intégrales distinctes de rang 1 est que les deux équations

$$\frac{\partial^q \alpha}{\partial y^q} + \sum_{i=0}^{q-2} I_i \frac{\partial^i \alpha}{\partial y^i} = 0, \quad \sum_{i=q+1}^n H_i \frac{\partial^i \alpha}{\partial y^i} + \sum_{i=0}^{q-1} H_i \frac{\partial^i \alpha}{\partial y^i} = 0$$

admettent  $s$  intégrales distinctes communes. Nous obtiendrons de cette manière les conditions que les invariants doivent vérifier pour que l'équation admette  $s$   $X$ -intégrales distinctes de rang 1. — Je n'ai pas encore examiné les relations qu'il y a entre les invariants de l'équation (26) et ceux de l'équation ( $E_1$ ).

Le critérium de Goursat est valable sans changement pour l'équation (26) et se prouve de la même manière que pour l'équation (20).

Les résultats des chapitres III et IV ne peuvent naturellement pas être étendus à l'équation (26).

Par ces recherches, j'ai généralisé quelques-uns des résultats les plus importants obtenus par Darboux pour l'équation (1)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial y} + b \frac{\partial z}{\partial x} + cz = 0.$$

J'ai montré que ces résultats sont essentiellement valables aussi bien pour l'équation (19)

$$\sum_{i=0}^{n-1} A_{0i} \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^n A_{1i} \frac{\partial^i z}{\partial y^i} = 0.$$

Mes recherches peuvent sans doute être complétées à plusieurs points; comme je l'ai indiqué de temps en temps au cours de ce travail.

Il ne serait pas sans intérêt d'appliquer les résultats obtenus ici à quelques équations peu compliquées du type considéré pour les soumettre à un examen plus approfondi. Je pense aux équations qui sont identiques à leur équation adjointe; pour le cas où  $n=2$ , elles ont été étudiées par Moutard<sup>1)</sup> et, plus tard, par Darboux<sup>2)</sup>. Je pense aussi aux équations de la forme

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{(x-y)^{n-i-1}} \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b_i}{(x-y)^{n-i}} \frac{\partial^i z}{\partial y^i} = 0 \quad (a_{n-1} = 1),$$

où  $a_i, b_i$  sont des constantes; pour le cas où  $n=2$  examinées par Darboux<sup>3)</sup>.

Il y a plus d'un problème d'intérêt pour l'application de la méthode de Laplace à l'équation (19)

$$\sum_{i=0}^{n-1} A_{0i} \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^n A_{1i} \frac{\partial^i z}{\partial y^i} = 0$$

que je n'ai point discutés dans cette thèse. Surtout il aurait intérêt à comparer les méthodes de Darboux et de Laplace, à examiner si l'application des deux

<sup>1)</sup> Journal de l'École Polytechnique. Cahier 45, 1878.

<sup>2)</sup> DARBOUX, Leçons. Partie II, Livre IV, Chap. VII.

<sup>3)</sup> DARBOUX, Leçons. Partie II, Livre IV, Chap. III.



méthodes amènerait les mêmes résultats pour les mêmes équations de la forme (19). La question de savoir à quel point l'intégration de l'équation (19) peut être simplifiée par la méthode de Darboux est d'importance pour l'équation générale

$$F \left( \frac{\partial^n z}{\partial x \partial y^{n-1}}, \frac{\partial^n z}{\partial y^n}, \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x \partial y^{n-2}}, \frac{\partial^{n-1} z}{\partial y^{n-1}}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, z, x, y \right) = 0;$$

celle-ci étant intégrable par la méthode de Darboux en même temps que l'équation auxiliaire

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial p_{1, n-1}} \frac{\partial^n z'}{\partial x \partial y^{n-1}} + \frac{\partial F}{\partial p_{0n}} \frac{\partial^n z'}{\partial y^n} + \frac{\partial F}{\partial p_{1, n-2}} \frac{\partial^{n-1} z'}{\partial x \partial y^{n-2}} + \frac{\partial F}{\partial p_{0, n-1}} \frac{\partial^{n-1} z'}{\partial y^{n-1}} + \dots \\ + \frac{\partial F}{\partial p_{10}} \frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial p_{01}} \frac{\partial z'}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} z' = 0, \end{aligned}$$

la désignation  $p_{ij} = \frac{\partial^{i+j} z}{\partial x^i \partial y^j}$  étant employée; et la dernière équation est de la forme (19), lorsque  $z'$  est considérée comme la variable dépendante.

### Errata.

Page 72, ligne 3 d'en bas, *au lieu de*  $(i = 0, 1, \dots, q-1)$  *lisez*  $(i = 0, 1, \dots, q-2)$   
*et ajoutez*  $H_{q-1} - K_{q-1} = I_{q-1}$ .

Page 127, ligne 8 d'en bas, *au lieu de* (20) *lisez* (23) de l'intégrale générale de l'équation (20).



DIE  
LAGRANGE'SCHE GLEICHUNG  
IM  
BAHNBESTIMMUNGSPROBLEM

VON  
C. V. L. CHARLIER

---

LUND 1911  
HÅKAN OHLSSONS BUCHDRUCKERI





1. Es seien drei in der Zeit genügend nahe liegenden Beobachtungen eines Planeten (oder Kometen) gegeben. Dann ist der genäherte Werth des Abstandes des Planeten zur Zeit der ersten Beobachtung durch eine gewisse Gleichung achten Grades gegeben, die von LAGRANGE im Jahre 1778 aufgestellt worden ist. Wenn  $r$  den Abstand des Planeten von der Sonne,  $\rho$  den Abstand von der Erde bezeichnet, wenn ferner

$$(1) \quad \zeta = \frac{\rho}{R}, \quad \eta = \frac{r}{R}$$

und  $R$  den Radius Vector der Erde bedeutet, so hat diese Gleichung die Form

$$(2) \quad \zeta = \lambda \left( 1 - \frac{1}{\eta^3} \right).$$

Hier ist  $\lambda$  eine Konstante, die durch die Beobachtungen bekannt ist. Zwischen  $\eta$  und  $\zeta$  besteht die Relation

$$(3) \quad \eta^2 = 1 + 2n\zeta + \zeta^2.$$

Die Grösse  $n$  ist ebenfalls durch die Beobachtungen bekannt indem nämlich

$$(3^*) \quad n = -\cos \phi,$$

wo  $\phi$  den Winkel Planet—Erde—Sonne bezeichnet.

Wird zwischen (2) und (3)  $\zeta$  eliminirt entsteht eine Gleichung achten Grades, welche den Werth des Abstandes des Planeten von der Sonne giebt. In den »Médélände» N:o 45 habe ich diese Gleichung studirt und folgende Sätze bewiesen.

Die Gleichung hat eine Wurzel gleich der Einheit. Diese Wurzel entspricht der Erdbahn und hat Nichts mit unserem Problem zu thun;

Die Gleichung hat weiter eine negative Wurzel, zwei positive und 4 imaginäre Wurzeln.

Von diesen kommen die 2 positiven Wurzeln allein in Betracht. Es wurde in der citirten Abhandlung bewiesen, dass diese beiden Wurzeln zwei verschiedene Lösungen des Problems darstellen, so oft der Planet sich in den mit  $A$  und  $C$  bezeichneten Gebieten befindet (man vergleiche die Figur am Ende dieses Aufsatzes). In den Gebieten  $B$  und  $D$  ist eine einzige Lösung des Bahnbestimmungsproblems möglich.

Zweck der vorliegenden Abhandlung ist die Methoden zur numerischen Berechnung der Wurzeln zu untersuchen.

2. Wenn  $\lambda$  gegeben ist, stellt (2) die Gleichung einer Kurve dar, die am leichtesten konstruirt wird, indem  $\zeta$  und  $\eta$  als bipolare Koordinaten, mit den Centren *bez.* in der Erde und in der Sonne, betrachtet werden. Für  $\lambda = \infty$  ist diese Kurve ein Kreis mit dem Radius gleich der Einheit und mit dem Mittelpunkt in der Sonne. Statt  $\lambda$  führe ich einen anderen Parameter  $\kappa$  durch die Relation

$$\kappa = -1 : \lambda$$

ein, so dass (2) lautet

$$(2^*) \quad \frac{1}{\eta^3} = 1 + \kappa \zeta.$$

oder

$$\zeta = \frac{1}{\kappa} \left( \frac{1}{\eta^3} - 1 \right).$$

Für  $\kappa = 0$  erhält man den eben erwähnten Einheitskreis, für  $\kappa$  *positiv* liegt die Kurve (2\*) *innerhalb*, für  $\kappa$  *negativ ausserhalb* dieses Kreises. Bei den numerischen Rechnungen brauchen nur solche Werthe von  $\zeta$  und  $\eta$  berücksichtigt zu werden, welche die Ungleichheiten

$$(4) \quad \begin{aligned} \zeta + \eta &> 1 \\ \eta + 1 &> \zeta \\ 1 + \zeta &> \eta \end{aligned}$$

befriedigen.

Die nachfolgende Tafel giebt die Werthe für  $\zeta$ , die man aus (2\*) erhält, indem der Grösse  $\kappa$  eine Reihe von Werthen zugetheilt wird.



Tab. I.

$$\zeta = \frac{1}{\kappa} \left( \frac{1}{\eta^3} - 1 \right)$$

$\kappa = + 0.1$		$\kappa = + 0.2$		$\kappa = + 0.3$		$\kappa = + 0.4$		$\kappa = + 0.5$	
$\eta$	$\zeta$	$\eta$	$\zeta$	$\eta$	$\zeta$	$\eta$	$\zeta$	$\eta$	$\zeta$
0.0	$\infty$	0.0	$\infty$	0.0	$\infty$	0.0	$\infty$	0.0	$\infty$
0.1	9990.0000	0.1	4995.0000	0.1	3329.9667	0.1	2497.5000	0.1	1998.0000
0.2	1240.0000	0.2	620.0000	0.2	413.3292	0.2	310.0000	0.2	248.0000
0.3	360.0000	0.3	180.0000	0.3	119.9988	0.3	90.0000	0.3	72.0000
0.4	146.2500	0.4	73.1250	0.4	48.7495	0.4	36.5625	0.4	29.2500
0.5	70.0000	0.5	35.0000	0.5	23.3331	0.5	17.5000	0.5	14.0000
0.6	36.2960	0.6	18.1480	0.6	12.0985	0.6	9.0740	0.6	7.2592
0.7	19.1550	0.7	9.5775	0.7	6.3849	0.7	4.7888	0.7	3.8310
0.8	9.5310	0.8	4.7655	0.8	3.1770	0.8	2.3828	0.8	1.9062
0.9	3.7170	0.9	1.8585	0.9	1.2390	0.9	0.9293	0.9	0.7434
1.0	0.0000	1.0	0.0000	1.0	0.0000	1.0	0.0000	1.0	0.0000
1.0	0.0000	1.0	0.0000	1.0	0.0000	1.0	0.0000	1.0	0.0000
1.1	— 2.4870	1.1	— 1.2435	1.1	— 0.8290	1.1	— 0.6218	1.1	— 0.4974
1.2	— 4.2130	1.2	— 2.1065	1.2	— 1.4043	1.2	— 1.0533	1.2	— 0.8426
1.3	— 5.4480	1.3	— 2.7240	1.3	— 1.8160	1.3	— 1.3620	1.3	— 1.0896
1.4	— 6.3560	1.4	— 3.1780	1.4	— 2.1186	1.4	— 1.5890	1.4	— 1.2712
1.5	— 7.0370	1.5	— 3.5185	1.5	— 2.3456	1.5	— 1.7593	1.5	— 1.4074
1.6	— 7.5590	1.6	— 3.7795	1.6	— 2.5196	1.6	— 1.8898	1.6	— 1.5118
1.7	— 7.9650	1.7	— 3.9825	1.7	— 2.6550	1.7	— 1.9913	1.7	— 1.5930
1.8	— 8.2850	1.8	— 4.1425	1.8	— 2.7616	1.8	— 2.0713	1.8	— 1.6570
1.9	— 8.5420	1.9	— 4.2710	1.9	— 2.8473	1.9	— 2.1355	1.9	— 1.7084
2.0	— 8.7500	2.0	— 4.3750	2.0	— 2.9166	2.0	— 2.1875	2.0	— 1.7500
2.1	— 8.9200	2.1	— 4.4600	2.1	— 2.9733	2.1	— 2.2300	2.1	— 1.7840
2.2	— 9.0610	2.2	— 4.5305	2.2	— 3.0203	2.2	— 2.2653	2.2	— 1.8122
2.3	— 9.1780	2.3	— 4.5890	2.3	— 3.0593	2.3	— 2.2945	2.3	— 1.8356
2.4	— 9.2760	2.4	— 4.6380	2.4	— 3.0920	2.4	— 2.3190	2.4	— 1.8552
2.5	— 9.3600	2.5	— 4.6800	2.5	— 3.1200	2.5	— 2.3400	2.5	— 1.8720
2.6	— 9.4310	2.6	— 4.7155	2.6	— 3.1436	2.6	— 2.3578	2.6	— 1.8862
2.7	— 9.4920	2.7	— 4.7460	2.7	— 3.1640	2.7	— 2.3730	2.7	— 1.8984
2.8	— 9.5440	2.8	— 4.7720	2.8	— 3.1813	2.8	— 2.3860	2.8	— 1.9088
2.9	— 9.5900	2.9	— 4.7950	2.9	— 3.1966	2.9	— 2.3975	2.9	— 1.9180
3.0	— 9.6300	3.0	— 4.8150	3.0	— 3.2100	3.0	— 2.4075	3.0	— 1.9260

$\kappa = + 0.6$		$\kappa = + 0.7$		$\kappa = + 0.8$		$\kappa = + 0.9$		$\kappa = + 1.0$	
$\eta$	$\zeta$	$\eta$	$\zeta$	$\eta$	$\zeta$	$\eta$	$\zeta$	$\eta$	$\zeta$
0.0	$\infty$	0.0	$\infty$	0.0	$\infty$	0.0	$\infty$	0.0	$\infty$
0.1	1665.0333	0.1	1427.1714	0.1	1248.7500	0.1	1109.9889	0.1	999.0000
0.2	206.6708	0.2	177.1464	0.2	155.0000	0.2	137.7764	0.2	124.0000
0.3	60.0012	0.3	51.4296	0.3	45.0000	0.3	39.9996	0.3	36.0000
0.4	24.3755	0.4	20.8933	0.4	18.2813	0.4	16.2498	0.4	14.6250
0.5	11.6669	0.5	10.0002	0.5	8.7500	0.5	7.7777	0.5	7.0000
0.6	6.0495	0.6	5.1852	0.6	4.5370	0.6	4.0328	0.6	3.6296
0.7	3.1926	0.7	2.7365	0.7	2.3944	0.7	2.1283	0.7	1.9155
0.8	1.5885	0.8	1.3616	0.8	1.1914	0.8	1.0590	0.8	0.9531
0.9	0.6195	0.9	0.5310	0.9	0.4646	0.9	0.4130	0.9	0.3717
1.0	0.0000	1.0	0.0000	1.0	0.0000	1.0	0.0000	1.0	0.0000
1.0	0.0000	1.0	0.0000	1.0	0.0000	1.0	0.0000	1.0	0.0000
1.1	— 0.4145	1.1	— 0.3553	1.1	— 0.3109	1.1	— 0.2763	1.1	— 0.2487
1.2	— 0.7022	1.2	— 0.6019	1.2	— 0.5266	1.2	— 0.4681	1.2	— 0.4213
1.3	— 0.9080	1.3	— 0.7783	1.3	— 0.6810	1.3	— 0.6053	1.3	— 0.5448
1.4	— 1.0594	1.4	— 0.9080	1.4	— 0.7945	1.4	— 0.7062	1.4	— 0.6356
1.5	— 1.1729	1.5	— 1.0053	1.5	— 0.8796	1.5	— 0.7819	1.5	— 0.7037
1.6	— 1.2599	1.6	— 1.0799	1.6	— 0.9449	1.6	— 0.8399	1.6	— 0.7559
1.7	— 1.3275	1.7	— 1.1379	1.7	— 0.9956	1.7	— 0.8850	1.7	— 0.7965
1.8	— 1.3809	1.8	— 1.1836	1.8	— 1.0356	1.8	— 0.9205	1.8	— 0.8285
1.9	— 1.4237	1.9	— 1.2203	1.9	— 1.0678	1.9	— 0.9491	1.9	— 0.8542
2.0	— 1.4584	2.0	— 1.2500	2.0	— 1.0938	2.0	— 0.9722	2.0	— 0.8750
2.1	— 1.4867	2.1	— 1.2743	2.1	— 1.1150	2.1	— 0.9911	2.1	— 0.8920
2.2	— 1.5102	2.2	— 1.2945	2.2	— 1.1326	2.2	— 1.0068	2.2	— 0.9061
2.3	— 1.5297	2.3	— 1.3112	2.3	— 1.1473	2.3	— 1.0198	2.3	— 0.9178
2.4	— 1.5460	2.4	— 1.3252	2.4	— 1.1595	2.4	— 1.0307	2.4	— 0.9276
2.5	— 1.5600	2.5	— 1.3372	2.5	— 1.1700	2.5	— 1.0400	2.5	— 0.9360
2.6	— 1.5719	2.6	— 1.3473	2.6	— 1.1789	2.6	— 1.0479	2.6	— 0.9431
2.7	— 1.5820	2.7	— 1.3560	2.7	— 1.1865	2.7	— 1.0547	2.7	— 0.9492
2.8	— 1.5907	2.8	— 1.3635	2.8	— 1.1930	2.8	— 1.0604	2.8	— 0.9544
2.9	— 1.5984	2.9	— 1.3700	2.9	— 1.1988	2.9	— 1.0655	2.9	— 0.9590
3.0	— 1.6050	3.0	— 1.3757	3.0	— 1.2038	3.0	— 1.0700	3.0	— 0.9630

$\kappa = +1.5$		$\kappa = +2.0$		$\kappa = +2.5$		$\kappa = +3.0$		$\kappa = +3.5$	
$\eta$	$\zeta$	$\eta$	$\zeta$	$\eta$	$\zeta$	$\eta$	$\zeta$	$\eta$	$\zeta$
0.0	$\infty$	0.0	$\infty$	0.0	$\infty$	0.0	$\infty$	0.0	$\infty$
0.1	666.0333	0.1	499.5000	0.1	399.6000	0.1	332.9667	0.1	285.4143
0.2	82.6708	0.2	62.0000	0.2	49.6000	0.2	41.3292	0.2	35.4268
0.3	24.0012	0.3	18.0000	0.3	14.4000	0.3	11.9988	0.3	10.2852
0.4	9.7505	0.4	7.3125	0.4	5.8500	0.4	4.8745	0.4	4.1784
0.5	4.6669	0.5	3.5000	0.5	2.8000	0.5	2.3331	0.5	1.9999
0.6	2.4199	0.6	1.8148	0.6	1.4518	0.6	1.2097	0.6	1.0370
0.7	1.2771	0.7	0.9578	0.7	0.7662	0.7	0.6384	0.7	0.5473
0.8	0.6354	0.8	0.4766	0.8	0.3812	0.8	0.3177	0.8	0.2723
0.9	0.2478	0.9	0.1859	0.9	0.1487	0.9	0.1239	0.9	0.1062
1.0	0.0000	1.0	0.0000	1.0	0.0000	1.0	0.0000	1.0	0.0000
1.0	0.0000	1.0	0.0000	1.0	0.0000	1.0	0.0000	1.0	0.0000
1.1	— 0.1658	1.1	— 0.1244	1.1	— 0.0995	1.1	— 0.0829	1.1	— 0.0711
1.2	— 0.2809	1.2	— 0.2107	1.2	— 0.1685	1.2	— 0.1404	1.2	— 0.1204
1.3	— 0.3632	1.3	— 0.2724	1.3	— 0.2179	1.3	— 0.1816	1.3	— 0.1556
1.4	— 0.4238	1.4	— 0.3178	1.4	— 0.2542	1.4	— 0.2118	1.4	— 0.1816
1.5	— 0.4692	1.5	— 0.3519	1.5	— 0.2815	1.5	— 0.2345	1.5	— 0.2010
1.6	— 0.5040	1.6	— 0.3780	1.6	— 0.3024	1.6	— 0.2519	1.6	— 0.2160
1.7	— 0.5310	1.7	— 0.3983	1.7	— 0.3186	1.7	— 0.2655	1.7	— 0.2276
1.8	— 0.5524	1.8	— 0.4143	1.8	— 0.3314	1.8	— 0.2761	1.8	— 0.2367
1.9	— 0.5695	1.9	— 0.4271	1.9	— 0.3417	1.9	— 0.2847	1.9	— 0.2440
2.0	— 0.5834	2.0	— 0.4375	2.0	— 0.3500	2.0	— 0.2916	2.0	— 0.2500
2.1	— 0.5947	2.1	— 0.4460	2.1	— 0.3568	2.1	— 0.2973	2.1	— 0.2548
2.2	— 0.6041	2.2	— 0.4531	2.2	— 0.3624	2.2	— 0.3020	2.2	— 0.2589
2.3	— 0.6119	2.3	— 0.4589	2.3	— 0.3671	2.3	— 0.3059	2.3	— 0.2622
2.4	— 0.6184	2.4	— 0.4638	2.4	— 0.3710	2.4	— 0.3092	2.4	— 0.2650
2.5	— 0.6240	2.5	— 0.4680	2.5	— 0.3744	2.5	— 0.3120	2.5	— 0.2674
2.6	— 0.6288	2.6	— 0.4716	2.6	— 0.3772	2.6	— 0.3143	2.6	— 0.2694
2.7	— 0.6328	2.7	— 0.4746	2.7	— 0.3797	2.7	— 0.3164	2.7	— 0.2712
2.8	— 0.6363	2.8	— 0.4772	2.8	— 0.3818	2.8	— 0.3181	2.8	— 0.2727
2.9	— 0.6394	2.9	— 0.4795	2.9	— 0.3836	2.9	— 0.3196	2.9	— 0.2740
3.0	— 0.6420	3.0	— 0.4815	3.0	— 0.3852	3.0	— 0.3210	3.0	— 0.2751



$\kappa = +4.0$		$\kappa = +4.5$		$\kappa = +5.0$		$\kappa = +5.5$		$\kappa = +6.0$	
$\eta$	$\zeta$	$\eta$	$\zeta$	$\eta$	$\zeta$	$\eta$	$\zeta$	$\eta$	$\zeta$
0.0	$\infty$	0.0	$\infty$	0.0	$\infty$	0.0	$\infty$	0.0	$\infty$
0.1	249.7500	0.1	221.9778	0.1	199.8000	0.1	181.6182	0.1	166.5333
0.2	31.0000	0.2	27.5528	0.2	24.8000	0.2	22.5432	0.2	20.6708
0.3	9.0000	0.3	7.9992	0.3	7.2000	0.3	6.5448	0.3	6.0012
0.4	3.6563	0.4	3.2497	0.4	2.9250	0.4	2.6588	0.4	2.4380
0.5	1.7500	0.5	1.5554	0.5	1.4000	0.5	1.2726	0.5	1.1669
0.6	0.9074	0.6	0.8065	0.6	0.7259	0.6	0.6599	0.6	0.6051
0.7	0.4789	0.7	0.4256	0.7	0.3831	0.7	0.3482	0.7	0.3193
0.8	0.2383	0.8	0.2118	0.8	0.1906	0.8	0.1733	0.8	0.1589
0.9	0.0929	0.9	0.0826	0.9	0.0743	0.9	0.0676	0.9	0.0620
1.0	0.0000	1.0	0.0000	1.0	0.0000	1.0	0.0000	1.0	0.0000
1.0	0.0000	1.0	0.0000	1.0	0.0000	1.0	0.0000	1.0	0.0000
1.1	— 0.0622	1.1	— 0.0553	1.1	— 0.0497	1.1	— 0.0452	1.1	— 0.0415
1.2	— 0.1053	1.2	— 0.0936	1.2	— 0.0843	1.2	— 0.0766	1.2	— 0.0702
1.3	— 0.1362	1.3	— 0.1211	1.3	— 0.1090	1.3	— 0.0990	1.3	— 0.0908
1.4	— 0.1589	1.4	— 0.1412	1.4	— 0.1271	1.4	— 0.1156	1.4	— 0.1060
1.5	— 0.1759	1.5	— 0.1564	1.5	— 0.1407	1.5	— 0.1279	1.5	— 0.1173
1.6	— 0.1890	1.6	— 0.1680	1.6	— 0.1512	1.6	— 0.1374	1.6	— 0.1260
1.7	— 0.1991	1.7	— 0.1770	1.7	— 0.1593	1.7	— 0.1448	1.7	— 0.1328
1.8	— 0.2071	1.8	— 0.1841	1.8	— 0.1657	1.8	— 0.1506	1.8	— 0.1381
1.9	— 0.2136	1.9	— 0.1898	1.9	— 0.1708	1.9	— 0.1553	1.9	— 0.1424
2.0	— 0.2188	2.0	— 0.1944	2.0	— 0.1750	2.0	— 0.1591	2.0	— 0.1459
2.1	— 0.2230	2.1	— 0.1982	2.1	— 0.1784	2.1	— 0.1622	2.1	— 0.1487
2.2	— 0.2265	2.2	— 0.2013	2.2	— 0.1812	2.2	— 0.1647	2.2	— 0.1510
2.3	— 0.2295	2.3	— 0.2039	2.3	— 0.1836	2.3	— 0.1669	2.3	— 0.1530
2.4	— 0.2319	2.4	— 0.2061	2.4	— 0.1855	2.4	— 0.1686	2.4	— 0.1546
2.5	— 0.2340	2.5	— 0.2080	2.5	— 0.1872	2.5	— 0.1702	2.5	— 0.1560
2.6	— 0.2358	2.6	— 0.2096	2.6	— 0.1886	2.6	— 0.1715	2.6	— 0.1572
2.7	— 0.2373	2.7	— 0.2109	2.7	— 0.1898	2.7	— 0.1726	2.7	— 0.1582
2.8	— 0.2386	2.8	— 0.2121	2.8	— 0.1909	2.8	— 0.1735	2.8	— 0.1591
2.9	— 0.2398	2.9	— 0.2131	2.9	— 0.1918	2.9	— 0.1743	2.9	— 0.1599
3.0	— 0.2408	3.0	— 0.2140	3.0	— 0.1926	3.0	— 0.1751	3.0	— 0.1605

$\kappa = +8.0$		$\kappa = +10.0$	
$\eta$	$\zeta$	$\eta$	$\zeta$
0.0	$\infty$	0.0	$\infty$
0.1	124.8750	0.1	99.9000
0.2	15.5000	0.2	12.4000
0.3	4.5000	0.3	3.6000
0.4	1.8281	0.4	1.4625
0.5	0.8750	0.5	0.7000
0.6	0.4537	0.6	0.3630
0.7	0.2394	0.7	0.1916
0.8	0.1191	0.8	0.0953
0.9	0.0465	0.9	0.0372
1.0	0.0000	1.0	0.0000
1.0	0.0000	1.0	0.0000
1.1	— 0.0311	1.1	— 0.0249
1.2	— 0.0527	1.2	— 0.0421
1.3	— 0.0681	1.3	— 0.0545
1.4	— 0.0795	1.4	— 0.0636
1.5	— 0.0880	1.5	— 0.0704
1.6	— 0.0945	1.6	— 0.0756
1.7	— 0.0996	1.7	— 0.0797
1.8	— 0.1036	1.8	— 0.0829
1.9	— 0.1068	1.9	— 0.0854
2.0	— 0.1094	2.0	— 0.0875
2.1	— 0.1115	2.1	— 0.0892
2.2	— 0.1133	2.2	— 0.0906
2.3	— 0.1147	2.3	— 0.0918
2.4	— 0.1160	2.4	— 0.0928
2.5	— 0.1170	2.5	— 0.0936
2.6	— 0.1179	2.6	— 0.0943
2.7	— 0.1187	2.7	— 0.0949
2.8	— 0.1193	2.8	— 0.0954
2.9	— 0.1199	2.9	— 0.0959
3.0	— 0.1204	3.0	— 0.0963

Die negativen Werthe von  $\zeta$  in der Tabelle gehören, mit umgekehrten Zeichen, einem Negativen Werthe des Argumentes  $\kappa$ .

Von den zusammengehörenden Werthen von  $\eta$  und  $\zeta$  geben nur diejenigen einen reellen Punkt der  $\kappa$ -Kurve, für welche die Ungleichheiten (4) erfüllt sind. Einige von den so bestimmten  $\kappa$ -Kurven sind in der Figur eingezeichnet.

Die  $\kappa$ -Kurve hat für

$$(5) \quad \kappa = -0.295933$$

einen Doppelpunkt. Die entsprechende Kurve ist in der Figur angegeben.

Für  $\kappa$ -Werthe, die in das Intervall

$$-0.295933 < \kappa < 0$$

fallen, zerfällt unsere Kurve in zwei Zweige. Der eine von diesen Zweigen nähert sich mit verschwindendem  $\kappa$  dem Einheitskreis, der andere geht in einen Kreis mit unendlich grossem Radius über.

Der Doppelpunkt, den man für den Werth (5) für  $\kappa$  erhält, liegt im Abstände

$$\eta = 2.785348$$

von der Sonne. Die analytische Bedeutung dieses singularen Punktes ist mir bis jetzt nicht ganz klar geworden.

3. Die  $\kappa$ -Kurven des vorigen Paragraphen sind sehr geeignet die numerischen Berechnung der Wurzeln der LAGRANGE'schen Gleichung zu erleichtern. Mit dem aus den Beobachtungen erhaltenen Werth von  $\kappa$  wird die entsprechend  $\kappa$ -Kurve

berechnet, was leicht aus der Tabelle I, mit Hülfe der Zahlen für  $\kappa = 1.0$ , geschieht. Die Schnittpunkte dieser Kurve mit einer Geraden, welche den Winkel  $\phi$  mit dem Radius Vector der Sonne bildet, geben dann unmittelbar die genäherten Werthe der Abstände des Planeten von der Erde und von der Sonne. Mit der NEWTON'schen Approximationsmethode können dann die Wurzelwerthe leicht beliebig genau berechnet werden.





$\zeta$	$x = + 0.5$	$x = + 1.0$	$x = + 1.5$	$x = + 2.0$	$x = + 2.5$	$x = + 3.0$	$x = + 3.5$	$x = + 4.0$
0.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.1	0.9070	0.8264	0.7561	0.6944	0.6400	0.5917	0.5487	0.5102
0.2	0.8264	0.6944	0.5917	0.5102	0.4444	0.3906	0.3460	0.3086
0.3	0.7561	0.5917	0.4756	0.3906	0.3265	0.2770	0.2379	0.2066
0.4	0.6944	0.5102	0.3906	0.3086	0.2500	0.2066	0.1736	0.1479
0.5	0.6400	0.4444	0.3265	0.2500	0.1975	0.1600	0.1322	0.1111
0.6	0.5917	0.3906	0.2770	0.2066	0.1600	0.1276	0.1041	0.0865
0.7	0.5487	0.3460	0.2379	0.1736	0.1322	0.1041	0.0810	0.0693
0.8	0.5102	0.3086	0.2066	0.1479	0.1111	0.0865	0.0693	0.0567
0.9	0.4756	0.2770	0.1811	0.1276	0.0947	0.0730	0.0581	0.0473
1.0	0.4444	0.2500	0.1600	0.1111	0.0816	0.0625	0.0494	0.0400
1.1	0.4162	0.2268	0.1424	0.0977	0.0711	0.0541	0.0425	0.0343
1.2	0.3906	0.2066	0.1276	0.0865	0.0625	0.0473	0.0370	0.0297
1.3	0.3672	0.1890	0.1149	0.0772	0.0554	0.0416	0.0325	0.0260
1.4	0.3460	0.1736	0.1041	0.0693	0.0494	0.0370	0.0287	0.0230
1.5	0.3265	0.1600	0.0947	0.0625	0.0443	0.0331	0.0256	0.0204
1.6	0.3086	0.1479	0.0865	0.0567	0.0400	0.0297	0.0230	0.0183
1.7	0.2921	0.1372	0.0794	0.0517	0.0363	0.0269	0.0207	0.0164
1.8	0.2770	0.1276	0.0730	0.0473	0.0331	0.0244	0.0188	0.0149
1.9	0.2630	0.1189	0.0675	0.0434	0.0302	0.0223	0.0171	0.0135
2.0	0.2500	0.1111	0.0625	0.0400	0.0278	0.0204	0.0156	0.0123
2.1	0.2379	0.1041	0.0581	0.0370	0.0256	0.0188	0.0143	0.0113
2.2	0.2268	0.0977	0.0541	0.0343	0.0237	0.0173	0.0132	0.0104
2.3	0.2163	0.0918	0.0505	0.0319	0.0219	0.0160	0.0122	0.0096
2.4	0.2066	0.0865	0.0473	0.0297	0.0204	0.0149	0.0113	0.0089
2.5	0.1975	0.0816	0.0443	0.0278	0.0190	0.0138	0.0105	0.0083
2.6	0.1890	0.0772	0.0416	0.0260	0.0178	0.0129	0.0098	0.0077
2.7	0.1811	0.0730	0.0392	0.0244	0.0167	0.0121	0.0092	0.0072
2.8	0.1736	0.0693	0.0370	0.0230	0.0156	0.0113	0.0086	0.0067
2.9	0.1666	0.0657	0.0349	0.0216	0.0147	0.0106	0.0080	0.0063
3.0	0.1600	0.0625	0.0331	0.0204	0.0138	0.0100	0.0076	0.0059
3.1	0.1538	0.0595	0.0313	0.0193	0.0131	0.0094	0.0071	0.0056
3.2	0.1479	0.0567	0.0297	0.0183	0.0123	0.0089	0.0067	0.0053
3.3	0.1424	0.0541	0.0282	0.0173	0.0117	0.0084	0.0063	0.0050
3.4	0.1372	0.0517	0.0269	0.0164	0.0111	0.0080	0.0060	0.0047
3.5	0.1322	0.0494	0.0256	0.0156	0.0105	0.0076	0.0057	0.0044
3.6	0.1276	0.0473	0.0244	0.0149	0.0100	0.0072	0.0054	0.0042
3.7	0.1231	0.0453	0.0233	0.0142	0.0095	0.0068	0.0051	0.0040
3.8	0.1189	0.0434	0.0223	0.0135	0.0091	0.0065	0.0049	0.0038
3.9	0.1149	0.0416	0.0213	0.0129	0.0087	0.0062	0.0047	0.0036
4.0	0.1111	0.0400	0.0204	0.0123	0.0083	0.0059	0.0044	0.0035

$\zeta$	$x = + 4.5$	$x = + 5.0$	$x = + 5.5$	$x = + 6.0$	$x = + 7.0$	$x = + 8.0$	$x = + 9.0$	$x = + 10.0$
0.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.1	0.4756	0.4444	0.4162	0.3906	0.3460	0.3086	0.2770	0.2500
0.2	0.2770	0.2500	0.2268	0.2066	0.1736	0.1479	0.1276	0.1111
0.3	0.1811	0.1600	0.1424	0.1276	0.1041	0.08651	0.07305	0.06250
0.4	0.1276	0.1111	0.0977	0.08651	0.06925	0.05669	0.04726	0.04000
0.5	0.0947	0.0816	0.0711	0.06250	0.04938	0.04000	0.03306	0.02778
0.6	0.0730	0.0625	0.0541	0.04726	0.03698	0.02973	0.02441	0.02041
0.7	0.0581	0.0494	0.0425	0.03698	0.02873	0.02296	0.01877	0.01563
0.8	0.0473	0.0400	0.0343	0.02973	0.02296	0.01826	0.01487	0.01235
0.9	0.0392	0.0331	0.0282	0.02441	0.01877	0.01487	0.01208	0.01000
1.0	0.0331	0.0278	0.0237	0.02041	0.01563	0.01235	0.01000	0.008264
1.1	0.0282	0.0237	0.0201	0.01731	0.01321	0.01041	0.008418	0.006944
1.2	0.0244	0.0204	0.0173	0.01487	0.01132	0.008897	0.007186	0.005917
1.3	0.0213	0.0178	0.0151	0.01291	0.009804	0.007692	0.006200	0.005102
1.4	0.0188	0.0156	0.0132	0.01132	0.008576	0.006720	0.005406	0.004444
1.5	0.0167	0.0138	0.0117	0.01000	0.007559	0.005917	0.004756	0.003906
1.6	0.0149	0.0123	0.0104	0.008897	0.006720	0.005252	0.004216	0.003460
1.7	0.0134	0.0111	0.0093	0.007974	0.006010	0.004690	0.003764	0.003086
1.8	0.0121	0.0100	0.0084	0.007184	0.005405	0.004216	0.003381	0.002770
1.9	0.0110	0.0091	0.0076	0.006502	0.004890	0.003811	0.003053	0.002500
2.0	0.0100	0.0083	0.0069	0.005917	0.004444	0.003460	0.002770	0.002268
2.1	0.0092	0.0076	0.0063	0.005405	0.004057	0.003157	0.002525	0.002066
2.2	0.0084	0.0069	0.0058	0.004960	0.003717	0.002890	0.002312	0.001890
2.3	0.0078	0.0064	0.0054	0.004566	0.003420	0.002657	0.002124	0.001736
2.4	0.0072	0.0059	0.0050	0.004216	0.003157	0.002451	0.001958	0.001600
2.5	0.0067	0.0055	0.0046	0.003906	0.002921	0.002268	0.001811	0.001479
2.6	0.0062	0.0051	0.0043	0.003628	0.002713	0.002104	0.001680	0.001372
2.7	0.0058	0.0048	0.0040	0.003381	0.002525	0.001958	0.001562	0.001276
2.8	0.0054	0.0044	0.0037	0.003157	0.002356	0.001826	0.001457	0.001189
2.9	0.0051	0.0042	0.0035	0.002953	0.002204	0.001708	0.001362	0.001111
3.0	0.0048	0.0039	0.0033	0.002770	0.002066	0.001600	0.001276	0.001041
3.1	0.0045	0.0037	0.0031	0.002603	0.001941	0.001502	0.001197	0.0009766
3.2	0.0042	0.0035	0.0029	0.002451	0.001826	0.001413	0.001126	0.0009183
3.3	0.0040	0.0033	0.0027	0.002312	0.001722	0.001332	0.001061	0.0008651
3.4	0.0038	0.0031	0.0026	0.002183	0.001626	0.001258	0.001001	0.0008163
3.5	0.0036	0.0029	0.0024	0.002066	0.001538	0.001189	0.0009470	0.0007716
3.6	0.0034	0.0028	0.0023	0.001958	0.001457	0.001126	0.0008961	0.0007305
3.7	0.0032	0.0026	0.0022	0.001858	0.001382	0.001068	0.0008503	0.0006925
3.8	0.0031	0.0025	0.0021	0.001766	0.001313	0.001014	0.0008071	0.0006575
3.9	0.0029	0.0024	0.0020	0.001680	0.001249	0.0009648	0.0007675	0.0006250
4.0	0.0028	0.0023	0.0019	0.001600	0.001189	0.0009183	0.0007305	0.0005949



Tab. III. *Tafel der Funktion*

$$g(\zeta, n) = (1 + 2n\zeta + \zeta^2)^3.$$

$\zeta$	$n = -1.0$	$n = -0.9$	$n = -0.8$	$n = -0.7$	$n = -0.6$	$n = -0.5$	$n = -0.4$	$n = -0.3$
0.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.1	0.5314	0.5718	0.6141	0.6585	0.7050	0.7536	0.8044	0.8574
0.2	0.2621	0.3144	0.3732	0.4390	0.5120	0.5927	0.6815	0.7787
0.3	0.1176	0.1664	0.2270	0.3008	0.3890	0.4930	0.6141	0.7536
0.4	0.0467	0.0852	0.1406	0.2160	0.3144	0.4390	0.5927	0.7787
0.5	0.0156	0.0429	0.0911	0.1664	0.2746	0.4219	0.6141	0.8574
0.6	0.0041	0.0220	0.0640	0.1406	0.2621	0.4390	0.6815	1.0000
0.7	0.0007	0.0122	0.0507	0.1327	0.2746	0.4930	0.8044	1.2250
0.8	0.0001	0.0080	0.0467	0.1406	0.3144	0.5927	1.0000	1.5609
0.9	0.0000	0.0069	0.0507	0.1664	0.3890	0.7536	1.2950	2.0484
1.0	0.0000	0.0080	0.0640	0.2160	0.5120	1.0000	1.7280	2.7440
1.1	0.0000	0.0122	0.0911	0.3008	0.7050	1.3676	2.3526	3.7239
1.2	0.0001	0.0220	0.1406	0.4390	1.0000	1.9066	3.2418	5.0884
1.3	0.0007	0.0429	0.2270	0.6585	1.4429	2.6856	4.4921	6.9679
1.4	0.0041	0.0852	0.3732	1.0000	2.0972	3.7964	6.2295	9.5281
1.5	0.0156	0.1664	0.6141	1.5209	3.0486	5.3594	8.6151	12.978
1.6	0.0467	0.3144	1.0000	2.3000	4.4109	7.5295	11.852	17.576
1.7	0.1176	0.5718	1.6016	3.4430	6.3316	10.503	16.194	23.640
1.8	0.2621	1.0000	2.5155	5.0884	8.9989	14.527	21.952	31.554
1.9	0.5314	1.6852	3.8699	7.4149	12.649	19.903	29.504	41.782
2.0	1.0000	2.7440	5.8320	10.648	17.576	27.000	39.304	54.872
2.1	1.7716	4.3307	8.6151	15.069	24.138	36.265	51.895	71.473
2.2	2.9860	6.6447	12.487	21.025	32.768	48.229	67.917	92.345
2.3	4.8268	9.9384	17.780	28.943	43.987	63.521	88.121	118.37
2.4	7.5295	14.527	24.897	39.304	58.411	82.882	113.38	150.57
2.5	11.391	20.797	34.328	52.734	76.766	107.17	144.70	190.11
2.6	16.777	29.218	46.656	69.935	99.897	137.39	183.25	238.33
2.7	24.138	40.354	62.571	91.734	128.79	174.68	230.35	296.74
2.8	34.012	54.872	82.882	119.10	164.57	220.35	287.50	367.06
2.9	47.046	73.560	108.53	153.13	208.53	275.89	356.40	451.22
3.0	64.000	97.336	140.61	195.11	262.14	343.00	438.98	551.37
3.1	85.766	127.26	180.36	246.49	327.08	423.56	537.37	669.92
3.2	113.38	164.57	229.22	308.92	405.22	519.72	653.97	809.56
3.3	148.04	210.64	288.80	384.24	498.68	633.84	791.45	973.24
3.4	191.10	267.09	360.94	474.55	609.80	768.58	952.76	1164.3
3.5	244.14	335.70	447.70	582.18	741.22	926.86	1141.2	1386.2
3.6	308.92	418.51	551.37	709.73	895.84	1111.9	1360.3	1643.0
3.7	387.42	517.78	674.53	860.09	1076.9	1327.4	1614.0	1939.1
3.8	481.89	636.06	820.03	1036.4	1287.9	1577.1	1906.6	2279.1
3.9	594.82	776.15	991.03	1242.3	1532.8	1865.4	2242.9	2668.3
4.0	729.00	941.19	1191.0	1481.5	1815.8	2197.0	2628.1	3112.1



$\zeta$	$n = -0.2$	$n = -0.1$	$n = +0.1$	$n = +0.2$	$n = +0.3$	$n = +0.4$	$n = +0.5$	$n = +0.6$
0.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.1	0.9127	0.9703	1.0927	1.1576	1.2250	1.2950	1.3676	1.4429
0.2	0.8847	1.0000	1.2597	1.4049	1.5609	1.7280	1.9066	2.0972
0.3	0.9127	1.0927	1.5209	1.7716	2.0484	2.3526	2.6856	3.0486
0.4	1.0000	1.2597	1.9066	2.3000	2.7440	3.2418	3.7964	4.4109
0.5	1.1576	1.5209	2.4604	3.0486	3.7239	4.4921	5.3594	6.3316
0.6	1.4049	1.9066	3.2418	4.0960	5.0884	6.2295	7.5295	8.9989
0.7	1.7716	2.4604	4.3307	5.5452	6.9679	8.6151	10.503	12.649
0.8	2.3000	3.2418	5.8320	7.5295	9.5281	11.852	14.527	17.576
0.9	3.0486	4.3307	7.8806	10.218	12.978	16.194	19.903	24.138
1.0	4.0960	5.8320	10.648	13.824	17.576	21.952	27.000	32.768
1.1	5.5452	7.8806	14.349	18.610	23.640	29.504	36.265	43.987
1.2	7.5295	10.648	19.249	24.897	31.554	39.304	48.229	58.411
1.3	10.218	14.349	25.672	33.076	41.782	51.895	63.521	76.766
1.4	13.824	19.249	34.012	43.614	54.872	67.917	82.882	99.897
1.5	18.610	25.672	44.739	57.067	71.473	88.121	107.17	128.79
1.6	24.897	34.012	58.411	74.088	92.345	113.38	137.39	164.57
1.7	33.076	44.739	75.687	95.444	118.37	144.70	174.68	208.53
1.8	43.614	58.411	97.336	122.02	150.57	183.25	220.35	262.14
1.9	57.067	75.687	124.25	154.85	190.11	230.35	275.89	327.08
2.0	74.088	97.336	157.46	195.11	238.33	287.50	343.00	405.22
2.1	95.444	124.25	198.16	244.14	296.74	356.40	423.56	498.68
2.2	122.02	157.46	247.67	303.46	367.06	438.98	519.72	609.80
2.3	154.85	198.16	307.55	374.81	451.22	537.37	633.84	741.22
2.4	195.11	247.67	379.50	460.10	551.37	653.97	768.58	895.84
2.5	244.14	307.55	465.48	561.52	669.92	791.45	926.86	1076.9
2.6	303.46	379.50	567.66	681.47	809.56	952.76	1111.9	1287.9
2.7	374.81	465.48	688.47	822.66	973.24	1141.2	1327.4	1532.8
2.8	460.10	567.66	830.58	988.05	1164.3	1360.3	1577.1	1815.8
2.9	561.52	688.47	997.00	1180.9	1386.2	1614.0	1865.4	2141.7
3.0	681.47	830.58	1191.0	1444.9	1643.0	1906.6	2197.0	2515.5
3.1	822.66	997.00	1416.2	1664.0	1939.1	2242.9	2577.0	2942.6
3.2	988.05	1191.0	1676.7	1962.5	2279.1	2628.1	3010.9	3429.3
3.3	1180.9	1416.2	1976.7	2305.2	2668.3	3067.6	3504.9	3981.9
3.4	1404.9	1676.7	2320.9	2697.2	3112.1	3567.5	4065.4	4607.4
3.5	1664.0	1976.7	2714.7	3144.2	3616.8	4134.5	4699.4	5313.6
3.6	1962.5	2320.9	3163.6	3652.3	4188.9	4775.6	5414.7	6108.4
3.7	2305.2	2714.7	3673.6	4228.0	4835.4	5498.4	6219.4	7000.8
3.8	2697.2	3163.6	4251.5	4878.4	5564.1	6311.1	7122.2	8000.0
3.9	3144.2	3673.6	4904.3	5611.3	6383.1	7222.6	8132.7	9116.2
4.0	3652.3	4251.5	5639.8	6434.9	7301.4	8242.4	9261.0	10360.

$\zeta$	$n = + 0.7$	$n = + 0.8$	$n = + 0.9$	$n = + 1.0$
0.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.1	1.5209	1.6016	1.6852	1.7716
0.2	2.3000	2.5155	2.7440	2.9860
0.3	3.4430	3.8699	4.3307	4.8268
0.4	5.0884	5.8320	6.6447	7.5295
0.5	7.4149	8.6151	9.9384	11.391
0.6	10.648	12.487	14.527	16.777
0.7	15.069	17.780	20.797	24.138
0.8	21.025	24.897	29.218	34.012
0.9	28.934	34.328	40.354	47.046
1.0	39.304	46.656	54.872	64.000
1.1	52.734	62.571	73.560	85.766
1.2	69.935	82.882	97.336	113.38
1.3	91.734	108.53	127.26	148.04
1.4	119.10	140.61	164.57	191.10
1.5	153.13	180.36	210.64	244.14
1.6	195.11	229.22	267.09	308.92
1.7	246.49	288.80	335.70	387.42
1.8	308.92	360.94	418.51	481.89
1.9	384.24	447.70	517.78	594.82
2.0	474.55	551.37	636.06	729.00
2.1	582.18	674.53	776.15	887.50
2.2	709.73	820.03	941.19	1073.7
2.3	860.09	991.03	1134.6	1291.5
2.4	1036.4	1191.0	1360.3	1544.8
2.5	1242.3	1423.8	1622.2	1838.3
2.6	1481.5	1693.7	1925.1	2176.8
2.7	1758.4	2005.1	2273.9	2565.7
2.8	2077.6	2363.3	2674.0	3010.9
2.9	2444.0	2773.5	3131.4	3518.7
3.0	2863.3	3241.8	3652.3	4096.0
3.1	3341.4	3774.6	4243.7	4750.1
3.2	3884.7	4378.7	4913.0	5489.0
3.3	4500.3	5061.9	5668.3	6321.4
3.4	5195.7	5832.0	6518.2	7256.3
3.5	5979.0	6697.8	7472.1	8303.8
3.6	6859.0	7668.7	8539.7	9474.3
3.7	7845.0	8754.6	9731.8	10779.
3.8	8947.1	9966.1	11060.	12231.
3.9	10176.	11315.	12536.	13841.
4.0	11543.	12813.	14172.	15625.





$x \backslash n$	- 0.2	- 0.1	0.0	+ 0.1	+ 0.2	+ 0.3	+ 0.4	+ 0.5
10.0	Keine Wurzel	Keine Wurzel	Keine Wurzel	Keine Wurzel	Keine Wurzel	Keine Wurzel	Keine Wurzel	Keine Wurzel
9.0								
8.0								
7.0								
6.0								
5.5								
5.0								
4.5								
4.0								
3.5								
3.0	Keine Wurzel	Keine Wurzel	Keine Wurzel	Keine Wurzel	Keine Wurzel	Keine Wurzel	Keine Wurzel	Keine Wurzel
2.5								
2.0								
1.5								
1.0								
0.5								
0.0								
0.5								
1.0								
1.5								
2.0	Keine Wurzel	Keine Wurzel	Keine Wurzel	Keine Wurzel	Keine Wurzel	Keine Wurzel	Keine Wurzel	Keine Wurzel
2.5								
3.0								
3.5								
4.0								
4.5								
5.0								
5.5								
6.0								
7.0								
8.0	Keine Wurzel	Keine Wurzel	Keine Wurzel	Keine Wurzel	Keine Wurzel	Keine Wurzel	Keine Wurzel	Keine Wurzel
9.0								
10.0								

$x \backslash n$	+ 0.6	+ 0.7	+ 0.8	+ 0.9	+ 1.0
10.0	Keine Wurzel	Keine Wurzel	Keine Wurzel	Keine Wurzel	Keine Wurzel
9.0					
8.0					
7.0					
6.0					
5.5					
5.0					
4.5					
4.0					
3.5					
3.0	Keine Wurzel	Keine Wurzel	Keine Wurzel	Keine Wurzel	Keine Wurzel
2.5					
2.0					
1.5					
1.0					
0.5					
0.0					
0.5					
1.0					
1.5					
2.0	Keine Wurzel	Keine Wurzel	Keine Wurzel	Keine Wurzel	Keine Wurzel
2.5					
3.0					
3.5					
4.0					
4.5					
5.0					
5.5					
6.0					
7.0					
8.0	Keine Wurzel	Keine Wurzel	Keine Wurzel	Keine Wurzel	Keine Wurzel
9.0					
10.0					

Diese Tafel ist nicht hinreichend um die Wurzelwerthe für beliebige Werthe von  $x$  und  $n$  zu geben. Sie giebt aber eine Übersicht über die Veränderungen dieser Wurzelwerthe und kann als einen Ausgangspunkt für eine ausgedehntere Tafel über die Wurzeln der LAGRANGE'schen Gleichung benutzt werden.









# CONTRIBUTIONS TO THE FAUNA OF THE BAHAMAS

I. A GENERAL ACCOUNT OF THE FAUNA, WITH REMARKS ON  
THE PHYSIOGRAPHY OF THE ISLANDS

II. THE REPTILES

III. THE FISHES

BY

NILS ROSÉN

---

WITH 1 PLATE, 2 MAPS AND 13 FIGURES IN THE TEXT

(FROM ZOOL. INST., LUND)



LUND 1911  
PRINTED BY HÅKAN OHLSSON





## Introduction.

This paper forms the first in a series dealing with the faunistic results of zoological studies I have made in the Bahamas. My stay in these islands lasted from the end of April 1908 to the beginning of the same month the following year. The visit was paid in order to make zoological collections and to study the animal life in various parts of the Islands. Several points of interest presented themselves: the land fauna of the different islands, the fauna of the coral reefs, and the fauna in the brackish and salt ponds, a problem which I think is of the greatest interest, but which I unfortunately got no opportunities of studying, having been prevented by two terrible hurricanes. The small means with which I had to work compelled me to give up all thoughts of studying the deep-sea fauna and also, as was later shown to be necessary, of visiting all the islands. I spent the whole year of my visit on New Providence and Andros, especially working at Mastic Point on the last named island. In the winter I paid a short visit also to the western side of Andros. Collections were made of almost all orders of animals, the shore at high and low water was studied, the coral reefs with their fauna, on land reptiles, shells, spiders and other animals were collected, as well as representatives of the somewhat poor mammal fauna, and several bird skins were prepared. My collections are all in the Zoological Museum of the University of Lund.

In the first part of this paper (I) I intend to give a general sketch of the features of the fauna, and of the different formation in which it is found. For the right understanding of the fauna of an island it is necessary to know the formation of the island, whether it is of an oceanic or continental origin. For this purpose I am giving in a separate chapter a short account of what is known on that point together with some remarks about the observations I have made as to that question. Short notes on previous zoological studies in the Bahamas will form a first chapter. In the two following parts (II and III) I am describing the reptiles and fishes of the islands. Other orders will later on be worked up either by me or by other zoologists, and the results thereof published in other papers. A parasitic gastropod, found in a holothuria, has already been described by me <sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> ROSÉN, Zur Kenntnis der parasitischen Schnecken. Fysiografiska Sällskapets Handlingar. Lund. N. F. Bd 21. (1910).

My visit to the Bahamas was made by means of a scholarship, received from the University of Lund. The then Director of the Zoological Institute of the University, the late Professor D. BERGENDAL showed great interest in my journey and placed at my disposal some of the scientific equipment of the Institute, and his successor as Director, Professor H. WALLENGREN gave me valuable help during my stay in the Bahamas. To Professor A. QUENNERSTEDT and Consul W. WESTRUP, Lund, I am much indebted for the pecuniary assistance given. Many services were rendered me by the *Swedish Foreign Department*, the Swedish Consul in Nassau, Mr. LEWIS TAYLOR, the Governor of the Bahamas, H. Exc. Sir GREY-WILSON and many private persons. The *Swedish Powder Factory* in Landskrona presented me liberally a great number of cartridges, which proved to be of excellent manufacture, exposed as they were to both heat and water. The *Zoological Museum* in Gothenburg gave me through the mediation of its Keeper Dr. L. JÄGERSKIÖLD a grant for collecting for that museum also.

I beg to express my best thanks to all the persons and institutes that have in any way supported me during this journey.

---

## I.

### A General Account of the Fauna, with Remarks on the Physiography of the Islands.

#### A. Sketch of Zoological Explorations in the Bahamas.

The Bahamas have been visited several times both by Expeditions and by individual naturalists for the purpose of zoological explorations, but they have been far from thoroughly studied in this respect, the reason being that the visits paid have been very short. I proceed to give a short sketch of some of the most important zoological work previously done in this archipelago.

The earliest knowledge about the natural history of the Bahamas that is of any importance we owe to CATESBY, who made a journey to Carolina, Florida and the Bahamas, visiting among the last-named islands New Providence, Eleuthera, Andros and Abaco (1725—26). After his return to England he published a large work about the results of his studies: *The Natural History of Carolina, Florida and the Bahama Islands*. London 1731—43. — In this book he has, among other things, described the birds, reptiles and fishes found, and given coloured plates of most of them. Several of his descriptions and plates formed the basis for some of LINNÆUS' species.

In 1783 JOSEPH II sent an expedition to America for the purpose of collecting plants and animals. Some members of the expedition, the leader of which was FR. J. MAERTES, visited New Providence and some other islands of the Bahamas in 1784.

The U. S. Fish Commission Steamer *Albatross* cruised in 1886 about the Bahamas, collections being made on Abaco, New Providence, Eleuthera, Cat Isl., Watlings, Rum Cay, Green Cay, Concepcion Isl. and Bobby Rock, but very little has been published about the results obtained.

The *University of Pennsylvania* sent an expedition in 1890—91 to the West Indies, visiting also New Providence, Eleuthera, Watlings Isl., Crooked Isl. and Great Inagua. The leader of the Expedition was the Professor of Botany J. Th. ROTHROCK, Mr. J. P. MOORE being in charge as zoologist.



Another expedition was sent to the Bahamas and Florida by the *State University of Iowa* in 1893. Professor C. C. NUTTING, the leader of the expedition, has written a general report: *Narrative and Preliminary Report of the Bahama Expedition*. Bull. Lab. Nat. Hist. Iowa. — Among the collections made during this exploration trip the mollusks and brachiopods have been described by W. DALL (Bull. Lab. Nat. Hist. Iowa, Vol. 4 no. 1, 1896), the ophiurians by A. E. VERRILL (ibid. Vol. 5, 1899), the actinurians by Mc MURRICH (ibid. Vol. 4, no. 3, 1898), the Brachyura by MARY J. RATHBURN (ibid.), the fishes by S. GARMAN (ibid. vol. 4, no. 1).

In the summer 1892 the *Johns Hopkins Marine Laboratory* was stationed in North Bimini, one of the Bahamas at the edge of the Gulf Stream. Among animals collected during this time may be mentioned *Asymmetron lucayanum*, described by ANDREWS (Johns Hopk. Univ. Circulars Vol. 12).

ALEXANDER AGASSIZ went in the winter 1893 to the Bahamas especially to study the formation of the islands; but at the same time several hauls with deep-sea nets were made and zoological specimens collected at some places. The results of these studies have been published in the very important paper: *A Reconnaissance of the Bahamas* (Bull. Mus. Comp. Zool. Harvard. Vol. 26, 1894).

The *Geographical Society of Baltimore* equipped a rather large expedition which in the summer of 1903 went to the Bahamas under the direction of G. B. SHATTUCK. Many islands were visited, but only for a very short time, the stay of the expedition in the archipelago lasting only a few weeks. The results are mostly of geological and geographical interest, but also contributions to the knowledge of the fauna have been given, published by MILLER (the mammals), RILEY (the birds), STEJNEGER (reptiles and batrachians) and B. BEAN (the fishes). A large monograph about the islands was published by SHATTUCK in cooperation with several naturalists (*The Bahama Islands*. New York 1905).

HENRY BRYANT studied the avifauna of the Bahamas in 1859 and 1866, visiting a great number of the islands. He published papers on his results in several volumes of the Proceed. of the Society of Natural History of Boston. OWEN BRYANT, G. M. ALLEN and T. BARBOUR spent a month on some of the Bahamas (New Providence, Great Abaco, Little Abaco, Grand Bahama) in 1904. BARBOUR also paid a visit to the Islands in 1901, and BRYANT visited Andros in 1904. ALLEN and BARBOUR have issued a »*Narrative of a Trip to the Bahamas*» (Cambridge, Mass. 1904). Several papers contain the results, of which may be mentioned one about the shells by DALL (Smithson. Collect. quart. 47), another about the reptiles by BARBOUR (Bull. Mus. Comp. Zool. Vol. 46, 1904), another by COLE about a pycnogonid.

C. J. MAYNARD collected for the Museum of Comp. Zool. at Harvard in 1888 on Andros, Rum Cay, Long Isl., Inagua and some smaller islands. The birds were described by himself, the reptiles and batrachians by GARMAN.

J. LEWIS-BONHOTE lived in the Bahamas for some time, studying the bird life (Ibis 1889 and 1903).

JOHN J. NORTHPROP has studied the natural history of the Bahamas (Andros and New Providence) and given notes about the birds (The Auk 1891), as well as about the geology of the islands (Trans. N. Y. Acad. Sci. Vol. 10, 1890).

C. B. CORY has visited the islands several times especially for studies about the birds, about which he has written some papers.

MAYER, WOOD, EBELL, CHAPMAN, EDWARDS, FR. STEARNS, WHIETFIELD, PLATE, DAVENPORT and many other naturalists have for short periods visited the Bahamas. Some of the animals collected by them have been described by themselves or by other scientists, as BENDALL (mollusks), BAKER (mollusks), HENDERSON (shells), PILSBRY (shells), PERKINS (cladonema), SPENGEL (*Ptychodera bahamensis*) and others.

### B. The Physiography of the Bahamas.

The great sea between North and South America, the American Mediterranean, is divided into four deep basins, the Gulf of Mexico, the Caribbean Sea and the two seas lying between Cuba and Yucatan. These basins are bounded not only on the west by the land mass connecting the two parts of America, but also on the east by a broad bank running from Florida to the east of South America. Though this bank is submerged, it is nevertheless of a great hydrographic importance as preventing the bottom-water of the Atlantic from getting over into the basins named. The four basins are separated from each other by similar banks, one running from the western end of Cuba to the east end of Yucatan, another, a very narrow one, from Cape Cruz at the south eastern end of Cuba towards the Gulf of Honduras and the third from Haiti via Jamaica to the Peninsula of Honduras. None of these banks are quite continuous: they have all been broken by erosion at several points, thus forming narrow channels between the different parts. The portions of these banks which now rise above the surface of the water and the deposits on them form what is called the West Indian Islands. The Bahamas form the part which is situated on the northern part of the bank from Florida to South America. (Map. I.)

The physiography of the Bahamas has been studied very well. ALEXANDER AGASSIZ made a trip on the »Wild Duck» to the islands in 1893, studying the formation of the various islands and has given a detailed description<sup>1</sup> of them. Before him two other geologists visited the islands and made observations about the geology of the Archipelago, Captain R. J. NELSON<sup>2</sup> (1853) and Dr. JOHN I. NORTHPROP<sup>3</sup> (1890). The Bahamas are also taken into consideration in SPENCER'S<sup>4</sup> studies about the Antillean Continent. Important work has recently been done on this question by the

---

<sup>1</sup> *A Reconnaissance of the Bahamas.* — Bull. Mus. Comp. Zool. Vol. 24 (1894).

<sup>2</sup> *On the Geology of the Bahamas.* — Quart. Journ. Geol. Soc. London. Vol. 9 (1853).

<sup>3</sup> *Notes on the Geology of the Bahamas.* — Trans. N. Y. Acad. Sci. Vol. 10 (1890).

<sup>4</sup> *Reconstruction of the Antillean Continent.* — Bull. Geol. Soc. Am. Vol. 6 (1895) and

*Resemblance between the Declivities of High Plateaus and those of Submarine Antillean Valley.*  
— Trans. Canad. Inst. Vol. 5 (1898).



Expedition sent to the Bahamas in 1903 by the *Geographical Society of Baltimore*. G. B. SHATTUCK, B. L. MILLER and Ch. N. MOONEY, members of the Expedition, have published papers about the results on this point, while DALL has described the fossils collected<sup>1</sup>. I am not going to give here a detailed account of the results of these studies and the different views put forth, I am only trying briefly to trace the geological history of the Bahamas, from their origin to the present epoch, and



Map. I.

at the same time to give a short sketch of the physical nature of the islands, as far as it is of any interest for a zoogeographical study. For a more detailed study of this subject I refer the reader to the above named papers.

The bank on which the Bahamas are situated, has been eroded rather much and is at present to a great extent broken up into several small banks, which are separated on the north from Florida by the broad Straits of Florida, about 300 —

<sup>1</sup> The results of this expedition are published in: *The Bahama Islands*, ed. by G. Shattuck, New York 1905.



500 fathoms deep, on the southwest by the narrow Old Bahama Channel from Cuba, of about 200—300 fathoms in depth, and on the south by a rather narrow but deep channel (2000 fathoms) from Haiti. (Map II.) Toward the Atlantic the banks dip down suddenly to a depth of 2500 fathoms. On the north the banks are much more developed than on the south, forming two large banks, on which several of the principal islands are situated, the Little Bahama Bank with Bahama Island and Abaco, and the Great Bahama Bank with Andros, New Providence, Eleuthera, Cat Island, Exuma and Long Island, besides a great number of small keys. These two banks are separated from each other by the Providence Channel, which sends a branch (Tongue of the Ocean) to the south, giving the Great Bahama Bank the shape of a V. As mentioned above the erosion has given rise to a great number of small banks, on the south separated from each other by rather deep channels, the general depth of which is 1500 fathoms. They are to a greater or less extent occupied by islands, the principals being Watlings, Rum Cay, Crooked, and Acklin Isl., Mariguana, Great and Little Inagua, Caicos and Turks Isl.

A geological study of the Islands has shown that they are throughout built up on the great bank — at present submerged and eroded — by coral sands and minute fragments of shells and other calcareous organisms. When deposited by the waves the sand has been heaped up to hills by the wind and in time got cemented to limestone, thus forming hard rocks (Fig. A). The Islands are æolic. An excellent view of the structure of the hills is given at Queen's Staircase in Nassau, the capital of the islands, where the rocky hill is cut through (Fig. B). At many places far inland from the beach corals are found in the rocks. AGASSIZ came to the conclusion that they, together with marine shells also found there, were brought there by the hurricanes, and had recemented in the rocks. That this is not always the case, but that the islands are formed by corals also to some, though certainly only to a very slight extent, is clearly shown by the occurrence of a large coral head above sea level on Green Cay, observed by the Expedition of the Geogr. Soc. of Baltimore. During my visit to Andros I very often saw corals far from the beach and on rather high places; and I think it would be to exaggerate the powers of the hurricanes to consider them all to have been brought there in such a way. From what is stated above it is evident that the Bahamas have an oceanic origin, a fact which is of great importance for the study of the land fauna. There is a special interest in this point. The Bahamas are not so isolated as oceanic islands usually are, but as has been shown above are situated, together with all the West Indian islands, on large banks, old mountain-chains, which were once elevated above sea level, but at present are to greatest extent submerged. That the present Bahamas were formed at much later time than that at which these banks perhaps connected North with South America and the West Indies with Central America, is quite evident from a study of the geology of the Islands. But it is *a priori* not impossible that after the formation of the islands an elevation could have taken place, connecting some of them with neighbouring islands or with Florida or at



Map. II.



least making the separating channels so narrow that they would not form any considerable obstacle to the invasion of the majority of land animals. It must be remembered that the Great Bahama Bank, though to great extent submerged would be converted by an elevation of only 10 fathoms into a large land mass, separated from Cuba by a narrow channel, and that a further elevation of about 200 fathoms would connect it with Cuba. For a connection with Florida an elevation of about 400 fathoms would be necessary. By such temporary connections with other lands the character of the land fauna would be much altered: it would no longer be that of a true oceanic island. To trace the topographical history of the islands since their formation is therefore of great importance. Owing to the geological researches that at several times have been made in the Bahamas, I think it possible with a high degree of certainty, to answer this question. AGASSIZ has given the first real help towards settling this problem. He writes (*op. cit.* p. 7): »After the formation of the islands came an extensive gradual subsidence, which can be estimated at about three hundred feet», an opinion which is based on the observation of some oceanholes having a depth of 34 fathoms. He takes these holes to be »submarine blow holes or cañons in the æolian limestone of the Bahama hills when they were at a greater elevation than now.» During the subsidence that must have taken place since the formation of these holes, the islands were exposed to a great erosion. The level at which the Bahamas once stood, according to



Fig. A. Eroded limestone-rock (after AGASSIZ).

AGASSIZ, would be high enough to make the Great Bahama Bank a mass of land, but not high enough to connect it with Cuba, as is evident from the statements about the depths given above. I think however, it is not quite certain that the Bahamas at that time had such a large extension, for it is evident that during the subsidence the islands were not only eroded but with all probability also built higher up. Coral sand must have been deposited on the beaches even during this time and piled up to hills in the interior. The islands were reduced in extension, but increased in height, measured from the ground, not from the sea level. AGASSIZ's proof that the islands were once higher than at present time is, it is true, quite correct, but it does not show, as far as I can judge, that the level stated was the highest at which the Bahamas ever have stood. It is possible that other oceanholes, deeper than that mentioned, will be found, showing that the islands have



been much higher, perhaps high enough to be connected with Cuba or even with Florida. During the time for such land connections land animals could have invaded, during the following extensive subsidence getting embedded in the æolian hills perpetually formed, if not drowned in the sea, or perhaps driven to the interior of the islands and surviving to later times. Whether this has really been the case cannot, I think, be quite decided at present. No fossils from such a time have yet been found, and there are no other geological proofs yet observed for the presumption of such a secondary connection with land. Even a study of the land fauna shows that we need not assume this hypothesis in order to explain its composition. There is another point however which must be taken into consideration



Fig. B. Section through the rock (Queen's Stair case, Nassau).

more extensive than is proved by the elevated reef on Green Cay. At the place named on Andros, about 60 feet above sea-level, I found the remains of an old beach. Everywhere in the Bahamas, where the limestone rocks dip into the sea, these are eroded by the sea in a characteristic mode, forming small caverns. Such an ancient sea-cliff with caverns, clearly showing that the sea once reached this level, was found: it is now completely overgrown by shrubs. Close to this former beach plenty of corals, of the same kind as are now found near the shore, were observed in the rocks. I think the most natural mode of explaining their occurrence is to believe that they were living there at the time when that sea-cliff was formed. It may seem to be of comparatively little importance to show that the

in answering this question. Have the islands subsided from that previous higher level only to that of the present time, or has the subsidence been more extensive, followed by an elevation which afterwards gave the archipelago its present configuration? As has been mentioned above, remains of corals and marine shells are found at many places far from the beach. AGASSIZ considered them all to be brought there by hurricanes. The islands according to him do not show any signs of an elevation. An evident proof of a recent elevation was on the contrary observed by the Exped. Geogr. Soc. SHATTUCK and MILLER found on Green Cay a rather large coral reef elevated about 15 to 20 feet above sea level. An observation made during my stay at Mastic Point on Andros makes me believe that this recent elevation was

subsidence must have been only about 40 feet deeper than previously believed. From a zoogeographical point of view, however, the contrary is the case. The Bahamas are very low islands. A subsidence of 60 feet would submerge the greater part of them, only leaving the top of the hills as very small and narrow islands, rocky remnants or sand bores. Such a subsidence would put almost the whole island of Andros below the surface of the water. The facts given show plainly that the subsidence that followed after the period of the elevated state, during which the ocean-holes were excavated, must have been so extensive that the islands were submerged to a level 60 feet below the present one, and that after this subsidence there came an elevation raising the islands to the present level. During that time of great subsidence not only were the sea-cliff at Mastie Point and the coral reef on Green Cay

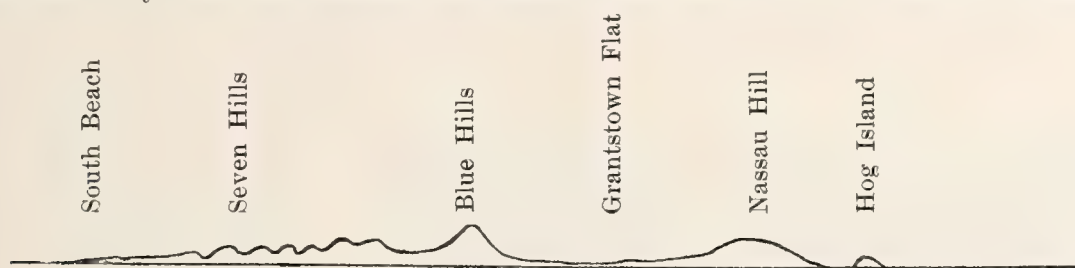


Fig. C. Section across New Providence (after AGASSIZ).

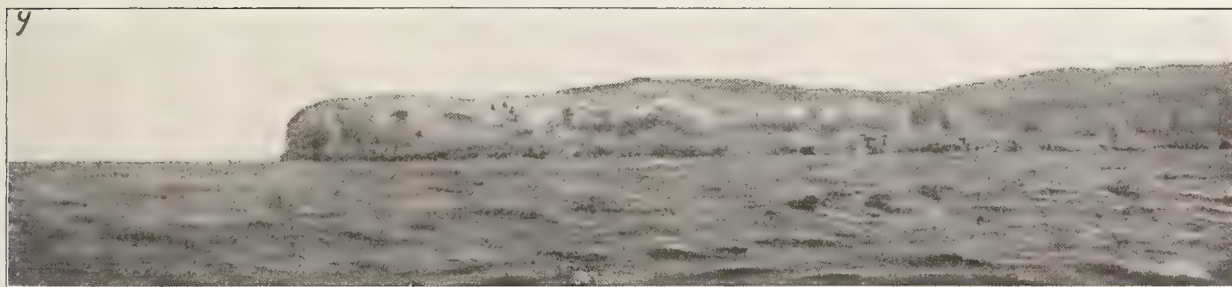


Fig. D. Morgans Bluff, Andros.

formed, but also many of the corals and marine shells, found in the rocks were deposited. That the hurricanes have thrown up many of the named pieces of corals and shells, which then later on have recemented in the rocks, may be the fact in many cases but not in all. During the following elevation new hills of coral and shell sand were piled up and these soon hardened to rocks. To some, but certainly very little extent, the corals have also taken part in building up the present islands. That this very extensive subsidence must have been of the greatest influence on a land fauna, that had previously invaded over possible landconnections or had reached the islands in a passive way is quite evident. It would hardly have been able to survive this submersion. There is also in the present fauna no relicts known from that time. Whether the Bahamas are at present still rising or stationary or subsiding cannot be decided until some time has elapsed. Then this will be shown by the marks, put up for this purpose by the Exped. Geogr. Soc. of Baltimore.



At what time have the above mentioned subsidence and elevation of the Bahamas taken place? DALL has tried (op. cit.) to state the time. The shells and corals deposited during the epoch of subsidence, are all the same as those at present found in shallow water in the Bahamas. The subsidence must be very recent. He has also studied the fossils found in the æolian hills covering the stratum of marine deposits, and consequently formed during the following elevation. These fossils represent the remains of the fauna that occupied the islands immediately after their elevation. The vast number of them belong to the two shell-genera *Cepolis* and *Cerion*. According to DALL the fossil forms of these genera found in the Bahamas resemble those now living in Cuba or Haiti more than they do the prevalent Bahama living ones. They have invaded from Cuba and Haiti. These two genera take their origin from the Oligocene period. During the Miocene epoch some of the more tropical forms were eliminated. Some of the survivors have spread to the



Fig. E. Sand-beach (Stanniard Creek, Andros).

Bahamas as soon as they were elevated high enough to be suitable for animal beings and this elevation consequently took place in very late Tertiary time.

From what has been stated above, the Bahamas are from a zoogeographical point of view to be considered as true oceanic islands. Whether there

has been a former secondary connection with other land is of no significance for the study of the recent fauna for the islands after their formation were almost entirely submerged and the recent fauna must have invaded since the beginning of the following recent elevation, which took place in very late Tertiary time and has given the archipelago its present configuration.

The features of the fauna that can take possession of an oceanic island depends very much on the physical conditions offered by this. I will make a few remarks hereon<sup>1</sup>. The Bahamas consist as has been mentioned, only of coral and shell sand, which is often consolidated to a greater or less extent to limestone rock. Owing to solution the surface of the rock has a truly honeycombed appearance (Fig. A). Some of the holes are small, some rather large, commonly spoken of as »banana-holes». In many places the rock is very ragged and extremely pitted. The wind has often piled up the sand to hills, running lengthwise of the islands, often in several series (Fig. C).

<sup>1</sup> For a detailed account hereof I refer to the work »The Bahama Islands», ed. by SHATTUCK.



They often end in steep bluffs (Fig. D). The greater part of the land is, however, very low consisting either of rock or of coral sand. Denudation and solution of rock have given rise to several types of soils. Besides the coral sand, these are different kinds of loam, brackish swamp and marl. The beach is at some places rocky (Fig. D), steep or sloping gently, at other places a low sand beach (Fig. E). A very low shore, consisting of white marl bounds the western side of Andros (Fig. F). No true streams are found but creeks with brackish water. In the interior of Andros is a lake, which is said to keep fresh water, but that is the only one. Brackish ponds, more or less in connection with the sea are very numerous. In some islands some ponds are almost real salt ponds. The Bahamas, situated between about  $20^{\circ}$  and  $27^{\circ}$  N. L., swept by two warm streams, the Gulf Stream and the Antillean Stream, have a climate with moderately high temperature, showing little variation from month to month. The average temperature for Nassau is recorded to be  $21.5^{\circ}$  C. in February (the coldest month), in August (the warmest month)  $28.7^{\circ}$  C. Hence the difference is only about  $7^{\circ}$  C. Much higher and lower extreme temperatures are often observed<sup>1</sup>. The amount of moisture in the atmosphere is very high, during the night 85 to 90 per cent, at noon about 73 per cent, being almost uniform throughout the year. The average annual rainfall approximates 50 inches, four fifths occurring from May to October.



Fig. F. West coast of Andros (near Wide Opening). White marl with Mangroves.

The vegetation of the Bahamas is a low, monotonous growth. The opportunities offered for a varied plant life are very restricted: a rocky, calcareous ground, heat and salt, no mountains, no valleys, no running streams or fresh and quiet waters. The beach-plants are succulents, furnished with different means for a vegetative propagation, liable as they are to be uprooted or buried by the shifting sand (Fig. E). The interior is filled with a scrubby coppice growth (Fig. G), in some places alternating with pine-barrens (Fig. H) or with areas of small palms (Fig. I). There is nothing of the grandeur of the large tropical forests. Mangroves (*Rhizophora mangle* and *Avicennia nitida*) make up the greatest part of the vegetation along bights (Fig. K), creeks (Fig. L) and brackish ponds (Fig. M).

The conditions that are offered to animal life in water are a little more

<sup>1</sup> In the summer of 1908 I found the temperature at Mastic Point on Andros generally to be in August between  $30^{\circ}$  C (about 3 a. m.) and  $36^{\circ}$  C., in the winter about  $23^{\circ}$  C in the day.

various. The coast shows all intermediate states between that of a low sand-beach (Fig. E) to that of a steep rocky shore (Fig. D), but in all cases the ground is coral-sand or such sand hardened to rock. Along the western side of Andros the ground for a vast area consists of white marl (Fig. F). As will be shown later on, different formations of the fauna are found according to the character of the beach. Along the shores coral reefs occur offering, as always, great opportunities for various types of animal life. The bottom of the sea, however, is uniform throughout the whole archipelago, consisting only of coral-sand. Different depths are found, from shallow water down to 1500 fathoms, as between the southern islands.

There are two physical conditions more that are of great importance for the study of the fauna of an oceanic island, the sea streams and the prevailing winds. The Bahamas are

swept both on the east and on the west by the Antillean Stream giving many opportunities for a passive transport from the Lesser Antilles and from Haiti and Cuba. On the north runs the Gulf Stream between the Bahamas and Florida, but the direction of it makes it of less importance in this respect. It is possible that this stream is able to transfer animals from Cuba to the Bahamas, but such a transportation from Florida to



Fig. G. Coppice (Mastic Point, Andros).

the Bahamas is hardly probable. The prevailing winds are easterly. The tracks of the hurricanes, those terrible storms which are able to throw up on the beach rocks weighing several tons, pass from the southeast over the Bahamas. From this it is clear that *a priori* we have to expect that the fauna of the Bahamas has invaded from south, from Cuba, Haiti or perhaps even from some of the Lesser Antilles. An analysis of the fauna will be made, as far as it is possible to judge anything from the present knowledge of it, in the following chapter.

### C. The Fauna of the Bahamas.

It is quite impossible here to give a thorough account of the Fauna of the Bahamas. Only a few classes of the animals found in the islands have so far been the subject of investigations and the descriptions of them refer mostly to collections made in an incidental or casual way. During my visit to the Bahamas I collected



specimens, representing almost all groups of animals but they are not worked up yet. I am here trying only to give a sketch of the general character of the fauna, discussing it according to the different regions in which it occurs: the land fauna, the fauna in fresh and brackish waters, the sea fauna in its different regions, along the shore, on the coral reefs and in the depths.

### (a) The Land Fauna.

From what has been said about the origin of the islands and about their physical conditions which they offer to animal life we cannot expect to meet with a rich and various land fauna. The mammals must be scarce. Only such forms that by flight or by means of floating trees, stocks and so on, could arrive at the islands, are to be found except those introduced by man. To swim over the broad waters separating the islands from other land is not possible for any land mammal. And accordingly the mammals recorded are few<sup>1</sup>. Three species of rats have so far been found, amongst them the small house mouse of the Old World (*Mus musculus* L) and the black rat (*Mus rattus* L), all introduced. Several species of bats are found, many endemic, but all belonging to rather wide ranging genera. Except these forms, in whose occurrence there is nothing strange, only two other mammals occur in the islands, a raccoon (*Procyon maynardi* BANGS) and a »hoo-tie» (*Capromys ingrahami* ALLEN). The former, allied to North American forms, but known only from New Providence, occurring in mangrove swamps, has in all probability been introduced from the main land, according to an old tradition by some plantation owners. The latter is found only on some very small keys, the Plana Keys. Related species occur in the Greater Antilles but comparatively little is known about them.

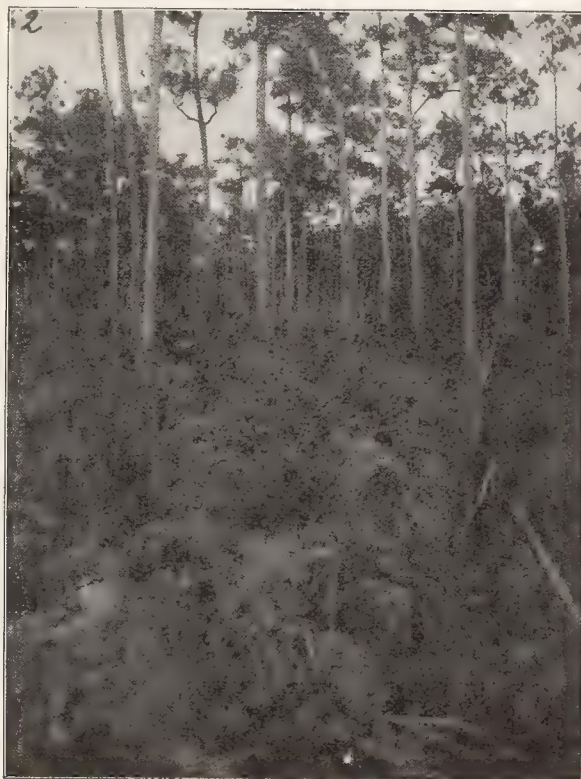


Fig. H. Pines (Interior of Andros).

The birds have been studied rather well and much has been written about them<sup>2</sup>. About two hundred species are recorded, but about half the number consist of migrants or forms of only accidental occurrence. Several forms are endemic.

<sup>1</sup> Compare: MILLER's paper in »The Bahama Islands».

<sup>2</sup> See: RILEY's paper in »The Bahama Islands», and CHAPMAN's in »The American Naturalist» 1891.



It has been shown that the avifauna has been derived largely from the Greater Antilles by way of Cuba, but also to some extent from Florida. The last element however is of a more recent origin. In most places there is nothing striking about the bird life. They are small and of dull colours, except a few orioles, the humming birds and the large turkey buzzard (*Cathartes aura*), which is rather common in some places. But there are some places where the bird life is very rich and interesting, e. g. along the western coast of Andros. Here are in bights, creeks and in the numerous ponds a great abundance of ducks, several forms of herons, pelicans and flamingos, which give to this vast uninhabited area a very interesting and charming character.

About 30 species of reptiles are found. Everywhere there are to be met with the small lizards, the males of which are provided with a pretty gular sack,



Fig. 1. Palms (West side of Andros).

belonging to the genus *Anolis*, the »American chameleons». Along sandy beaches the pretty, striped lionlizard (*Ameiva thoracica*) is rather common. Under rocks and stones small Boas (*Ungalia*) are to be found curled up. No poisonous snakes occur. Close to the settlements the »chicken-» or »fowl snake» (*Epicrates striatus*) the largest snake of the islands, measuring up to several feet, may be seen. As I have shown in the second part of this paper, the reptile

fauna is derived solely from Cuba and Haiti. No form has invaded the islands from Florida. Three-fifths of the reptile fauna is endemic. Of frogs there is only one species common, the »bull frog» (*Hyla septentrionalis*), which also has invaded from Cuba and Haiti.

Of other land animals I will only mention a few forms, which are somewhat more conspicuous. Under stones and rocks large centipeds, scorpions and spiders will be found. Shells abound, especially the forms of *Cepolis* and *Cerion*, the latter varying very much in different localities<sup>1</sup>. Of insects may be mentioned two luminous forms, which at night are in perpetual motion, making a wonderful sight, the never-ceasing singers, and the great plague of the islands in summer, the nu-

<sup>1</sup> See: PLATE, Die Variabilität und die Artbildung nach dem Prinzip geographischer Formenketten bei den Cerion-Landschnecken der Bahama-Inseln. — Arch. f. Rassen- und Gesellsch.-Biologie. IV (1907).

merous mosquitoes and sand flies. Several species of mosquitoes are found, among which also the yellow-fever carrier (*Stegomyia fasciata*), while the malaria mosquito (*Anopheles*) has not yet been observed. At the end of the summer there are some animals that attract attention more than anything else, the land crabs. Two forms occur, the yellowish brown *Cardisoma*, by the natives called the »white crab», and the purplish black *Gecarcinus* («the black crab»). At this time of the year these crabs migrate in vast numbers to the sea to lay their spawn. The beach may on such occasions be seen almost covered with them. At other times of the year they crawl about in the interior of the islands or dwell in the holes in the rocks filled with rain water. An other land crab is a hermit crab, crawling along with a shell very often belonging to a marine form.

As far as the land fauna hitherto has been studied, it has been plainly shown that it is derived from that of Cuba and Haiti. That some birds and other flying animals have also reached the islands from Florida cannot be regarded as surprising.



Fig. K. From a Mangrove-bight (Mastic Point, Andros).

#### (b) The Fauna in Fresh and Brackish Waters.

As has been mentioned before, no streams are to be found in the Bahamas. Of large fresh waters there is only one lake on Andros, the fauna of which has not yet been studied. During the summer rainwater is gathered for a short time in holes in the rocks and becomes a breeding place for mosquitoes and tadpoles. The rock is very porous however and this makes almost all bodies of water more or less brackish. Brackish ponds, sometimes very large, as for instance along the west side of Andros, are very numerous. Some of them are connected with the sea by small channels, others are so connected only through the porosity of the rock. In these ponds the fauna is rather poor, a few fishes, as the Cyprinodont *Gambusia affinis*, shads (*Gerridae*) or swelling fishes (*Spheroides*), several shells and so on. In some of the ponds, which for any considerable time have been cut off from direct connection



with the sea, the salinity has gradually increased, converting them to real salt ponds. The fauna in them has originally invaded from the sea, when the pond was still in connection with it, but under the peculiar conditions, under which these forms have had to live, the water getting more salt, they have become somewhat modified. It would be of a great interest to study this fauna and its modification, as all intermediate states of ponds between bights, in broad connection with the sea, to these salt ponds perfectly cut off are to be found. Unfortunately this has been done very little. Some shells from a salt lagoon on Watlings have been collected, DALL<sup>1</sup> having given a few notes on them: »The changes to which they were subjected appear to have been an increase in the salinity and consequently in the specific gravity of the water; higher temperature; and greater exposure to sunlight. All the lagoon species as compared with their nearest allies exhibited certain common

differences; these were tenacity of shell, diminutive size, and intensification of colour when the species was other than black or white».



Fig. L. Creek on west side of Andros.

#### (c) The Fauna in the Sea.

No region of the fauna in the Bahamas shows such a variation as that of the shore, a study of which will be of some interest. There are two different types of shores, the rocky shore, consisting as mentioned above of coral sand cemen-

ted to limestone, and the sand-beach. The faunas of these two regions are rather different, the former being by far the richest.

*The rocky shore fauna.* When the shore slopes gently towards the sea, several regions of the shore can be distinguished, according to the shape of the rock and according to the extent to which it is covered by water at different tides. During my visit to the Bahamas I had many opportunities of studying these different parts of the shore and the fauna which is characteristic of each region. The conditions that have caused this regional difference in the fauna are in all probability not only the level of the sea but also the salinity and the temperature. The water that remains in the holes, when the tide draws back, gets very warm (in summer about  $+32^{\circ}$  C.) and salt. I am here giving a few accounts thereof.

<sup>1</sup> »Bahama Islands», ed. by SHATTUCK, pag. 45.



Going from land towards the sea the first region that can be distinguished is a narrow land area (Fig. N, *a*) characterized by a low growth, stones, dead shells and corals thrown up by the waves, as well as sea-weed. This area is not reached by the sea except on rare occasions. The most characteristic animal found here is a shell, *Tectarius muricatus* L., clinging to stones or plants and bushes by means of a secretion, which hardens in the air, as a thin membrane attaches the limb of the shell aperture to the stratum named. The foot is always fully withdrawn and the shell closed by an opercle, thus keeping the necessary moisture, when the animal is not crawling about, which I never observed in day-time. The shell is almost chalk-white owing to the great insolation. The occurrence of this shell here is of interest, as it is a gill-breathing form, that must be developed in the sea. Among the sea-weed, more or less decaying, sand fleas abound. A few shells, small centipedes, earth-worms, small crabs and Forficulids will be found. After storms mouse fishes (*Pterophryne histrio*) and other animals living among the sargasso weed may be found thrown up. Shells of *Spirula* are rather common, but I never saw the animals thrown up.

Outside this land area follows a region that occupies that part of the rocky shore with a comparatively smooth surface with rather large but shallow holes which only at high tide is

reached by the sea (*b*). The holes are then filled with water, often remaining there when the sea draws back, but they are sometimes laid quite dry at ebb-tide. Small areas of coral sand, recently thrown up by the waves are found at some places. The vegetation is very insignificant consisting only of a very thin cover of algæ, and is sometimes entirely wanting. The only varieties of animal life here are three shells, *Tectarius nodulosus* GM. var. *dilatatus* D'ORB., with a greenish shell, *Littorina ziczac* CH. and small specimens of *Nerita versicolor* LAM., the larger specimens of which occur in the following region.

There is not much difference between the last named region and the following (*c*) as to the stratum. This is made up of rocks, with holes like those in the preceding region, but the surface of the rock is not smooth but extremely ragged and pitted. The same form of *Nerita*, the young ones of which were found in the region inside of this, occur here, but also two other species, the »bleeding tooth»



Fig. M. Brackish pond (Near Wide Opening, Andros).

(*N. tessellata*) with the characteristic blood red blotch inside the aperture, and another form with a black opercle. These two last-named forms of *Nerita* occur throughout the range of these ragged rocks, even on the outside, where the breaking of the waves are very heavy. The *Neritas* are always attached with the foot, not by means of any secretion, which would not do in the strong currents caused by the flowing tide. They are much more dependent on the water than *Tectarius*, and cannot live for any considerable time out of water as these do. Several specimens were brought to the place where the specimens of *Tectarius* live, but they all died rather quickly. *Tectarius* on the other hand is not able to stand the heavy rolling of the sea to which all animals in the region *c* are exposed. An experiment showed that they were washed away, if they had not already crept up to the more quiet region. On the outside of this region large Chitons and barnacles are also found.

A quite sterile region (*d*) follows the preceding. The ground is flat, consisting of coral sand, very tightly packed, but not cemented to limestone. No algæ are found here and animal beings are also wanting, except some shells accidentally

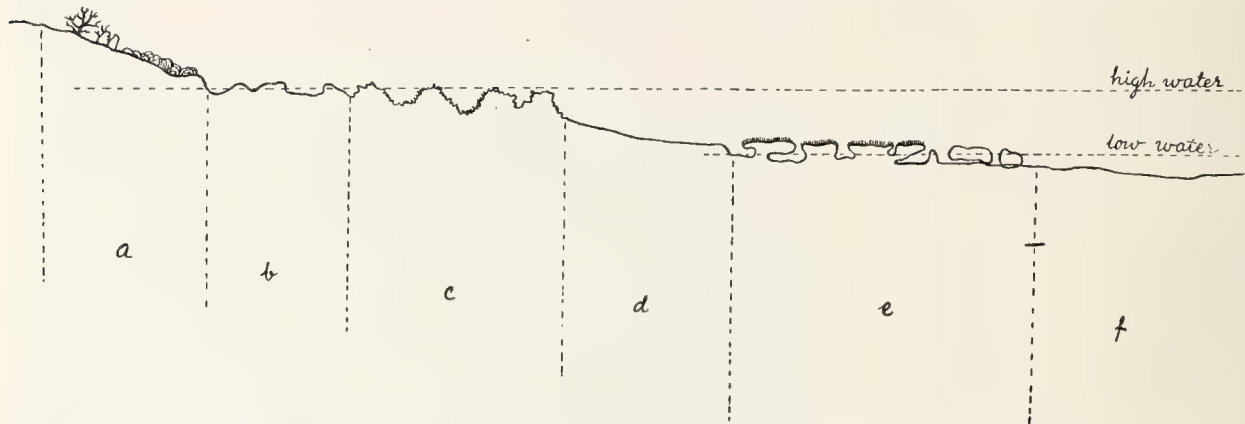


Fig. N. Section through a rocky shore, showing the regions of the Fauna. (See text.)

occurring. This is the region where the force of the waves, when the tide flows seems to be strongest. I think that the absence of *Neritas* and Chitons here is due rather to the lack of sea weed and other organisms on which they feed, than to defective power of standing the waves.

A varying animal life characterizes the broad area which is the last region that is influenced by the tide (*e*). Coral sand, hardened almost to rock, covered with low algæ forms the ground. Holes in the ground are numerous as well as loose rather large pieces, due to an undermining of the hard sandy rocks, or pieces of corals, thrown up by the waves. At high tide this area is entirely below water, but at low tide the upper surface is laid dry, the water however remaining in the holes and under the stones. In the rocks several polychæts. (Sabellids and others) and Gephyreans burrow. Sea-urchins excavate the rocks, Holothurians, both small and of a medium size, ophiurians and a great number of shells, as *Purpura*, *Conus*, are found under the rocks. Several forms of crabs occur the large blue crab (*Calinectes*), rock crabs (*Pilumnus*), spider crabs and a grea,



number of small pretty coloured forms. Stomatopods in all colours swim between the rocks. With them vie in brilliancy of colours the snapping-prawns (*Alphestes*), known to every collector in these regions by the one claw being much larger than the other and through the sharp snap they make when closing the sharp-edged blade on this claw. Sea-anemones are represented by several forms, attached to the rocks or with the foot buried down in the hard sand. *Palythoa* a genus of colonial Actinians, push up their expanded zooids through the sand. A great number of small fishes dwells here, Blennies of the genera *Labrisomus*, *Malacotenus* and *Auchenopterus*, Gobies (*Gobius saporator*), small specimens of *Eupomacentrus*, *Gobiesox* and others. At low water small bluish collembolas (*Anurida maritima* LABOULB.) are seen running about. Small pieces of living corals (*Porites*) are often found here along the shore and they seem able to bear exposure to such a life at least for some time, the zooids being found expanded.

Outside this region the tide has no influence on the fauna. We come to a region (*f*) that is always below water. Corals, as flat pieces of *Meandra*, *Porites* and other, are found here, as well as several forms of gorgonians and sponges. This region continues in a sea bottom consisting of coral sand, the fauna of which will be described below.

The regions of the rocky shore, described above, are not always to be distinguished. At places where the beach slopes not gently, but more or less abruptly one or several of these regions are eliminated. There are also many intermediate states between the rocky shore and the sand beach, the fauna of which I shall now briefly describe.

*The sandy beach fauna.* The sand beach consists oft the same material as the rocky shore, coral and shell sand, but owing to the very recent deposition of this, it has not yet got cemented to rock. The fauna here is very poor. We meet the same land area as in the preceding shore formation, with the same growth and seaweed thrown up. The fauna is also identical with that found in the corresponding part of the rocky shore. Outside this area we have a smooth sand ground, with hardly any other animals than the sand-crab (*Ocypoda arenaria*). These sand-coloured crabs which are rather common, burrow deep perpendicular holes in the sand, to which they retire if alarmed. They are seen running about on the sand catching sand fleas, on which they largely subsist.

*The fauna of Mangrove-bights.* At many places in the Bahamas bights are found, bordered by a rich mangrove vegetation. The beach is quite sandy or a little rocky, with shallow holes, in which water may remain when the tide retires. This physiographical formation has its own characteristic fauna too. Attached to the mangroves so high that they are reached by the sea only at high water, small barnacles are found. Common on the mangrove is also a shell, (*Littorina angulifer* LAM.). Crabs may be seen crawling about. At about the high-water level the beach is pierced with an immense number of small holes, the burrows of a *Gelasimus*, this interesting little crab, and shells of the genus *Cerithium* almost cover the



beach at same places. A little further out from the Mangrove growth several lagre crabs occur, some af them being identical with those met with along the rocky shore. Fishes as *Gerres*, *Gobius*, *Spheriodes*, *Eucinostomus* and other are often rather numerous here.

*The coral reefs.* Corals are scattered over vide areas of the Bahamas. They are mostly found along the edges of the banks but also in the interior of them. The vast surface of the Great Bahama Bank east of Andros is quite devoid of corals except at a few places just along its edge, but along the eastern edge of this island the corals flourish forming magnificent barrier reefs. Several other rather extensive coral reefs are found along the Providence channels. The corals seem always to form only a thin layer on isolated patches of æolion rock, the material of which the whole archipelago is built up, if not consisting of not yet consolidated coral sand. Madreporas, Porites and Mæandrinæ are the main forms of corals on the reefs. On the reef along the eastern coast of Andros the *palmata* form of the Madreporas were generally found on the outer part of the reefs, while *cervicornis* forms occurred on the inner edge, as well as in many of the bights. Forms of an intermediate shape were often observed on the tops of rock patches lying inside those with true *palmata* forms. Besides corals, Millepores and a great number of different Gorgonians, as well as sponges, make up the reefs. A very rich and various animal life dwells about the reefs. Numerous crabs and shells crawl among the corals, gorgonians and sponges. Boring mussels are common. Worms and ophiurians occur in many forms. The animals that always must attract the greatest attention of every visitor to a coral reef are the fishes. Their brilliancy of colours is surpassed by no other animals. Some of the most striking forms of fishes occurring about the coral reefs of the Bahamas may be mentioned: *Scarus cæruleus* (BLOCH), *Chlorichthys bifasciatus* (BLOCH), *Iridio garnoti* (CUV. & VALENE.) *Teuthis coeruleus* (BLOCH & SCHNEIDER), *Pomacanthus arcuatus* L., *Angelichthys ciliaris* L., *Ocyurus chrysurus* (BLOCH), several species of *Bodianus* and *Epinephelus*. For a further account of the fish fauna I refer to the third part of this paper.

*The fauna of the sea between the reefs and the shore.* The fauna is almost quite concentrated on the reefs. Between the reef and the shore in some places gorgonians and a few corals may be found, but as a rule, the only animals that are found in this part of the sea are a large holothuria (*Holothuria mexicana*), the sea-star *Pentaceros reticulatus*, the shell *Strombus gigas* and sponges. In the holothuria named *Fierasfer affinis* dwells and in the mantle cavity of *Strombus gigas* another symbiotic fish will be found, *Apogonichthys strombi* PLATE. In the holothuria I also found a parasitic gastropod, living in the water-lungs, *Megadenus holothuricola*, which I have described in an other paper<sup>1</sup>. Almost all orders of marine animals are found in the labyrinths of the sponges: worms, crustaceans, molluscs, ascidians, fishes and so on, and a fauna quite as rich inhabits the dead shells of *Strombus gigas*. Of

<sup>1</sup> ROSÉN, Zur Kenntnis der parasitischen Schnecken. Fysiograf. Sällskapet's Handl. Lund 1910.

sponges several kinds of commercial forms occur, the bank west to Andros being one of the most important sponging places. Except these animals and the fauna dwelling in them the sea-bottom is for very vast areas perfectly sterile. Nothing is to be found. One of the most lifeless localities I have ever seen is that along the western beach of Andros. The only animal living I here observed was a reddish ascidia and large sting rays. The water is here very shallow and the bottom consists of white marl. It is only at some distance from the beach that the sponges with their fauna are found.

*The deep-sea fauna.* The only knowledge we have about the fauna in the depths of the Bahamas is that given by ALEX. AGASSIZ who during his cruise on the »Wild Duck» made some hauls with a self-closing Tanner net, but very little was found. As mentioned before shells of *Spirula*, *Pterophryne* and other fishes may sometimes be found washed on the beach. They all belong to a fauna occurring in comparatively deep water.

*The sea-plankton.* ALEX. AGASSIZ has also mentioned some planctonic forms gathered during his trip to the Bahamas, as *Diphyes*, numerous copepods, *Alciope*, larvæ of crustaceans, appendicularia, molusc larvæ, pteropods and so on, but the pelagic life is rather poor.

## II.

### The Reptiles.

Though collections of reptiles have at several times been made on the Bahamas, the herpetological fauna of these islands is still insufficiently known. The reason is, that the collections have been made during a very short time, and that some of the islands have been explored comparatively well, some hardly at all. No zoologist has visited all the islands in order to study the reptiles. One of the most interesting collections was made by the *West Indian Expedition of the Pennsylvania University*, 1890—1891, which visited among the Bahamas the following islands: New Providence, Eleuthera, Watlings, Crooked Island and Great Inagua. Mr. J. P. MOORE, who was in charge as zoologist of the expedition collected the reptiles and has given several valuable field-notes about them, which have been published by COPE, who has described the collections (11). Reptiles were also collected by the *Bahama Expedition of the Baltimore Geographical Society* (1903) at several of the islands. They were described by STEJNEGER, who has given an excellent account of the reptilefauna of the archipelago, as it was known at that time (17, 18). BARBOUR paid a month's visit to New Providence, Great Abaco and Grand Bahama in 1904, collecting several reptiles in these places, which he has described, together with some other collections, made by other American naturalists on these and some other islands of the Bahamas (1, 2). GARMAN has described the reptiles from the Bahamas in the Museum of Comp. Zoology at Cambridge (Mass.), most of them collected by C. J. MAYNARD on Inagua, Rum Key and Andros, but also by other persons (12—15). The collections in the U. S. Nat. Mus. were described by COPE (10).

During my stay in the Bahamas I collected a great number of reptiles and had plenty of opportunities to study the reptiles in a living state, especially their coloration and its changes. In publishing the results of these studies, I am also giving a summary account of the present knowledge of the reptile fauna of the whole archipelago, its composition and origin.



# 1. List of Reptiles, occurring in the Bahamas, with systematic notes.

## A. Lizards.

### Fam. Geckonidae.

#### *Sphaerodactylus asper*, GARMAN.

Bull. Essex Inst., Vol. 20 (1888), p. 113.

This species was described from Andros, no other locality being given. I did not find it at any of the places I visited on North Andros. Perhaps, the species is in its distribution restricted to South Andros.

#### *Sphaerodactylus corticolus*, GARMAN.

Bull. Essex Inst., Vol. 20 (1888), p. 111.

Described from Rum Key, but also recorded from Watlings (STEJNEGER, 18).

#### *Sphaerodactylus decoratus*, GARMAN.

Bull. Essex Inst., Vol. 20 (1888), p. 112.

Described from Rum Key, but recorded also from New Providence (BARBOUR, 1) and Andros (BARBOUR 1). I found it in Nassau and on Andros, very common at Mastic Point. I observed it always about the houses, usually in fissures or holes in the walls.

GARMAN states the colour to be brown with several white markings. All the markings in living specimens are yellow, except the two dots on the darker neckring, which are almost pure white and very conspicuous.

#### *Sphaerodactylus flavicaudus*, BARBOUR.

Bull. Mus. Comp. Zool., Cambridge, Vol. 46, p. 56.

Described from Mangrove Cay on Andros. I found it at Mastic Point, together with *Sph. decoratus*, but it was not quite so common.

#### *Sphaerodactylus notatus*, BAIRD.

Proc. Acad. Nat. Sci., Philadelphia, 1858, p. 254.

This lizard is recorded in the Bahamas from Little Abaco (BARBOUR 1), Stranger Cay (BARBOUR 1), New Providence (BARBOUR 1, STEJNEGER, 18) and Great Abaco (COPE). I collected some specimens in a yard in Nassau, running about the walls.

In living specimens the spots and lines are yellow.

### Fam. Iguanidae.

#### *Anolis cinnamomeus*, COPE.

Proc. Acad. Nat. Sci., Philadelphia, 1894, p. 435.

According to GARMAN, this species is identical with *A. leucophaeus*, GARMAN. Described from Inagua.

*Anolis distichus*, COPE.

Proc. Acad. Nat. Sci. Philadelphia, Vol. 13 (1861), p. 208.

Fig. 13, a—c.

This species was first described from New Providence. Later authors have found it also on Great Abaco (COPE 10), Andros (BARBOUR 1) and Cat Island (STEJNER, 18). It is somewhat uncertain whether the specimens from Andros belong to this species. During my stay on Andros, — what was more than six months — I did not find this species there, but another one, closely allied, which I am describing below as a new species, *A. distichoides*. These two species, if not carefully examined, will easily be confused with one other, still there is a distinct difference between them both in colour and squamation. Of *A. distichus* I collected many specimens on New Providence. COPE's description of *A. distichus* shows clearly that it is identical with the species, I found on New Providence. I am giving below a description of *A. distichus* in order to show the difference between the two species mentioned.

Forehead concave. Frontal ridges distinct. Upper head scales smooth or rugose. A median suture on the snout, beginning on the rostral. Two rows of five large quadrangular or polygonal scales, separated by the mentioned suture, diverging posteriorly. The last scale in each row, which are separated by small scales, is the largest one, and in contact with the supraorbital semicircle. On each side between these rows of enlarged scales and the cantus rostralis is a row of three large scales, one of which is in contact with the first and second scales of the supraorbital semicircle. Several small scales behind the nasal. Canthus rostralis distinct, with two or three larger scales near the superciliaries. Two keeled superciliary scales, followed by small tubercles, a little larger than those on the eyelid and the supraocular disk, thus forming a limit between them. Supraorbital semicircle beginning at the canthus rostralis, with about six larger scales, followed by smaller ones. Both the semicircles in contact with each other between the eyes or separated by a series of small scales. Supraocular disk with about five enlarged scales separated by small scales from the supraorbital semicircle. The enlarged scales of the supraocular disk smooth or with a small tubercle in the middle. Several small scales in the space which is enclosed by the diverging ends of the two rows of large scales on the snout and the supraorbital semicircles before their contact. Occipital very large, divided in two parts by a transverse straight suture, in contact with the supraorbital semicircles. Behind the occipital several small »swollen» scales, much larger than the dorsals. Nasal in contact with the rostral, separated from the superior labials. Loreals in about four rows. About seven large superior labials, followed by smaller scales. About six large keeled infraorbitals, three of them being in contact with superior labials. About six smooth inferior labials. Two or three rows of large smooth scales between the inferior labials and the underhead scales. Dorsals gran



ular, ventrals smooth and larger, not smaller, as COPE has described them. Gular appendage moderate. Tail compressed, with slightly serrated upper edge.

In living specimens the colour is mottled with grey and brown, but it may change to lighter or darker, the markings then becoming almost indistinct. The gular appendage is light yellow. In this species, as well as in all species of *Anolis* I have observed, the colour of the gular appendage never changes like that of the body. It is always the same.

*Anolis distichoides*, n. sp. Fig. 12, a -- d.

This species is closely allied to *A. distichus*, COPE, but differs in having a greater number of scales on each side of the median suture on the snout, the infraorbitals are smaller and about ten. The colour of the gular appendage is always yellowish red.

About seven scales along each side of the median suture on the snout, reaching the supraorbital semicircles. Five loreal rows. Ten small, almost quadrangular keeled infraorbitals. One keeled large canthus rostralis scale. Two keeled superciliaries. No distinct limit between the granules on the supraocular region and those on the eyelid. Occipital divided in two parts, in contact with the supraorbital semicircles. Nine superior labials. Six or seven inferior labials. Tail with small scales at the base, large scales on the rest, larger and more strongly keeled on the under side than on the sides. A serrated upper edge. The adpressed hind limb hardly reaching the eye. Scales on the anterior side of the foreleg enlarged, those on the hind-leg only slightly enlarged.

The colour is the same as in *A. distichus*, COPE, but the gular appendage is yellowish red.

Dimensions: Head 13, width of head 9, snout to vent 45, vent to top of tail 55, fore-leg 19, hind-leg 28, tibia 12 mm.

I found this species at Mastic Point and Stanniard Creek on Andros, but never saw it on New Providence. As before mentioned *A. distichus* was common on New Providence, but I never succeeded in finding it on North Andros, although the species according to the characteristic colour of the gular appendage is very easily distinguishable, even at a good distance, from *A. distichoides*.

*Anolis leucophaeus*, GARMAN.

Bull. Essex. Inst., Vol. 20, (1888) p. 109.

Described from Inagua. *A. cinnamomeus*, COPE, is identical with this species (STEJNEGER, 18).

*Anolis moorei*, COPE.

Proc. Acad. Nat. Sci., Philadelphia, 1894, p. 433.

Described from Inagua, where it is said to be very common. GARMAN is in doubt whether this species is distinct from *A. leucophaeus*, GARMAN (see STEJNEGER, 18, p. 334).



*Anolis oligaspis*, COPE.

Proc. Acad. Nat. Sci., Philadelphia, 1894, p. 430.

Described from New Providence.

*Anolis ordinatus*, COPE.

See *A. sagrae*.

*Anolis porcatus*, GRAY.

Ann. Mag. Nat. Hist. 1840, p. 112.

Syn. *A. principalis* L. (so named in COPE's papers).

Fig. 7 and 8.

In the Bahamas this species is recorded from several islands, viz. Abaco, Eleuthera, New Providence, Andros and Cat Island.

STEJNEGER (18, p. 332) and BARBOUR (1, p. 57), both of them have examined specimens from the Bahamas and Cuba, think it rather probable that there is a constant difference between the specimens from the both localities, but they have not had material enough to settle the question. BARBOUR (p. 57) writes: »In the Cuban specimens the longitudinal rugae of the head are rather more pronounced, and do not appear to involve so many scutes as in the Bahaman specimens». He has, indeed, not given any further description of the Bahama specimens. I collected several specimens both on New Providence and on Andros: and according to BARBOUR's statement that this species is common on these islands I think it rather probable that it is the same form that we have collected. In order to make it possible for other authors, who perhaps, will get an opportunity to examine Cuban specimens, to compare the two forms, I am giving the following description of the specimens from Andros and New Providence. As I have seen only a few specimens from other localities than the Bahamas, it is impossible for me to form an opinion whether the Bahama variety ought to be referred to a distinct subspecies or not.

Description of specimens from Andros and New Providence (common on both islands, Fig. 7): Upper head scales keeled. The upper head ridges rather prominent, beginning behind the supraocular region, running forward to between the nostrils, where they are almost in contact with each other. Each ridge involves about ten scales. These two rows of scales are in contact with each other between the nostrils and sometimes also by one scale between the eyes, but at other parts separated from each other by one series of scales. Several small scales on the end of the snout. A few very small scales behind the nasal. One series of scales between the canthus rostralis and the scales forming the ridges. Sometimes, one of these scales with a little stronger keel, than the other ones. This keel is continued on two of the ridge scales, thus forming a slight but rather distinct branch from the ridge towards the canthus rostralis. The enlarged supraocular scales separated from the supraorbitals by small scales. Occipital surrounded by feebly keeled scales. A slight occipital depression. Canthus rostralis with six keeled

scales. Three loreal rows, the middle one formed only by one or two scales. One keeled superciliary scale. Of the infraorbitals four are long, with two strong keels, in contact with the superior labials. Eight distinct superior labials. A row of nine large scales, the first one in contact with the mental and first inferior labial. This row is separated by one to three scales from the other inferior labials. Dorsals smaller than ventrals, all strongly keeled. No nucho-dorsal fold. The colour of all these specimens is green, below lighter, somewhat yellowish. The colour can change from green to greyish green and dark brown, sometimes a reddish touch is noticeable. The gular appendage is red, with green dots (on the scales). The colour of the gular appendage never changes.

COPE<sup>1</sup> has described a form of *A. porcatus* from Crooked Island as a subspecies *brunneus* (*A. principalis brunneus*). To judge from his description and figures it seems to me rather doubtful that this is distinct from the specimens of *A. porcatus* described above. All the structural characters of his subspecies seem to be found in these specimens, e. g. the number of scales on the fore-head, the ridges on the head, the loreal scales. The colour is according to the description different from the usual one in the Bahama form of *A. porcatus*, but I do not think any greater importance can be attached to this circumstance, all the more as the colouration is described only from preserved specimens. COPE does not mention from which locality the specimens are which he has compared with those from Crooked Island and which to him have been the type of »*A. principalis*», whether they are from United States or from Cuba. However, he has called attention to some distinct differences in squamation, which other authors have not noticed. It would have been of great interest, if STEJNEGER's and BARBOUR's notices about *A. porcatus* had contained detailed descriptions of the squamation of the head, especially as I have found two specimens in the Bahamas, one at Mastic Point (Andros), the other at Stanniard Creek (Andros), which differ from the very common form described above from Andros and New Providence in this point. I will give below a description of these two specimens, which represent the same form of *A. porcatus*.

Description of two specimens from Andros (Fig. 8): Upper head scales keeled. The keels are not so prominent as is usual in the common form, but this difference may be due to the preservation. The upper head ridges feeble, but distinct. They are of another form as in the common form. Before the eyes they diverge forwards a little but then they join at a point on the middle of the snout, including a space with numerous small scales (in several rows one). The two ridges run together, impossible to trace from each other, for a short distance, then they diverge and end at the nostrils, separated by several rows of scales. The anterior parts of the both ridges are rather indistinct. Each ridge includes about ten large scales from its posterior end to the point, where the two ridges join. The anterior part of the ridge consist of several small scales. Between the eyes the two

---

<sup>1</sup> Proc. Acad. Nat. Sc. Philad. 1894, pag. 432.



ridges are separated by a row of scales. Between the ridge and the canthus rostralis is posteriorly one row of scales, anteriorly (behind the nostril a patch of numerous small scales). Canthus rostralis with seven keeled scales. Four loreal rows. The infra-orbitals seem to be more numerous than in the common form. They preserved specimens show a brownish colour, very light beneath. The back with a few indistinct narrow dark crossbands. A very distinct dark line crossing the head going through both eyes and the part between them. Tail above with seven large dark spots.

From this short description it is evident that there is a distinct difference between the two forms of *Anolis porcatus* which I have found in the Bahamas. Unfortunately I did not observe the latest described form until I at home examined the specimens. The description of the colour of this form, as given above, is, with all probability, no true expression for the colour in a living state. If so had been the case, I would certainly have observed it when catching the specimens. The present knowledge about the Bahama form of *Anolis porcatus* can from what is stated above be in shortness expressed as follows.

There are two forms of »*Anolis porcatus*» occurring in the Bahamas. One of them is rather common on Andros and New Providence and has been described above. With all probability COPE'S *A. p. subspec. brunneus* is identical with this form. The other form seems from the fact that I have got only two specimens during my long stay on Andros and New Providence to be very rare. It differs from the form first mentioned in the shape of the head ridges, the number of scales included in them, a greater number of scales behind the nostril, and in some other characters, perhaps also in colouration. From the insufficient descriptions of the forms of »*Anolis porcatus*» that occur in Cuba, it is impossible for me without any specimens from this locality before me to decide whether the Bahama forms of »*A. porcatus*» are both distinct from the Cuba form, or whether one of them is identical with it. As I have only found two specimens of the rare Bahama form, it is also with the great variability the species of *Anolis* always show impossible to decide whether this is a distinct species or only a »form» of *Anolis porcatus*. I have indicated above the characters in squamation, on which the study of this question ought to be based.

*Anolis porcatus brunneus*, COPE.

*A. principalis brunneus*, COPE, Proc. Nat. Sci., Philadelphia, 1894, pag. 432.

Described by COPE (11) from Crooked Island. See what is stated above about *Anolis porcatus*.



*Anolis pulchellus*, DUMÉRIL & BIBRON.

Erpét. gén., vol. 6, p. 97.

STEJNEGER mentions (18) a specimen in the U. S. Nat. Mus., labelled »Nassau, New Providence», which seems to belong to this species. He thinks it is possibly due to an accidental misplacement of a specimen, and does not make any further reference to it. This species can therefore not be considered to occur in the Bahamas.

*Anolis sagrae*, Coct.

DUMÉRIL ET BIBRON. Erpét. Gén. Vol. 4, p. 149.

Syn. *A. ordinatus*, Cope, Proc. Acad. Nat. Sci. Philadelphia, 1864, p. 175.

Fig. 9—11.

The type specimens for DUMÉRIL's and BIBRON's description of *A. sagrae* are from Cuba, those of COPE's *A. ordinatus* from »West Indies», no other locality given. There has been a great controversy about the distinctness of these two species. BOULENGER after having examined them both, declared the two species to be identical. In his Catalogue (3; vol. II, p. 40) he therefore refers *A. ordinatus* COPE as a synonym to *A. sagrae*. Later on COPE described both species from the Bahamas (10, 11), *A. sagrae* from New Providence, Abaco, Eleuthera, *A. ordinatus* from Turk's Isl., still maintaining the distinctness of the two species. The two species have also been recorded from other places in the West Indies (from the Bahamas also on Cat Isl. and Rum Key), as well as from Central and South America. GARMAN (14, p. 47) and STEJNEGER (18, p. 334) consider the two species distinct, both referring the Bahama form to *A. ordinatus*, the Cuba-form to *A. sagrae*. The specimens from Turk's Island described by COPE STEJNEGER believes to be another species, separated from both *A. sagrae* and *A. ordinatus*. During my stay on Andros and New Providence, I had during a whole year many opportunities of studying these lizards in a living state. Afterwards, through the kindness of Dr. G. BOULENGER, I got opportunity to examine several specimens in the Brit. Nat. Hist. Mus. from many different localities. The result of these studies is that I consider it quite certain that *A. sagrae* and *A. ordinatus* are identical. They represent, as far as I have found, only two different stages of age, *A. sagrae* the younger, *A. ordinatus* the older specimens. There is no difference in squamation between them, except that in the larger specimens there is a feeble nuchal-dorsal fold and that the tail is very strongly compressed. In the larger specimens the gular appendage is also much larger. The following description of the squamation applies to all the specimens I have collected on Andros and New Providence, as far as it is possible to give a description of an *Anolis* that shall have general application, and it seems to be the same for the specimens from other localities I have seen.

Forehead very slightly concave. Upper head-scales polygonal, sharply keeled some with two or three keeles, not regularly arranged. Head-ridges very low, involving three large scales on each side. Supraorbital semicircles in contact bet-

ween the orbit or separated by one series of small scales. Supraocular disk in contact with the supraorbital semicircles, about six scales larger; all disk-scales keeled. Occipital rather small, not as large as the ear-opening, in a large patch of small, keeled scales, which separate it from the supraorbitals. Canthus rostralis very sharp, with three large scales. Loreal scales in four or five rows, small, oblong, keeled, those in contact with the superior labials larger. Superciliary ridge consisting of three large, narrow, keeled scales, in front in continuation with canthus rostralis, behind followed by very small keeled scales. Granules on the eyelid small, except a series along the edge, which are quadrangular. Nostril in a rounded nasal scale, which is in contact with the first superior labials, separated by an oblong-triangular scale from the rostral. Five or six rows of keeled scales between the nasals. Rostral very broad, much broader than deep, without a median suture. Infraorbital semicircle with three scales, which are rather long and narrow, keeled: two of them are bicarinated and in contact with the superior labials. Six or seven large, keeled superior labials, followed by small keeled scales or granules on the temporals. Mental plates large. Seven inferior labials, oblong, smooth. Below them about three rows of keeled scales. A large smooth plate before these scale rows and the mental and first inferior labial. Ear-opening moderate, oval. Gular appendage with feebly keeled scales. The appendage is small in younger specimens, very large in older ones. Dorsal scales small, keeled, larger on the median line, more granular on the sides. Ventral scales larger, imbricate, strongly keeled, the keels forming parallel lines. Body slightly compressed. No nucho-dorsal fold in younger specimens, a feeble one in older ones. Scales on anterior part of forelimb enlarged, keeled. The adpressed fore-limb reaches almost the base of the hind limb. The anterior scales of hind-limb enlarged, keeled. The adpressed hind-limb reaches the eye. The fingers with three-carinated scales on the upper side, one-carinated ones on the side and smooth lamelliform ones on the under side. About 20 lamellae under II. and III. phalanges of fourth toe. Toes with three-keeled scales on upper side. Tail compressed, with serrated upper edge, very strongly compressed in large specimens. Small scales at base of tail, other scales strongly keeled.

As to the colour, there is a very great difference between the larger and smaller specimens. The smaller ones (Fig. 10 and 11), measuring about 40 mm. or less from snout to vent, have the flanks greyish brown. On each side a black or dark brown band, towards the median line very often bordered by white or yellowish red. These bands have their medial borders either straight or with triangular processes, which sometimes are united on the dorsal median line with those on the other side. The back between these two longitudinal bands is grey-brown, with a narrow yellowish brown or almost white band along the median line, not always quite distinct. The lateral bands continue forwards, then always with straight medial borders, to below the eye. The markings on the body continue, more or less distinctly, on the tail. Belly light with dark dots. Gular appendage yellowish red. The colour may change to lighter or darker, the markings becoming



more or less indistinct. The colour of larger specimens (Fig. 9), measuring about 55 to 60 mm. from snout to vent, is dark brown with small yellow points, bordered by black. The colour changes to light brown or to light grey, the markings getting indistinct. Belly lighter. Gular appendage brown with black spots (on the scales). Withdrawn it looks black with a light yellow edge. In formol the gular appendage sometimes get reddish<sup>1</sup>. As seen there is a very great difference in colour between the younger and older specimens, and it is not strange that these different stages of age have been regarded as different species. That this is not the case is proved by the occurrence of specimens, forming an intermediate series according to the colour between these two extreme types. I have found a great number of such specimens. The lateral bands become indistinct and disappear. The colour gets uniform brown. The gular appendage changes its colour towards brown. Its scales get dark brown or black.

As it is possible to follow the development of colouration from the stage described for the young specimens to that described for the larger ones, to follow how the tail gets more compressed with age and the development of a feeble nuchal-dorsal fold, and as it is quite impossible to find any difference in squamation, I consider it quite evident that the specimens in question all belong to the same species.

GARMAN has described a species, *A. luteosignifer* (Bull. Essex Inst., Vol. 20, p. 104) from Cayman Banc, which he considers to be closely allied with *A. sagrae*. It seems to me rather probable that it is not a distinct species but identical with *A. sagrae*. As GARMAN has not given any figures or detailed description of his species, it is not possible to form a decided opinion about it.

*Anolis* sp.

STEJNEGER (18, p. 334) refers COPE's *Anolis ordinatus* from Turks Isl. to a distinct species, not naming it. As to this question I refer to what I have stated above about *A. sagrae*.

*Liocephalus carinatus*, GRAY.

Phil. Mag. (2) II p. 208.

This species seems to be generally distributed in the Bahamas, being recorded from Great Abaco, Great Bahama, Stranger Cay, New Providence<sup>2</sup>, Andros, Cat Island and Crooked Island. At Mastic Point and the places north of it on Andros I did not find this species and was told by the natives that it did not occur there, but

<sup>1</sup> This is probably caused by the presence of two different pigments, red and brown or black: the lastnamed is the most developed and gives the animal its general colour, but it is more easily destroyed than the red one, which accordingly to preserved specimens is giving the colour. I have made the same observation about the changing influence of preserving fluids on some fishes in the Bahamas.

<sup>2</sup> According to COPE; BARBOUR says it is unknown there. I never saw it there.



at Stanniard Creek and places south of it, especially on the small cays in the channel between North and South Andros, it was found to be very common. COPE states it to be very abundant on Crooked Isl., »where Anoles are comparatively uncommon». This species is generally called »curl-tail-lizard». I observed it always on the ground, never climbing trees or bushes.

*Liocephalus loxogrammus*, COPE.

Proc. U. S. Nat. Mus. Vol. 10 (1887), p. 437.

Described by COPE from Rum Key, by STEJNEGER (18) from Watlings.

*Liocephalus schreibersii*, GRAVENH.

N. Acta Leop.-Carol., Vol. 18, p. 739.

Found on Inagua (GARMAN, 15).

*Liocephalus virescens*, STEJNEGER.

Proc. U. S. Nat. Mus. Vol. 23, p. 471.

This species, described by STEJNEGER from Green Cay, is later on said by him (18 p. 334) to be only a local form of *L. carinatus*, GRAY.

*Cyclura bacolopha*, COPE.

Proc. Acad. Philad. 1861, p. 123.

Recorded from Andros by COPE (10), STEJNEGER (18) and BARBOUR (1). I never saw any iguana on North Andros, but was told, that it occurred in the interior of the island westwards of Stafford Creek.

*Cyclura carinata*, HARLAN.

Journ. Ac. Philad. 1824.

Found on Turk's Island (COPE, 10).

*Cyclura cyclura*, CUVIER.

Règne anim. 2 ed. II, p. 45.

COPE (10) records this species (syn. *C. nubila*) from Cat Isl., but STEJNEGER (18) doubts the correctness thereof.

*Cyclura rileyi*, STEJNEGER.

Proc. Biol. Soc., Washington, 1903, p. 129.

Described by STEJNEGER (17) from Watlings.

Fam. **Teiidae.**

*Ameiva leucomelas* COPE.

Proc. Acad. Nat. Sc., Philadelphia, 1894, p. 436.

Described from Inagua.

*Ameiva maynardii*, GARMAN.

Bull. Essex Inst., Vol. 20, (1888), p. 110.

Described from Inagua, not recorded from other places.

*Ameiva thoracica*, COPE.

Proc. Acad. Nat. Sc., Philadelphia 14 (1862), p. 64.

Described by COPE from New Providence, but afterwards recorded also from Great Abaco, Eleuthera, and Andros. I collected many specimens of this species on New Providence and Andros, where it was very abundant, running on the ground. In sandy places they always tried to get into small holes. I could not find out whether they dig out these holes themselves. The species is called by the natives »lion-lizard».

COPE states (op. cit. p. 64) that the female differs in having a narrow median line on the back, but as far as I could find this line was always present in both sexes. According to COPE the lateral light bands are indistinct, but in living specimens they are, on the contrary, very distinct and yellow.

Fam. **Scincidae**.*Mabuya sloanii*, DAUDIN?

Hist. Nat. Rept. Vol. 4 (1803) p. 287.

According to STEJNEGER (18) it is not impossible that the species COPE has described from Turk's Isl. as *M. cepedei* and later on as *M. agilis* is *M. sloanii*.

**B. Snakes.**Fam. **Typhlopidae**.*Typhlops lumbricalis*, L.

Syst. Nat.

STEJNEGER writes (18) about a specimen from Abaco in the U. S. Nat. Mus.: »deviates slightly from the general type, which is found in nearly all the West Indian Islands, but whether it represents a depauperate form of this species or only an individual aberration cannot be determined from a single specimen». He does not mention the difference. About a specimen from Abaco, I do not know if it is the same, COPE states (10, p. 437) that the muzzle is more pronounced than in the usual form. I found in the Bahamas two specimens of this species, one in New Providence, another at Mastic Point on Andros. I cannot find any structural difference between them and the usual description of *T. lumbricalis*.

*Typhlops tenuis*, SALVIN.

Proc. Zool. Soc. 1860, p. 454.

One specimen collected at Mastic Point, Andros. It seems to agree in all characters with *T. tenuis*, except having 22 scales round the body.

Fam. **Glauconiidae.***Glauconia albifrons*, WAGLER.

Serp. Bras., p. 68.

Recorded from Watlings by COPE.

Fam. **Boidae.***Epicrates chrysogaster*, COPE.*Homalochilis chrysogaster*, COPE, Proc. Amer. Philos. Soc. Vol. 11 (1870), p. 557.

This species was described by COPE from Turk's Isl. BOULENGER refers it to *E. fordii* GÜNTHER, but according to STEJNEGER<sup>1</sup> it ought to be separated as a distinct species.

*Epicrates striatus*, FISCHER.

*Homalochilus striatus*, FISCHER, Abhandl. Naturw. Ver. Hamburg III (1856) p. 102.

*H. strigilatus*, COPE, Proc. Ac. Nat. Sc. Philad. Vol. 14 (1862), p. 71.

This snake was first described from the Bahamas (New Providence) by COPE (1862), as a new species, *Homalochilus strigilatus*. BOULENGER referred in his Catalogue (I, p. 96) COPE's new species to *E. striatus* FISCHER; and this opinion is shared by STEJNEGER (18, p. 336), who, after a careful comparison, expresses himself unable to discover any tangible differences in colour or scutellation between the two species, while GARMAN (12) and BARBOUR (1) accept COPE's *strigilatus* (specimens from New Providence and Andros). I collected eight specimens at Mastic Point on Andros, an examination of which shows clearly that they must be referred to the same species, and that it is quite impossible to separate the Bahama specimens as a species, distinct from *E. striatus* of FISCHER. COPE, who has probably examined only one or two specimens, states the difference between his new species *strigilatus* and *striatus* of FISCHER as follows. There are two »superciliary» (= supraocular) plates in *E. striatus*, but only one large such plate in *E. strigilatus*. In my specimens this character is very variable. In three of them there are two supraocular plates on each side (one larger and one smaller), in two there is only one on each side. Two other have also only one supraocular plate on each side, but this is partly divided in two. One specimen has such a plate on one side, two on the other. Another difference between the two species is, according to COPE, the presence of the subloreal plate in *E. striatus* and its absence in *E. strigilatus*. Even this character is not constant. In some of the specimens I have found this plate, in other not. The presence of a subloreal plate is due to the upper part of the fifth upper labial plate being separated as a distinct plate. The third difference between the two species, according to COPE, is the presence of cross bands and the absence of lateral stripes in *E. striatus*. To judge from my specimens, the lateral

<sup>1</sup> The herpetology of Porto Rico. Rep. U. S. Nat. Mus. 1902, p. 694.



stripes are not characteristic of »*E. strigilatus*». In some specimens they are distinct anteriorly, but in other more or less broken up in spots or cross bands. From this it is clear, that the differences between *E. striatus* and *E. strigilatus* stated by COPE, are not to be maintained, and having not been able to find any other, I agree with BOULENGER and STEJNEGER in referring both to the same species, *E. striatus* FISCHER.

This species, which I observed only near the settlements, was commonly called by the natives chicken- or fowl-snake.

*Ungalia cana*, COPE.

Proc. Acad. Nat. Sc., Philadelphia, Vol. 20 (1868), p. 129.

This species is founded on specimens from Great Inagua. It is recorded from the same locality by later collectors (COPE 10, 11) but is not known from other places.

*Ungalia curta*, GARMAN.

Proc. Amer. Philos. Soc. Vol. 24 (1887), p. 279.

According to BARBOUR (1) this species, of which there are two specimens, so labelled from New Providence, in the Mus. Comp. Zool., is to be referred to *U. pardalis* GUNDL. (See this species).

*Ungalia maculata*, AUTT.

Cope, Bibron, Dumeril et Bibron, Gray.

Under this name several specimens are described from the Bahamas. They are all to be referred to *U. pardalis* GUNDL.

*Ungalia pardalis*, GUNDLACH.

Arch. f. Naturg. 1840, p. 359.

Syn *U. maculata* autt. part.

I collected many specimens of this species on Andros (at Mastic Point and Stanniard Creek). They were always found under stones. On the west side of North Andros this species seems to be absent. It was called by the natives »doctor-snake» or »thunder-snake».

All the specimens I have examined certify BARBOUR's opinion (1) that the Bahama form (recorded from New Providence, Andros, Eleuthera) belongs to *U. pardalis* and not to *U. maculata*. BARBOUR also refers *U. curta* GARMAN to *U. pardalis*. In the specimens I collected, the tail is black, the underside only partly. One specimen is grey, the other are brown, with or without black spots, most distinct in young specimens. In some specimens some scales are very feebly keeled. Sometimes two praeoculars. Inferior postocular sometimes united with the sixth superior labial. One specimen has 27 rows of scales, three 23, the other 25. The ventrals and subcandals vary as showed by following shemes.

Number of ventrals.....	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165
Nr of specimens .....	1	2	0	3	2	2	3	3	4	0	1	0	3	2	1

Number of subcaudals.....	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
» » specimens .....	1	1	1	4	4	4	3	3	0	2

Fam. Colubridae.

*Liophis* (?) *rubescens*, COPE.

*Diadophis rubescens*, Proc. Amer. Philos. Soc., Vol. 22 (1885) p. 403.

COPE described a new species from New Providence, naming it *Diadophis rubescens*. BOULENGER referred it to *Dromicus angulifer*, but STEJNEGER (18) writes that it is very possible that it is a species closely allied to *Liopis* (*Leimadopsis*) *andreae* REINHARD & LÜTKEN. I have not seen the species, but to judge from COPE's description there seems to be a difference in the scutellation of the head, e. g. the shape of loreal and first temporal and their relations to other plates.

*Dromicus angulifer*, var. *vudii*, COPE.

*Alsophis vudii*, Proc. Acad. Nat. Sc., Philadelphia, Vol. 14 (1862) p. 74.

COPE described this form from New Providence, under the name of *Alsophis vudii*. Later on he changed the generic name to *Halsophis*. BOULENGER in his Catalogue (II p. 120) referred it to *Dromicus angulifer* BIBRON from Cuba, but STEJNEGER having found a constant difference in the number of the ventral plates recognized it (18) as a form distinct from the Cuban species, using the name »*angulifer vudii*». According to STEJNEGER, the number of the ventrals is in the Bahama specimens between 158 and 171, 164 being the average, in the Cuban ones between 164 and 180, averaging 171. BARBOUR (2) agrees with STEJNEGER in separating the two forms. In the specimens he has examined, the number of the ventrals was between 159 and 171. BARBOUR considers that *D. vudii* differs from *D. angulifer* even through a greater variation of the colour. In 15 specimens I have collected, the number of the ventrals varies between 162 and 171, thus it seems as if there was a lower number of ventrals in the Bahama specimens. I have not found any considerable variation of the colour, the only one is a lighter or darker belly. One specimen is almost black. Untill further material for comparison is collected, I think it best to regard the Bahama form as a variety of *D. angulifer*.

\* \* \*

I have given above an account of all species of reptiles described from the Bahamas, together with remarks about the distinctness of some of them and notes about some species, not or insufficiently described before. In order to make the discussion about the origin of this fauna easier and at the same time to show the



distribution of the species in the islands, I am giving below a short list of them. As has been seen above, some of the species described from the Bahamas are very doubtful and cannot be taken into consideration for a zoogeographical discussion and I will therefore give a separate list of them.

*Sphaerodactylus asper*, GARMAN. — Andros.

*Sphaerodactylus corticolus*, GARMAN. — Watlings, Rum Key.

*Sphaerodactylus decoratus*, GARMAN. — New Providence, Andros, Rum Key.

*Sphaerodactylus flavicaudus*, BARBOUR. — Andros.

*Sphaerodactylus notatus*, BAIRD. — Little Abaco, Great Abaco, Stanger Cay, New Providence.

*Anolis distichus*, COPE. — Great Abaco, New Providence, Andros (?), Cat Isl.

*Anolis distichoides*, n. sp. — Andros.

*Anolis leucophaeus*, GARMAN. — Inagua.

*Anolis moorei*, COPE. — Inagua.

*Anolis oligaspis*, COPE. — New Providence.

*Anolis porcatus*, GRAY — Abaco, New Providence, Andros, Eleuthera, Crooked Isl. (?).

*Anolis sagrae*, D. & B. — Abaco, New Providence, Andros, Stranger Cay, Eleuthera, Cat Isl., Rum Key, Purk's Isl. (?).

*Liocephalus carinatus*, GRAY — Abaco, Great Bahama, New Providence, Andros, Stranger Cay, Cat Isl. and Crooked Isl.

*Liocephalus loxogrammus*, COPE. — Rum Key, Watlings.

*Liocephalus schreibersii*, GRAVENH. — Inagua.

*Liocephalus virescens*, STEJNEGER. — Green Cay.

*Cyclura baeolopha*, COPE. — Andros.

*Cyclura carinata*, HARLAN. — Turk's Isl.

*Cyclura rileyi*, STEJNEGER. — Watlings.

*Ameiva leucomelas*, COPE. — Inagua.

*Ameiva maynardii*, GARMAN. — Inagua.

*Ameiva thoracica*, COPE. — Abaco, New Providence, Andros, Eleuthera.

*Typhlops lumbricalis*, L. — Abaco, New Providence, Andros.

*Typhlops tenuis*, SALVIN. — Andros.

*Glauconia albifrons*, COPE. — Watlings.

*Epicrates chrysogaster*, COPE. — Turk's Isl.

*Epicrates striatus*, FISCHER. — New Providence, Andros.

*Ungalia cana*, COPE. — Inagua.

*Ungalia pardalis*, GUNDLACH. — New Providence, Andros, Eleuthera.

*Dromicus angulifer* var. *vudii*, COPE. — New Providence, Andros, Eleuthera, Cat. Isl., Long Isl.

Among the other species, that have been described from the Bahamas, *Anolis cinnamomeus* COPE has been shown to be identical with *A. leucophaeus*, *A. ordinatus* with *A. sagrae*. *Anolis porcatus brunneus* COPE, described from Crooked has not



with certainty been shown to be a distinct form: but, as stated above, it is possible that there is more than one form of *A. porcatus* represented in the Bahamas. Whether *Anolis distichus* has the distribution given above, is not certain, according to what I have shown above about *A. distichus* and *A. distichoides*. Some localities for «*A. distichus*» are perhaps due to *A. distichoides*, as these two species have not been kept separated, if both were collected before. About two species, *Cyclura cylicura* and *Mabuia sloanii* there is doubt as to the correctness of the determination, as well as about *Liophis rubescens*.

## 2. On the origin of the reptile fauna of the Bahamas.

The only writer about the reptile fauna of the Bahamas who has tried to analyze it, is STEJNEGER (18). Since his very excellent paper on this subject was published, some collections of reptiles have been made in the Bahamas which have given a further knowledge about their distribution. For this reason and also because the opinion about some species given by me above to some extent is different from STEJNEGER's I will make a few remarks on this question.

Not taking into consideration the doubtful species, 30 species (one only a local) of reptiles are found in the Bahamas, 22 lizards and 8 snakes. They belong to 10 genera, 5 of them lizards, 5 snakes. Of these 30 species no less than 18 are endemic in the Bahamas (15 lizards, 3 snakes), that is three-fifth of the reptile fauna is characteristic of the archipelago. No genus is endemic.

### Endemic species:

- Sphaerodactylus asper*, GARMAN.
- » *corticolus* GARMAN.
- » *decoratus*, GARMAN.
- » *flavicaudus*, BARBOUR.
- Anolis distichoides*, mihi.
- » *leucophaeus*, GARMAN.
- » *moorei*, COPE.
- » *oligaspis*, COPE.
- Liocephalus loxogrammus*, COPE.
- » *virescens*, STEJNEGER.
- Cyclura baeolopha*, COPE.
- » *rileyi*, STEJNEGER.
- Ameiva leucomelas*, COPE.
- » *maynardii*, GARMAN.
- » *thoracica*, COPE.

### Non-endemic species:

- Sphaerodactylus notatus*, BAIRD.
- Anolis distichus*, COPE.
- » *porcatus*, GRAY.
- » *sagrae*, D. & B.
- Liocephalus carinatus*, GRAY.
- » *schreibersi*, GRAVENH.
- Cyclura carinata*, HARLAN.

## Endemic species:

*Epicrates chrysogaster*, COPE.  
*Ungalia cana*, COPE.  
*Dromicus angulifer* var. *vudii*, COPE.

## Non-endemic species:

*Typhlops lumbricalis*, L.  
 » *tenuis*, SALVIN.  
*Glauconia albifrons*, COPE.  
*Epicrates striatus*, FISCHER.  
*Ungalia pardalis*, GUNDLACH.

In order to trace the origin of the fauna we shall first have to study the distribution of the non-endemic species, then the relations of the endemic species to other species, and the distribution of these. The regions which, owing to their situation, may be expected to possess the forms from which the Bahama ones might possibly be derived are Florida, Cuba and Haiti. It is of great interest to know from which of these localities the Bahama fauna originates, especially if it is from Florida or from Cuba and Haiti, because this is a question whether the fauna is neogaeic or arctogaeic. As has been shown in the first part of this paper the islands are oceanic. They have not been in connection with any other island or with any continent since their recent elevation. As none of the species occurring in the Bahamas are capable of swimming over the rather broad channels which separate, or have separated these islands from surrounding lands, they must have arrived the islands on floating trees or the like, if not introduced by man. The great specialisation of the Bahama reptile fauna shows, indeed, that the greater part has occupied the islands for some time. To judge from the ocean streams which sweep the coasts of the Bahama archipelago, it is a priori not probable that any reptiles would have come from Florida. Between this peninsula and the Bahama Islands the Gulf stream flows with such great strength and in such a direction that it is quite impossible that trees or parts of plants or other things, which could transport small reptiles or their eggs, could have been transferred from Florida to the Bahama Islands. It is more probable that such a transportation would take place from Haiti and Cuba to the Bahamas by means of the Antillean Stream perhaps also from Cuba by means of the Gulf Stream. The prevailing winds are also more in this direction. To me it seems very probable that the winds have played an important rôle in forming the land fauna of the Bahamas, at least the reptile portion. Anybody who has ever had any experience of one of those terrible hurricanes which visit this part of the world, and who has seen in what an uproar the ocean can be at such a time, carrying away great stocks and stones, would never deny the importance of these winds as a means of dispersion of small animals.

Of the 12 species which occur also outside the Bahamas there is only one inhabiting Florida, namely *Sphaerodactylus notatus*, BAIRD. This species, however, is restricted to the southern part of this peninsula, and as it is common both on Cuba and Haiti it is clear that this species has not come to the Bahamas from



Florida, but from Cuba or Haiti. To Florida the species has probably been transferred from Cuba. All the other species have their distribution in the West Indies, on Cuba or Haiti. It is evident from this that all the non-endemic reptiles have reached the Bahamas from Cuba or Haiti. Only one of these species, *Anolis porcatus*, has an allied form in Florida, namely *A. carolinensis*, but the derivation must in this case have gone from *porcatus* to *carolinensis* and not in the contrary direction. Of the 18 endemic species there is no one whose closely allied form is to be found in Florida. All are West Indian.

Whether Cuba or Haiti has played the greatest part in forming the Bahama reptile fauna or whether, perhaps, the whole fauna is derived from only one of these islands, it is, I think, imposible to say with the present knowledge of the distribution of many species in the different islands. Almost all the southern islands are too unsufficiently explored from this point of view to give an exact answer on this question. STEJNEGER (18) tried to show that all the species which were allied to Cuba were distributed on islands situated on the Great Bahama Bank, those allied, or identical with, Haitian forms restricted to Inagua and other southern islands. The reptile fauna would then include forms of two different origins. I think this question cannot be settled yet. Still I will give a review of the alliances with Cuba and Haiti. There are two species, which though West Indian or Central American forms, do not occur either in Cuba or Haiti, *Typhlops tenuis* and *Glauconia albifrons*; thus they cannot be taken into consideration. The same is the case with *Sphaerodactylus notatus* and *Typhlops lumbricalis*, which occur both in Cuba and Haiti and the endemic species *Sph. corticolus* which is allied to *Sph. notatus*. The alliances of some species are not sufficiently known. Of other species the following five occur in Cuba (but not in Haiti): *Anolis sagrae*, *A. porcatus*, *Liocephalus carinatus*, *Cyclura carinata* and *Ungalia pardalis*. Allied to Cuban forms are *Liocephalus virescens* (to *L. carinatus*), *Cyclura baeolopha* (to *C. carinata*), *Ungalia cana* (to *U. pardalis*), *Dromicus angulifer* var. *vudii* (to *D. angulifer*). Species common for the Bahamas and Haiti (but not in Cuba) are *Anolis distichus*, to which the endemic form *A. distichoides* is allied, *Liocephalus schreibersi* and *Epicrates striatus*. Other species are closely allied to Haitian forms, namely *Sphaerodactylus asper* (to *Sph. picturatus*), *Liocephalus loxogrammus* (to *L. maeropus*), *Epicrates chrysogaster* (to *E. fordii*). It seems as if the relation with Cuba was greater than that with Haiti, but that may be due to the circumstance that the islands which are situated near Cuba, have been better explored than those near Haiti.

From what has been shown above, it is evident that the reptile fauna of the Bahamas is derived solely from that of Cuba and Haiti. No species has invaded the archipelago from Florida. The isolation of the islands has given rise to a specialisation of the forms, three-fifth of the reptilefauna being endemic.



## Literature concerning the Reptile Fauna of the Bahamas.

1. Barbour, Th. — Batrachiâ and Reptilia from the Bahamas. — Bull. Mus. Comp. Zool. Cambridge. Vol. 46 (1904).
  2. » — Additional notes on Bahama snakes. — The American «Naturalist Vol. 40» (1906).
  3. Boulenger, G. — Catalogue of Lizards. (1885—1887).
  4. » — Catalogue of snakes. (1893—96).
  5. Cope, E. — Notes and Description of Anoles. — Proc. Acad. Nat. Sciences, Philadelphia. Vol. 13 (1861).
  6. » — Synopsis of the species of — — —, with Diagnosis of new West Indian and South American Colubridae. — Proc. Acad. Nat. Sc. Philadelphia. Vol. 14 (1862).
  7. » — Additional descriptions of Neotropical Reptilia and Batrachia not previously known. — Proc. Acad. Nat. Sc. Philadelphia. Vol. 20 (1868).
  8. » — Eight contribution to the herpetology of tropical America. — Proc. Amer. Philos. Soc. Vol. 11 (1870).
  9. » — A contribution to the Herpetology of Mexico, Appendix on a collection from New Providence, Bahama Islands. — Proc. Amer. Philosoph. Soc. Philadelphia. Vol. 22 (1885).
  10. » — List of the Batrachia and Reptilia of the Bahama Islands. — Proc. U. S. Nat. Museum. Vol. 10. (1887).
  11. » — The Batrachia and Reptilia of the University of Pennsylvania West Indian Expedition of 1890 and 1891. Proc. Acad. Nat. Scienc. Philadelphia 1894.
  12. Garman. — On West Indian Reptiles in Museum of Comp. Zoology, Cambridge. — Proc. Amer. Philosoph. Soc. Vol. 24 (1887).
  13. » — On West Indian Teiidae in the Museum of Comparative Zoology at Cambridge. — Bull. Essex Institute. Vol. 19. (1887).
  14. » — On West Indian Reptiles. Iguanidae. — Ibid.
  15. » — Reptiles and Batrachians from the Caymans and from the Bahamas. — Ibid. Vol. 20 (1888).
  16. Reinhard & Lütken. — Bidrag til det vestindiske Öriges og navnlig til de dansk-vestindiske Öers Herpetologie. — Videnskabelige Meddelelser fra d. naturhist. Forening i Kjöbenhavn. 2 Aarti. (1862).
  17. Stejneger, L. — A new species of large Iguana from the Bahama Islands. — Proc. Biolog Soc. Washington. Vol. 16. (1903).
  18. » — Batrachians and land reptiles of the Bahama Islands. — The Bahama Islands, ed. by G. B. Shattuck. New York 1905.
  19. » — Diagnosis of a new species of iguanoid lizard from Green Cay, Bahama Islands. — Proc. U. S. Nat. Mus. Vol. 23.
-

### III.

#### The Fishes.

The object of this part is to give a list of the fishes occurring in the waters of the Bahamas. It is mostly based on the collections made during my visit to these islands; but I have also enumerated those species which, though not observed or obtained by me, have been recorded by previous authors. The collections I have made are, for the most part, from Mastic Point and Nassau, and contain almost exclusively specimens gathered along the beach or among the coral reefs. A few are from brackish ponds. Collections of fishes have at several times been made in the Bahamas; but a detailed study of the fish fauna has never been made. Except a few papers containing descriptions of some new species quite incidentally collected in the Bahamas, there are, if we pass over the old work by CATESBY, only three papers dealing with the fish fauna of the Bahamas, viz.:

JORDAN and BOLLMAN, *List of fishes collected at Green Turtle Cay, in the Bahamas*, by CHARLES L. EDWARDS, with descriptions of three new species. — (Proc. U. S. Nat. Mus. 1888, pp. 549—553).

These collections were made by EDWARDS in the summer of 1888. S. GARMAN, *Report on the Fishes collected by the Bahama Expedition of the State University of Iowa under Professor C. C. NUTTING in 1893*. — (Bull. Lab. Nat. Hist. Iowa Vol. IV, no. 1, pp. 76—93 1896.)

This paper contains a list of species, also collected along Florida. BARTON A. BEAN, *Fishes of the Bahama Islands*. — (The Bahama Islands, ed. by G. B. SHATTUCK, New York 1905, pp. 293—325.)

This paper is the only one, as far as I know, that contains a complete list of all fishes, recorded from the Bahamas. It is based for the most part on collections made by the author as a member of the Expedition, sent to the Bahamas in the summer of 1903 by the *Geographical Society of Baltimore*.

The list of fishes from the Bahamas I now publish contains 216 species, four of these are described as new species. Several genera and species enumerated have not previously been recorded from the Bahamas.

As to the nomenclature I follow JORDAN's and EVERMAN's Catalogue <sup>1</sup>, though without committing myself to complete agreement with their views; as to the arrangement in families, I follow BOULENGER's system <sup>2</sup> as regards the Teleosteans.

A. **Selachii.**

Fam. **Ginglymostomidæ.**

*Ginglymostoma cirratum*, GMELIN.

Common (*Exped. Geogr. Soc.*)

Fam. **Galeidæ.**

*Hypoprion brevirostris*, POEY.

Watlings (*Albatross Exped.* 1886).

*Carcharhinus obscurus*, LE SUEUR.

Common.

Fam. **Sphyrnidæ.**

*Sphyrna tiburo*, L.

Abaco (*Albatross Exped.* 1886).

Fam. **Dasyatidæ.**

*Urolophus jamaicensis*, CUV.

Collected at Mastic Point on Andros. Observed along the west side of Andros. Nassau (*Exped. Geogr. Soc.*)

One specimen (37 cm.) gave birth to three young ones, measuring 13 cm.

B. **Teleostei.**

Fam. **Elopidæ.**

*Elops saurus*, L.

Collected by the Expedition of the Geogr. Soc. Balt. at Hog Island, where young ones were abundant.

Fam. **Albulidæ.**

*Albula vulpes*, L.

Several specimens at Mastic Point on Andros. — Spanish Wells (*Exped. Geogr. Soc.*).

<sup>1</sup> *The Fishes of North and Middle America.* — Bull. U. S. Nat. Museum. No. 47. (1896—1900).

<sup>2</sup> *Teleostei* in *The Cambridge Natural History.* Vol. VII and in *Annals and Magazine of Natural History* (7) 13, p. 164 (1904).



Fam. **Clupeidæ.***Jenkinsia stolifera*, JORD. & GILBERT.

Common along the shore. Many specimens collected at Nassau and Mastic Point on Andros. Spanish Wells (*Exp. Geogr. Soc.*)

*Sardinella sardina*, POEY.

Collected by the steamer *Albatross* at Nassau. Green Cay (EDWARDS).

*Sardinella clupeola*, CUV. & VALENC.

Green Turtle Cay (EDWARDS).

Fam. **Anguillidæ.***Anguilla chrysypa*, RAFINESQUE.

Two specimens collected in a brackish pond at Mastic Point on Andros (March 1909) both females, measuring 48 and 54 cm. — Not before recorded from the Bahamas.

*Congromuræna balearica* (DE LA ROCHE).

One specimen collected at Mastic Point on Andros (August 1908). Not before recorded from the Bahamas.

Colour in living specimens: Grey. Each side of body with longitudinal band of silvery rectangular spots. Above this on each side a narrow indistinct silvery line, most distinct in the middle part. Back with small greyish blue dots and a little larger dirty yellow ones (both kinds only visible by slight magnification).

*Stilbiscus Edwardsi*, JORDAN & BOLLMAN.

Green Turtle Cay (EDWARDS).

*Sphagebranchus anguiformis*, PETERS.

Off Abaco (ALLEN & BARBOUR 1904).

*Verma kendalli*, GILBERT.

Green Cay (Exped. Geogr. Soc.).

*Myriophis punctatus*, LÜTKEN.

Off Governor's Island in 5 fathoms of water on a bottom of coral sand (*Exp. Geogr. Soc.*).

Fam. **Murænidæ.***Lycodontis moringa*, CUVIER.

Common about the coral reefs; the smaller specimens mostly along the shores in rock-holes, dead shells etc. Several specimens collected both at Nassau and at Mastic Point on Andros. Green Turtle Cay (EDWARDS).

One specimen, measuring 6 cm., with dark brown small points (each a chromatophore), on the back very densely arranged, giving a uniform brown colour, on the belly scattered, causing brown dots on a light ground. Three other specimens, 6,5, 9,5 and 21 cm., with the same kind of chromatophores, but these are arranged in such a way that they form dark brown reticulations on a light ground. These light parts also are covered with separated brown points.

*Lycodontis funebris*, RANZANI.

Several specimens collected at Mastic Point. Does not seem to be so common as *L. moringa*.

*Echidna catenata*, BLOCH.

One specimen at Mastic Point (Febr. 1909) along the shore. Abaco (*Albatross*), Green Turtle Cay (EDWARDS).

Fam. **Scopelidæ**.

*Synodus intermedius*, AGASSIZ.

Nassau (*Exped. Geogr. Soc.*), Watlings and Abaco (*Albatross*).

*Trachinocephalus myops*, FORSTER.

Nassau and Clarence Harbor (*Exped. Geogr. Soc.*).

Fam. **Cyprinodontidæ**.

*Cyprinodon variegatus*, LACÉPÈDE.

In brackish ponds at Mastic Point, Andros. Watlings (*Exped. Geogr. Soc.*).

*Gambusia affinis*, BAIRD & GIRARD.

Very common in brackish ponds on the east side of Andros. Watlings (*Exped. Geogr. Soc.*).

Fam. **Fierasferidæ**.

*Fierasfer affinis*, (GÜNTHER).

Several specimens collected both at Nassau and at Mastic Point, Andros, in the large *Holothuria mexicana*, which is very common along the shores in a few fathoms of water. Length 10 to 13,5 cm. Two specimens were taken in one holothuria, six in another; the other specimens were found single. All these specimens were in a living state grey with brown spots, most numerous on the snout and the tail.

Two specimens collected at Mastic Point, were found in a holothuria of a medium size which is abundant under rocks and pieces of corals in shallow water. Length 6 cm. They agreed with the specimens from the large *Holothuria mexicana*, except that they had only a few spots on the snout.

Fam. **Aulostomatidæ.***Aulostomus maculatus*, VALENCIENNES.Clarence Harbour (*Exped. Geogr. Soc.*, 1903).Fam. **Syngnathidæ.***Siphostoma albirostre* (HECKEL).Abaco, New Providence and Abaco (*Albatross Exp.* 1886).*Siphostoma pelagicum* (OSBECK).Clarence Harbour (*Exped. Geogr. Soc.*).*Siphostoma rousseau* (KAUP).Between Nassau and Elbow Key (*Exped. Geogr. Soc.*).*Siphostoma jonesi*, GÜNTHER.

One specimen collected at Mastic Point, Andros. Hitherto known only from Bermudas.

*Corythoichthys cayorum*, EVERM. & KENDALL.Powells Point and Clarence Harbour (*Exped. Geogr. Soc.*).*Nannocampus nanus* n. sp. Fig. 4.

Body and tail compressed. Snout very short, only a little longer than diameter of orbit, turned upwards, much shorter than postorbital part of head. Sides of body with two ridges, which join above vent and continue as one ridge on the tail. Two ridges on the back, one on each side, continuing on the tail. Belly with one median ridge, not continuing on the tail. All the ridges are very indistinct, hardly distinguishable; they seem to be abrupted. Rings not distinct. Pectorals, ventrals and anal wanting. Dorsal present, but depressed by preservation so that I have not been able to count the number of rays. Caudal very small. Ground colour yellowish. Head, body and tail with narrow black cross lines, broader than the interspaces between them. One specimen has a split on the underside of the tail. In this the eggs are attached, being covered laterally by a fold of the skin, but these folds do not meet in the median line.

A very small species, the longest being 32 mm. The one carrying eggs measures only 25 mm. (collected in July). I collected five specimens of this rather interesting form among dead corallines along the beach at Mastic Point on Andros.

*Hippocampus punctulatus*, GUICHENOT.

Collected at Red Bay on the north-western side of Andros. Governors Harbour (*Exped. Geogr. Soc.*)



Fam. **Scombresocidæ.***Exocoetus lineatus*, CUV. & VALENC.Cat Island (*Exped. Geogr. Soc.*).*Parexocoetus mesogaster* (BLOCH).

One specimen collected between New Providence and Andros. Not before recorded from the Bahamas.

*Halocypselus evolans* (L.).

One specimen collected near Nassau. Not before recorded from the Bahamas.

*Hemiramphus brasiliensis*, L.Clarence Harbour (*Exped. Geogr. Soc.*).*Chriodorus atherinoides*, GOODE & BEAN.Spanish Wells (*Exped. Geogr. Soc.*).*Tylosurus notatus*, POEY.

At Mastie Point, Andros, the young specimens were very abundant along the shore and in brackish ponds which were in connection with the sea. Nassau and Spanish Wells (*Exped. Geogr. Soc.*). Green Turtle Cay (EDWARDS).

*Tylosurus caribæus*, LE SUEUR.

One specimen collected at Nassau (*Exped. Geogr. Soc.*).

*Tylosurus acus*, LACÉPÈDE.Spanish Wells and Clarence Harbour (*Exped. Geogr. Soc.*).Fam. **Atherinidæ.***Atherina stipes*, MÜLLER & TROSCHEL.

Nassau, Spanish Wells, the Current and Clarence Harbour (*Exped. Geogr. Soc.*). Green Turtle Cay (EDWARDS).

*Atherina aræa*, JORDAN & GILBERT.Watlings, Rum Cay, Cat Island and Abaco (*Albatross* 1886).Fam. **Mugilidæ.***Mugil curema*, CUV. & VALENC.Powells Point (*Exped. Geogr. Soc.*). Green Turtle Cay (EDWARDS).*Mugil trichodon*, POEY.Spanish Wells (*Exped. Geogr. Soc.*)

Fam. **Sphyrænidæ.***Sphyræna barracuda*, WALBAUM.

Taken at many places in the Bahamas. Several small specimens (length about 3 cm.) were collected in May in small tidepools at Nassau.

Fam. **Stromateidæ.***Psenes cyanophrys*, CUV. & VALENC.

Green Cay (*Exped. Geogr. Soc.*)

Fam. **Berycidæ.***Holocentrus ascensionis*, OSBECK.

Very common along the shore of Andros and Mastic Point and among corals. Anal in all specimens collected with four spines, not three as stated by JORDAN and EVERMANN. Green Turtle Cay (EDWARDS).

*Holocentrus vexillarius*, POEY.

Abaco (*Albatross Exped.* 1886).

*Holocentrus coruscus*, POEY.

Five specimens collected among Madreporarians in shallow water in a bight north of Mastic Point on Andros. Green Turtle Cay (EDWARDS).

An examination of these specimens together with one example in the Zoolog. Museum at Berlin, collected by PLATE in the Bahamas, makes me believe that *H. coruscus* POEY and *H. siccifer* COPE are not distinct species. The latter species, which is known only from a single specimen taken in the Bahamas, would, according to COPE, differ from *coruscus* in having 45 scales instead of about 42 in the lateral line, and 13 soft rays in the dorsal instead of 14 in *coruscus*. As to the number of scales in the lateral line, this is due to the individual mode of counting them. In such a case, it is impossible to use a difference of about only 3 scales as a species-character. The number of soft rays in dorsal and anal varies in my specimens. In two of them there are 12 soft rays in dorsal, 8 in anal. In the other the number is 13 and 9. The specimen in the Berlin Museum has 14 soft rays in the dorsal. They agree all with each other in all structural characters, and these are identical with those stated for both *H. siccifer* and *H. coruscus*. The coloration seems also to be about the same in both species. About a living specimen I have made the following notes: upper part of body with alternating red and brilliant white longitudinal bands, following the rows of scales; on the lower part the bands are indistinct, constituted only of small points. Spinous dorsal dark red with a middle row of white spots and one similar along the tips of the rays; anteriorly with a large black spot. Fins red. In some specimens there is a very small black spot at the base of the pectoral fin. The length of the specimens I have collected is between 4,5 to 8,5 cm. from tip of snout to tip of caudal.

BARBOUR<sup>1</sup> has recently described a new species, *H. puncticulatus*, from Bermudas, which would seem to be distinguished from COPE's *H. siccifer* by having 8 soft rays in the anal in stead of 9 and in colour. From what has been shown above these characters are due to variation and are not sufficient to distinguish a new species. To judge from BARBOUR's short description and from his figure of *H. puncticulatus* I am quite convinced that his new species, which is based on a single specimen, must be referred to *H. coruscus* POEY.

*Holocentrus siccifer*, COPE.

New Providence (COPE). As to the distinctness of this species see what is stated about *H. coruscus* POEY.

*Holocentrus osculus*, POEY.

One specimen at Mastic Point on Andros, in a dead shell. Not before recorded from the Bahamas (known only from Cuba).

Colour in living specimen: red, with very indistinct yellowish brown longitudinal bands, more distinct near dorsal fin. Spinous dorsal yellowish brown along the rays. Length 12 cm. from tip of snout to tip of caudal.

*Plectrypops retrospinis* (GUICHENOT). Fig. 2.

This species, said to be rare in Cuba, is rather imperfectly known. I found a defective dead specimen, thrown on the beach at Mastic Point on Andros, which seems, to judge from the short description given, to belong to this species. I am describing it below.

D. XII, 14; A IV, 11; P I, 7. First anal spine very small, third large, broader, but hardly longer than fourth, when depressed. Upper part of head with two pairs of longitudinal rows of small spines. Snout with numerous small spines. Orbit surrounded, except anteriorly, by small spines. Suborbital with two lamina: the superior, corresponding to that in *Holocentrus* with small spines; the inferior, which is absent in *Holocentrus*, is very broad behind, narrow anteriorly. The anterior part of this inferior lamina has anteriorly about five spines, followed behind by a row of small spines. Behind these are two to four (in my specimen 2 on one side, 4 on the other) large spines, curved forward. These are followed on the posterior part of the suborbital by large straight spines. Præoperculum with two limbs, both with spines, those on the posterior larger. The angle is rounded with a spine a little larger than the other, but not at all comparatively so large as in *Holocentrus*. Operculum, interoperculum and suboperculum armed with spines, operculum with two larger equal ones. Maxillary reaching far behind posterior border of orbit, with supplemental bone. Scales strongly serrated, except those on the anterior part below lateral line. Scales 4—35—9. Colour: red (when found).

---

<sup>1</sup> Notes on Bermudian Fishes. Bull. Mus. Comp. Zool. Harvard Coll. Vol. 46 (1905).



Dimensions (the specimen is perhaps a little deformed)

Tip of snout to base of pectoral	25 mm.
» » » » » » caudal	68 »
Height (from base of spinous dorsal to ventrals)	28 »
Diameter of eye	8 »
Third anal spine	10 »

POEY<sup>1</sup> writes: »Le nom imposé par M. GUICHENOT repose sur le longues épines du premier sous-orbitaire, dirigées en avant; et comme il explique tout le contraire, j'ai cru devoir le changer. Je n'ai jamais vu ce poisson». He amends the name to *prospinosum*. According to the present international rules of nomenclature the name first given must be maintained, even if it is not good as to the meaning.

There seems to be good reason to separate this form as a genus distinct from *Holocentrus* to which it has been referred by some authors. The presence of spines on the head, the shape of the suborbital, the very large maxillary, the præoperculum not being sharply angulated but rounded and armed with a small spine characterize it from *Holocentrus*, as well as from the closely allied genus *Myriopristis*.

#### Fam. Cyphosidæ.

##### *Kyphosus sectatrix* (L).

One specimen at Mastic Point, Andros. Not before recorded from the Bahamas.

#### Fam. Serranidæ.

##### *Epinephelus guttatus* (L).

Common at Mastic Point (Andros) and at Nassau. Green Turtle Cay (EDWARDS).

##### *Epinephelus mystacinus*, POEY.

Nassau (*Exped. Geogr. Soc.*).

##### *Epinephelus striatus*, BLOCH.

Common in the Bahamas.

##### *Epinephelus morio*, CUV. & VALENC.

One specimen collected (August 1908) at Mastic Point, Andros. Said by the fishermen to be common along the west coast of Andros, but very rare at the east coast. Not before recorded from the Bahamas.

##### *Mycteroperca venenosa apua* (BLOCH).

Green Turtle Cay (EDWARDS).

---

<sup>1</sup> *Memorias* II, pag. 343 (1856—58).

*Petrometopon cruentatus* (LACÉPÈDE).

Andros, Mastic Point. Nassau and Rum Cay (*Exped. Geogr. Soc.*)

*Bodianus fulvus* (L.).

One specimen at Watlings (*Exped. Geogr. Soc.*).

*Bodianus fulvus ruber* (BLOCH & SCHNEIDER).

Nassau (*Exped. Geogr. Soc.*)

*Bodianus punctatus*, L.

Mastic Point on Andros. Nassau and Clarence Harbour (*Exped. Geogr. Soc.*)

*Rhypticus bistrispinosus* (MITCHILL).

Nassau and Green Cay (*Exped. Geogr. Soc.*).

*Apogon pigmentarius* (POEY).

Several specimens collected at Hog Island and at Mastic Point on Andros near the shore. One specimen collected at Golding Cay (Andros) by the *Exped. Geogr. Soc.*

*Apogon binotatus* (POEY).

Of this very rare fish two specimens collected, one at Mastic Point, another at Hog Island. Length 3,7 and 3,2 cm. from tip of snout to base of caudal. Not before recorded from the Bahamas.

*Apogon sellicauda*, EVERMANN & MARSH.

Described from a single specimen, obtained on a coral reef at Porto Rico. Four specimens collected at Mastic Point along the shore.

*Apogonichthys stellatus*, COPE.

Nassau (COPE) and Golding Cay (*Exped. Geogr. Soc.*).

*Apogonichthys strombi*, PLATE.

This interesting fish, described by PLATE<sup>1</sup>, lives symbiotic in the mantle cavity of *Strombus gigas*. Several specimens collected at Hog Island and Mastic Point, Andros.

*Neomænis analis* (CUV. & VALENC.).

Collected at Mastic Point. Nassau (*Albatross Exped.*).

*Neomænis apodus* (WALBAUM).

Common in the Bahamas. The young ones were collected in tidepools.

*Neomænis buccanella* (CUV. & VALENC.).

Nassau (*Albatross Exped.*).

---

<sup>1</sup> Zool. Anz. 1908.

*Neomænis griseus* (L.)

Common in the Bahamas.

*Neomænis mahogoni* (CUV. & VALENC.).

Collected at Mastic Point, Andros.

*Neomænis synagris* (L.)

Nassau (*Exped. Geogr. Soc.*).

*Neomænis jocu* (BLOCH & SCHNEIDER).

Collected at Mastic Point. Green Turtle Cay (EDWARDS).

*Ocyurus chrysurus* (BLOCH).

Common in the Bahamas.

*Apsilus dentatus* (GUICHENOT).

Eleuthera (*Exped. Geogr. Soc.*).

*Priacanthus cruentatus* (LACÉPÈDE).

Rum Cay (*Albatross Exped.*).

*Priacanthus arcuatus*, CUV. & VALENC.

Nassau (*Albatross Exped.*).

Fam. **Pseudochromididæ.***Malacanthus plumieri* (BLOCH).

Collected at Mastic Point on Andros. Green Cay and Clarence Harbour (*Exped. Geogr. Soc.*)

Fam. **Gerridæ.***Gerres brasiliensis* (CUV. & VALENC.).

Nassau (*Exped. Geogr. Soc.*).

*Xystema cinereum*, WALBAUM.

Collected at Mastic Point. Spanish Wells and Clarence Harbour (*Exped. Geogr. Soc.*).

At Mastic Point this fish is called »broad shad». Ventral fins yellow.

*Eucinostomus gula* (CUV. & VALENC.).

Collected at Spanish Wells, Watlings and Clarence Harbour (*Exped. Geogr. Soc.*).

*Eucinostomus pseudogula*, POEY.

Collected at Mastic Point. Not before recorded from the Bahamas.  
Called by the natives »narrow shad». Ventral fins white.



*Eucinostomus harengulus*, GOODE & BEAN.

Green Turtle Cay (EDWARDS).

*Eucinostomus lefroyi*, GOODE.

Spanish Wells, the Current and Clarence Harbour (*Exped. Geogr. Soc.*). Green Turtle Cay (EDWARDS).

Fam. **Pristipomatidæ**.*Bathystoma aurolineatum* (CUV. & VALENC.).

Abaco (*Albatross Exped.*).

*Bathystoma rimator* (JORDAN & SWAIN).

Collected at Mastic Point, Andros. Clarence Harbour (*Exped. Geogr. Soc.*), Green Turtle Cay (EDWARDS).

*Hæmulon album*, CUV. & VALENC.

Common in the Bahamas.

*Hæmulon carbonarium*, POEY.

Nassau (*Albatross Exped.*).

*Hæmulon flavolineatum* (DESMAREST).

Collected at Mastic Point, Andros. Nassau and Abaco (*Albatross Exped.*).

*Hæmulon melanurum* (L.)

Nassau (*Exped. Geogr. Soc.*).

*Hæmulon parra* (DESMAREST).

Green Turtle Cay (EDWARDS).

*Hæmulon plumieri* (LACÉPÈDE).

Many specimens collected at Mastic Point, Andros. Nassau (*Exped. Geogr. Soc.*).

*Hæmulon sciurus* (SHAW).

Throughout the Bahamas.

*Brachygenys chrysargyreus* (GÜNTHER).

Abaco (*Albatross Exped.*)

*Anisotremus virginicus* (L.).

Nassau (*Exped. Geogr. Soc.*).

Fam. **Sparidæ**.*Diplodus argenteus* (CUV. & VALENC.).

Nassau (*Exped. Geogr. Soc.*).

*Calamus calamus* (CUV. & VALENC.).

Nassau (*Albatross Exped.* 1886).

*Calamus leucosteus*, JORDAN & GILBERT.

Obtained by the *Albatross Exped.* (1886) at the Nassau market.

*Calamus penna* (CUV. & VALENC.).

Obtained by the *Albatross Exped.* (1886) at the Nassau market.

*Calamus bajonado* (BLOCH & SCHNEIDER).

Collected at Mastic Point, Andros. Nassau (*Exped. Geogr. Soc.*). Green Turtle Cay (EDWARDS).

## Fam. Mullidæ.

*Upeneus maculatus* (BLOCH).

Hog Island, Eleuthera, Clarence Harbour (*Exped. Geogr. Soc.*).

*Upeneus martinicus* (CUV. & VALENC.).

Nassau (*Albatross Exped.* 1886).

## Fam. Chætodontidæ.

*Holacanthus tricolor* (BLOCH).

Nassau (*Exped. Geogr. Soc.*). Observed by me among the coral reefs at Mastic Point (Andros).

*Pomacanthus arcuatus* (L.).

Collected at Mastic Point, Andros. Nassau (*Exped. Geogr. Soc.*).

*Pomacanthus paru*, BLOCH.

One specimen collected at Mastic Point, Andros. Not before recorded from the Bahamas.

*Chætodon ocellatus*, BLOCH.

Collected among the coral reefs at Mastic Point, Andros. Nassau (*Exped. Geogr. Soc.*).

One specimen with 13 dorsal spines, all the other with 12.

*Chætodon capistratus*, L.

Nassau (*Exped. Geogr. Soc.*).

*Chætodon striatus*, L.

Green Turtle Cay (EDWARDS).

*Angelichthys ciliaris* (L.).

Common in the Bahamas among the coral reefs.

*Chætodipterus faber*, BROUSSONET.

Two young specimens collected at Mastic Point, Andros. Not before recorded from the Bahamas.

One specimen with 23 soft rays in the dorsal fin, 19 soft rays in the anal fin.

Fam. **Teuthidæ**.*Teuthis bahianus*, CASTELNAU.

Collected at Nassau and Mastic Point (Andros). Green Turtle Cay (EDWARDS).

*Teuthis cæruleus*, BLOCH & SCHNEIDER.

Collected at Mastic Point among the coral reefs. Nassau and Clarence Harbour (*Exped. Geogr. Soc.*). Green Turtle Cay (EDWARDS).

*Teuthis hepatus*, L.

Collected at Mastic Point, Andros. Clarence Harbour (*Exped. Geogr. Soc.*). Green Turtle Cay (EDWARDS).

Fam. **Pomacentridæ**.*Eupomacentrus leucostictus* (MÜLLER & TROSCHEL).

Collected at Nassau and Mastic Point, Andros, along the shore. The young specimens are found in tide pools, the larger among rocks, corals etc. Clarence Harbour, Powells Point (*Exped. Geogr. Soc.*). Green Turtle Cay (EDWARDS).

*Eupomacentrus analis*, POEY.

Common along the shores of New Providence (at Nassau) and Andros (at Mastic Point). Not before recorded from the Bahamas.

*Eupomacentrus fuscus* (CUV. & VALENC.).

Nassau (*Exped. Geogr. Soc.*).

*Eupomacentrus adustus* (TROSCHEL).

Nassau (*Albatross Exped.* 1886).

*Abudefduf saxatilis* (L.).

Collected along the shore at Nassau and Mastic Point. Green Cay (*Exped. Geogr. Soc.*).

Fam. **Labridæ**.*Lachnolaimus maximus* (WALBAUM).

Nassau (*Exped. Geogr. Soc.*).

*Harpe rufa*, L.

One specimen at Mastic Point, Andros. Obtained by the *Albatross Exped.* (1886) at the Nassau market.



*Novaculichthys infirmus* (BEAN).

Nassau (*Albatross Exped.* 1886).

*Xyrichthys psittacus* (L.).

Obtained by the *Albatross Exped.* (1886) at the Nassau market.

*Iridio bivittatus* (BLOCH).

Collected at Mastic Point and Hog Island. Spanish Wells, Eleuthera, Clarence Harbour (*Exped. Geogr. Soc.*). Green Turtle Cay (EDWARDS).

*Iridio garnoti* (CUV. & VALENC.).

Very common among the coral reefs at Mastic Point, Andros. Clarence Harbour (*Exped. Geogr. Soc.*).

Length 12 to 18 cm. The coloration varies a little. The dark cross-band on the middle of the body and the superior longitudinal dark band are sometimes very distinct, sometimes only developed as large spots; sometimes they have almost or quite disappeared. The small blue dots on the head vary considerably in number. In some specimens such dots are found also on the anterior part of the back before the middle of spinous dorsal. Called by the natives »slippery dick».

*Iridio maculipinna* (MÜLLER & TROSCHEL).

Nassau (*Exped. Geogr. Soc.*).

*Iridio radiatus* (L.).

Collected at Mastic Point, Andros. Obtained by the *Albatross Exped.* at the Nassau market.

*Chlorichthys bifasciatus* (BLOCH).

Rather common among the coral reefs at Mastic Point, Andros. Clarence Harbour (*Exped. Geogr. Soc.*).

*Chlorichthys nitidus* (GÜNTHER).

Collected at Nassau and at Mastic Point, Andros. Current, Eleuthera, Clarence Harbour (*Exped. Geogr. Soc.*).

One specimen, measuring 10 cm. from tip of snout to tip of tail, with a black spot between first and sixth dorsal spines.

Fam. **Scaridæ.***Sparisoma aurofrenatum* (CUV. & VALENC.).

Mastic Point, Andros. Nassau (*Exped. Geogr. Soc.*).

*Sparisoma viride*, BONNATERRE.

One specimen obtained by the *Albatross Exped.* (1886) at the Nassau market.

*Sparisoma Xystrodon*, JORDAN & SWAIN.

One specimen at Nassau. Not before recorded from the Bahamas.

*Sparisoma niphobles*, JORDAN & BOLLMAN.

Green Turtle Cay (EDWARDS).

*Sparisoma distinctum* (POEY).

Several places in the Bahamas.

*Sparisoma flavescens*, BLOCH & SCHNEIDER.

Mastic Point, Andros.

*Sparisoma hoplomystax* (COPE).

Hog Island, Clarence Harbour, Spanish Wells (*Exped. Geogr. Soc.*).

*Sparisoma lorito*, JORDAN & SWAIN.

Nassau (*Exped. Geogr. Soc.*).

*Sparisoma abildgaardi*, BLOCH.

One specimen collected at Mastic Point, Andros. Not before recorded from the Bahamas.

*Scarus cæruleus*, BLOCH.

Common among the coral reefs at Mastic Point, Andros.

*Scarus croicensis* (BLOCH).

Several specimens at Hog Island. Spanish Wells, Powells Point and Clarence Harbour (*Exped. Geogr. Soc.*).

*Scarus tæniopterus*, DESMAREST.

Several places.

*Pseudoscarus guacamaia*, CUVIER.

Two specimens at Mastic Point, measuring 6,5 and 11 cm. Not before recorded from the Bahamas.

*Cryptotomus retractus* (POEY).

Current, Eleuthera and Clarence Harbour (*Exped. Geogr. Soc.*).

Fam. **Carangidæ**.*Caranx bartholomei*, CUV. & VALENC.

Nassau (Albatross Exped. 1886). Green Turtle Cay (EDWARDS).

*Caranx crysos*, MITCHILL.

One specimen at Mastic Point. Nassau (Albatross Exped. 1866).

*Caranx latus*, AGASSIZ.

One specimen at Mastie Point. Spanish Wells and Clarence Harbour (*Exped. Geogr. Soc.*).

*Caranx ruber*, BLOCH.

Two specimens at Mastie Point. Nassau (*Exped. Geogr. Soc.*).

*Trachurops crumenophthalmus*, BLOCH.

Several places.

*Trachinotus falcatus*, L.

Hog Island and Tarpum Bay (*Exped. Geogr. Soc.*).

*Trachinotus glaucus*, BLOCH.

Nassau (*Exped. Geogr. Soc.*)

*Trachinotus goodei*, JORDAN & EVERM

Hog Island (*Exped. Geogr. Soc.*).

*Seriola rivoliana*, CUV. & VALENC.

Nassau.

*Alectis ciliaris* (BLOCH).

Green Turtle Cay (EDWARDS).

*Selene vomer*, L.

Nassau (*Exped. Geogr. Soc.*).

Fam. **Scombridæ.***Gymnosarda alleterata* (RAFINESQUE).

Obtained between Andros and Green Cay by the *Exped. Geogr. Soc.*

*Scomberomorus cavalla*, CUV. & VALENC.

Observed in the Nassau market.

Fam. **Zeidæ.***Zenion hololepis* (GOODE & BEAN).

Little Bahama Bank (*Albatross Exped.* 1886).

Fam. **Pleuronectidæ.***Plathoprrys maculifer* (POEY).

Hog Island, Current, Eleuthera and Clarence Harbour (*Exped. Geogr. Soc.*).

*Platophrys lunatus* (L.)

Mastic Point, Andros. Green Turtle Cay (EDWARDS).



*Platophrys ocellatus* (AGASSIZ).

Without locality (*Exped. Geogr. Soc.*).

*Platophrys*, SP.

One specimen obtained by the *Exped. Geogr. Soc.* at Tarpum Bay. (BEAN op. cit. pag. 320).

*Citharichthys spilopterus*, GÜNTER.

Eleuthera, Current (*Exped. Geogr. Soc.*).

*Syacium micrurum*, RANZANI.

Clarence Harbour (*Exped. Geogr. Soc.*).

*Achirus inscriptus*, GOSSE.

Green Turtle Cay (EDWARDS).

Fam. **Gobiidæ**.*Gobius glaucofrenum* (GILL).

Collected at Nassau. Eleuthera (*Exped. Geogr. Soc.*).

*Gobius soporator*, CUV. & VALENC.

Very common along the shores under rocks, pieces of corals, shells etc. at Nassau and Mastic Point. Eleuthera (*Exped. Geogr. Soc.*), Green Turtle Cay (EDWARDS).

*Gobius fasciatus*, GILL.

Collected at Stanniard Creek, Andros. Not before recorded from the Bahamas.

*Gobius stigmaturus*, GOODE & BEAN.

Collected along the shore of Hog Island. Not before recorded from the Bahamas.

*Garmannia hemigymna*, EIG. & EIG.

Green Cay (*Exped. Geogr. Soc.*).

*Garmannia rubra* n. sp. Fig. 1.

D. VII, 12—13. A 10. — Head and anterior part of body naked; posterior part of body covered with ctenoid scales. Body compressed. A feeble longitudinal furrow before dorsal fin. Diameter of eye about as long as the distance between anterior border of eye and tip of snout. Interorbital space (counted between the superior borders of eyes) greater than diameter of eye. Mouth small. Maxillary extending to below anterior border of eye. Lower jaw with a band of small conic teeth outside of which are two large outwards curved teeth on each side of the median line. The upper jaw with similar dentition, but only one curved tooth on each side. Ventrals united. Brownish red. Length about 2 cm.

Several specimens were collected among sponges, corals etc. near the shore at Mastic Point, Andros.

This new species is very distinctly marked from other species of this genus by having 7 dorsal spines, and also through the dentition and coloration.

Whether the genus *Garmannia* is a quite distinct genus, I am not sure. I have had no opportunities examining any other specimens of this genus, neither of the two Pacific genera *Gymneleotris* BLEEKER and *Pycnomma* RUTTER<sup>1</sup>. These three genera seem to agree with each other in the general shape of head and body, in the head and anterior part of body being naked, and in the presence of curved teeth in the jaws. The greatest difference between *Gymneleotris* and *Pycnomma* on one side and *Garmannia* on the other seems, according the descriptions, to be that the ventrals are united in the latter genus, separated in the two other. In *Garmannia rubra* mihi the ventrals are united by a very thin membrane which can split very easily. How far from each other the two ventrals are separated in *Gymneleotris* and *Pycnomma* I do not know, but I have a slight suspicion that the separation of the ventral fins may be due to a splitting of the thin membrane uniting them, especially as the representatives of these genus are known only from single specimens. In that case I think these three genera ought to be united in one. Perhaps, my suspicion is perfectly false, but that can only be decided by a careful examination of all the forms in question.

#### Fam. Echineidæ.

##### *Echeneis naucrates* L.

It seems to me impossible to maintain the distinctness of the two species *E. naucrates* L. and *E. naucrateoides* ZUIEW, based as it is on the number of the laminae of the disk and the proportion between the length of the disk and the body. I have collected several specimens at Mastic Point, of which I give below a few notes about the named characters. I refer them all to *E. naucrates* L. being the earliest described form.

Number of laminae of the disk	Length of the disk in cm	Length of body in cm
19	9	34
19	7,5	28
19	7,5	29
20	7	25,5
20	8,2	29
21	5,3	17,5
21	8,5	29,5
22	7,7	27
22	7,8	26
22	10,7	40

<sup>1</sup> Notes on Fishes from the Gulf of California. — Proc. Calif. Acad. Sc. 3 (ser. 3), 1904 pag. 250.

Fam. **Scorpenidæ.***Scorpæna plumieri*, BLOCH.

Collected along the shore at Mastic Point. Nassau (*Albatross* Exped 1886).  
One specimen with 13 dorsal spines.

*Scorpæna brasiliensis*, CUV. & VALENC.

Current (*Exped. Geogr. Soc.*).

*Scorpæna grandicornis*, CUV. & VALENC.

Abaco (*Albatross* Exped. 1886).

Fam. **Dactylopteridæ.***Cephalacanthus volitans* (L.).

Nassau (*Exped. Geogr. Soc.*).

Fam. **Uranoscopidæ.***Dactyloscopus tridigitatus*, GILL.

Current (*Exped. Geogr. Soc.*).

Fam. **Gobiesocidæ.***Gobiesox cephalus*, LACÉPÈDE.

Green Cay (*Exped. Geogr. Soc.*).

*Gobiesox hæres*, JORDAN & BOLLMAN.

Green Turtle Cay (EDWARDS).

*Gobiesox androsiensis* n. sp.

D 8. A 7. — Head very broad, as broad as long, depressed. Tail compressed. Cleft of mouth extending to below anterior border of pupil. Diameter of eye shorter than distance between anterior border of eye and tip of snout, about as broad as interorbital space. A spine at lower angle of opercle. Insertion of dorsal at a point above vent. The distance between tip of snout and insertion of dorsal about twice the distance between this later point and base of caudal. Anal commences at a point below the middle between second and third dorsal ray. Pectoral reaching the level of vent — Lower jaw with 4 chisel-shaped incision on each side followed by 2 curved conic canines, the second largest, behind the canines 4 small almost conic teeth in a row which is not a continuation of the first named teeth, but situated a little more inside. All teeth brown at the tips. Upper jaw: anteriorly at least 8 to 10 flattened incisors, often arranged in two distinct rows, but sometimes rather irregularly placed, not quite equal in size or shape, the outer more conic. As a rule 2 distinct canines, the outmost largest. Inside the incisors



a varying number of very small teeth, which continue in a lateral row of about 8 small conic teeth. The tips of the incisors and canines brown. The lateral teeth white.

The colour is dark red, disappearing in alcohol. Length about 2,5 cm. Very common clinging to rocks along the shore at Mastic Point, Andros, after which place I have named it. Found also at Nassau.

This species is characterized especially by the dentition. It seems to show most resemblance with the imperfectly known *G. macrophthalmus* GÜNTER, the habitat of which is not known (probably West Indies). There is some difference in dentition, but this may be due to an imperfect description of *G. macrophthalmus*. Until further notices are not given about this species, the two species must be regarded as distinct.

*Arbacirosa rupestris*, POEY. Fig 3.

*Gobiesox rupestris*, POEY, Memorias sobre la Historia natural de la isle de Cuba Tom. 2. p. 283 (1856—58). Of this species, hitherto known only from Cuba, several specimens were collected among pieces of rocks and corals along the shore at Mastic Point, Andros.

The largest specimen 27 mm. In JORDAN and EVERMANN's description (pag. 2341) a few words are omitted, which makes the description of the markings not correct. It ought to be «each side of the back with 6 large oval spots». POEY writes (pag. 284) »sur chaque côté du dos six grosses taches ovales». In upper jaw on each side behind the incisors a few small teeth, not followed by other teeth. In lower jaw on each side behind the 3-serrated incisors one large, curved canine, not followed by other teeth.

Fam. **Blenniidae**.

*Labrisomus nuchipinnis*, QUOY & GAIMARD.

Abaco, New Providence and Watlings (*Albatross* Exped. 1886).

I collected several specimens both at Nassau and at Mastic Point, which all as far as I can see, must be referred to this species. They vary, however, rather much as to the number of rays in dorsal and anal, as well as to the number of filaments constituting the fringe above eye and that one on nape. The cross bands are also variable in number. In some specimens they extend to the edges of anal and dorsal, in some only to the basal parts of these fins. All specimens with a band of teeth in jaws. As the descriptions hitherto given about *L. nuchipinnis* do not state anything about such a great variation of the rays in dorsal and anal, I am giving below a table showing the number of them in the specimens I have collected. Perhaps a future study of a greater number of specimens will show that *nuchipinnis* includes several distinct forms.

specimen	length in mm.	rays in dorsal fin	rays in anal fin
a	140	XVIII,12	II,19
b	45	XIX,11	II,19
c	50	XIX,11	II,19
d	29	XIX,12	II,19
e	43	XX,11	II,19
f	40	XX,11	II,20
g	50	XXI,11	II,20
h	35	XXI,11	II,20
i	45	XXI,12	II,22

*Malacoctenus moorei*, EVERM. & MARSH.

Collected at Hog Island and at Mastic Point on Andros. Powells Point and Clarence Harbour (*Exped. Geogr. Soc.*).

In some specimens there are a few very small teeth behind the anterior ones in the jaws.

*Malacoctenus bimaculatus*, STEINDACHNER.

Very common at Mastic Point along the beach. Not before recorded from the Bahamas.

Seems to differ from *M. pourtoricensis* by the absence of a supraocular tentacle.

*Malacoctenus varius* (POEY).

Nassau (*Albatross* Exped. 1886).

*Malacoctenus ocellatus* (STEINDACHNER).

Bahamas. No other locality given.

*Malacoctenus biguttatus* (COPE).

Described from a specimen taken by WOOD along New Providence.

*Malacoctenus culebræ*, EVERM & MARSH.

I collected a specimen at Mastic on Andros, which seems to belong to this species, described from Porto Rico. It differs from the description in having a band of small teeth behind the larger ones in the upper jaw. In the lower jaw I have found only one row of teeth. As to the teeth being arranged in a band or only in one row in the jaws, which should distinguish the two genera *Labrisomus* and *Malacoctenus* from each other, I doubt the possibility of maintaining this difference. As mentioned above I have also found some small teeth behind the larger ones in *M. moorei*. The absence of an ocular filament in the single specimen is not a difference to which any importance can be attached. D XX, 8. Length 2 cm.

*Malacoctenus lugubris* (POEY)? Fig. 6.

POEY has under this name described a species from Cuba, later on obtained by the steamer ALBATROSS at Nassau (1886). I have not seen his own description

but only that given by JORDAN and EVERMANN in their Catalogue, nor have I seen any specimens or figures referred to this species, but, as far as I can judge from the short description, it is not improbable that two small Blennies I collected at Mastic Point on Andros are to be referred to this species. I am giving a description, together with a figure of them.

A filiform tentacle over eye and one on each side of neck. Cleft of mouth reaching a little beyond anterior border of eye. Eye large, its diameter longer than length of snout. Interorbital space much narrower than diameter of eye. Teeth in jaws in one row. Dorsal fin with two notches, one feeble at about third spine and one deeper at about last third spine. Soft part of dorsal short, high. Dorsal spines in one specimen 20, in the other 18. Soft rays in the former 7, in the latter 8. Anal fin II, 16. Caudal free from dorsal and anal. Ventrals not reaching vent (perhaps not perfect), with 2 soft rays. Pectorals reaching beyond vent. Lateral line arched anteriorly. Scales cycloid. Colour in alcohol yellowish brown, with 8 dark brown cross bands, joining on back, but disappearing before reaching belly. Very small points of the same colour scattered over body. In one specimen a dark brown spot on opercle. Length 16 and 21 cm.

*Achenopterus affinis* (STEINDACHNER).

Eleuthera (*Exped. Geogr. Soc.*).

*Achenopterus fasciatus*, STEIND.<sup>1</sup>

Collected at Mastic Point on Andros. Not before recorded from the Bahamas.

The number of dorsal spines varies between 27 and 29, the soft rays in anal between 17 and 18.

*Achenopterus albicaudus*, EVERM. & MARSH.

Several specimens collected at Mastic Point on Andros along the beach.

Dorsal spines 29 or 30. The ocellus on the dorsal fin is dark blue, surrounded by yellowish brown. About a living specimen I have made the following notes as to the coloration, compared with the description of the type: caudal not pure white with brownish points. The base of pectorals and ventrals black, rest similar to caudal. Anal and dorsal with a narrow white edge. — The membrane of third dorsal spine joins the fourth spine at the middle, not so near the tip as in EVERMANN'S figure. Anal does not extend so far back as in his figure.

One specimen differs from the other as to the coloration in the following points (notes about living specimen): without ocellus. A white spot on opercle and one above the base of pectoral. A median white band with small brown points on

<sup>1</sup> The West Indian species of *Achenopterus* seem to vary rather much both in coloration, and as to the number of rays in the fins. It is a difficult task to distinguish them at the present state of knowledge. Some of them are perhaps not distinct species. I have determined the following species: *fasciatus*, *fajardo*, *rubescens* and *albicaudus* as far as that has been possible without having any type-specimens before me.



the head. D. XXX, 1. After preservation, first formol, then alcohol, a small black spot is visible on the place for the ocellus.

*Auchenopterus rubescens*, EVERM. & MARSH.

Collected at Mastic Point on Andros, along the beach.

Living specimen: colour like that of sand. Colour of dorsal and anal similar to that of body, anal a little darker. A brown band on head through the eye. After preservation the colour changed reddish, but faded later on.

*Auchenopterus fajardo*, EVERM. & MARSH.

Collected at Mastic Point on Andros, along the beach.

Colour in living specimen: dark brown with lighter, white and reddish spots. A rather distinct dark band extending from snout to caudal. Dorsal with row of dark brown dots, more or less confluent; anterior upper part with small light dots. On the last second dark spot a blue dot, surrounded by a narrow ring of yellowish brown. Anal dark brown, with the edge colourless. Base of caudal dark brown almost black, upper and lower edge with a small white spot; the rest of the fin with indistinct yellowish green dots along the rays. Base of pectoral spotted with dark brown and white. Base of ventral dark brown, rest similar to that of caudal.

The preserved specimen has a coloration similar to that stated for *A. fajardo*.

EVERMANN and MARSH write about *A. fajardo*: »the long and slender maxillary reaching beyond posterior border of orbit», but this is not the case in their figure.

*Auchenopterus grandicomis* n. sp.<sup>1</sup> Fig. 5.

Body compressed. Snout broad. Jaws projecting. Mouth large. Maxillary reaching posterior border of eye. Diameter of eye about as long as snout. Interorbital space rather broad. A small, but broad nasal tentacle, a very large one above eye, and a small feebly fringed flap on nape. The ocular tentacle named is band-formed, with one edge lobate. Opercle with a spine. A band of conic teeth in both jaws. Small conic teeth on vomer, none on palatines. Dorsal originating over edge of præopercle, feebly notched behind second spine. Dorsal and anal united with caudal to a varying extent, sometimes joining only the base, sometimes higher up on the rays. Ventrals with 3 soft rays, longest just reaching vent. Pectoral reaching a little beyond origin of anal. Caudal rounded, as long as distance from tip of snout to posterior edge of præopercle. Lateral line arched anteriorly. Anteriorly 2 rows of scales between dorsal fin and lateral line. Four rows of scales between straight part of lateral line and dorsal and a similar number between lateral line and anal. Head naked. Body with cycloid scales. About 33 scales in lateral line. D. XXVII, 1. A. II, 17—18. Largest specimen 36 mm. Colour: uniform dark

---

<sup>1</sup> In the Zool. Museum of Copenhagen are a few specimens from West Indies (no other locality) labelled by LÜTKEN »*Auchenopterus grandicomis* n. sp.» He has never described them. They are identical with this species and I have therefore excepted LÜTKEN'S name.

brown. Edge of dorsal and anal, and also pectorals, ventrals and caudal (except their basal parts) colourless.

Rather commonly found in sponges in shallow water along the shore at Mastic Point on Andros.

This species is easily recognized by the extremely large ocular tentacle.

*Auchenistius stahli*, EVERM. & MARSH.

Common at Mastic Point, found in sponges or among dead corallines near the beach. Hitherto known only from Porto Rico.

The colour varies rather much. I am giving below some notes, made about some living species.

(a) Brown, with a reddish touch.

(b) Greyish green. Each side of body with a row of irregular reddish spots. On each side of head a reddish very distinct spot, edged with white and black.

(c) Greyish green with reddish spots and small white one. On each side of posterior part of body small black spots. On each side of head a light red spot edged with green. Head above with white and reddish gray spots. Dorsal with white spots. Back yellowish brown.

(d) Brown with a reddish touch. On each side of head a light red spot, edged with white and blue. Other parts of head with irregular white and reddish stripes, above with white and reddish grey spot.

*Stathmonotus hemphillii*, BEAN.

Hog Island (*Exped. Geogr. Soc.*).

*Blennius pilicornis*, CUV. & VALENC.

One specimen at Mastic Point on Andros. Not before recorded from the Bahamas.

Fam. **Zoarcidæ.**

*Ogilbia cayorum*, EVERM. & KENDALL.

Several specimens collected along the shore of Hog Island.

Not before recorded from the Bahamas.

Fam. **Ophidiidæ.**

*Ophidium*, SP.

Abaco (*Albatross Exped.* 1886).

Fam. **Antennariidæ.**

*Antennarius tigris*, POEY.

Green Turtle Cay (EDWARDS).

*Antennarius principis* (CUV. & VALENC).

Golding Key (*Exped. Geogr. Soc.*).

*Antennarius nuttingi*, GARMAN.

Great Bahama Banks (*Exped. Univ. Iowa*).

*Pterophryne histrio* (L.).

Found among seaweeds, washed on the beach.

Fam. **Maltidæ**.*Ogcocephalus radiatus* (MITCHILL).

Great Bahama Banks (*Exped. Univ. Iowa*).

*Ogcocephalus vespertilio* (L.).

One specimen found thrown on the beach at Nassau. Not before recorded from the Bahamas.

The snout very short.

Fam. **Balistidæ**.*Balistes vetula*, L.

Collected at several places.

*Balistes carolinensis* GMELIN.

Off Abaco (*Exped. Geogr. Soc.*).

*Cantidermis maculatus* (Bloch).

Off Abaco (*Exped. Geogr. Soc.*).

*Monacanthus spilonotus*, COPE.

Hog Island (*Exped. Geogr. Soc.*).

*Cantherines pullus* (RANZANI).

Nassau (*Albatross Exped.* 1886).

*Alutera scripta* (OSBECK).

Observed at Nassau by *Exped. Geogr. Soc.*

Fam. **Ostraciontidæ**.*Lactophrys bicaudalis*, L.

Obtained by the *Exped. Geogr. Soc.* at the Nassau market.

*Lactophrys trigonus*, L.

A great number of specimens collected at Mastic Point.



They show a great variation in the relation of the plate behind the dorsal fin to the carapax. In some specimens this plate is separated from the carapax, in other it is united with it on one side, but separated on the other, and in some specimens the plate is united with the carapax on both sides. There were two plates behind the dorsal fin in a few specimens collected.

*Lactophrys tricornis*, L.

Several specimens collected at Mastic Point.

The dorsal caudal spine is present in some specimens, absent in others. The two plates on the tail behind the carapax are not always present.

Fam. **Tetrodontidæ.**

*Spheroides spengleri* (BLOCH).

Current, Powells Point, Clarence Harbour and Hog Island (*Exped. Geogr. Soc.*).

*Spheroides testudineus*, L.

Common at Mastic Point (Andros) in mangrove-bights, also found in the brackish ponds which are in connection with the sea. Green Turtle Cay (EDWARDS).

Fam. **Diodontidæ.**

*Diodon hystrix*, L.

Three specimens obtained at Mastic Point, thrown on the beach.

*Diodon holacanthus*, L.

Common at Hog Island. Clarence Harbour (*Exped. Geogr. Soc.*).

*Chilomycterus geometricus*, BLOCH & SCHNEIDER.

One specimen at Mastic Point.

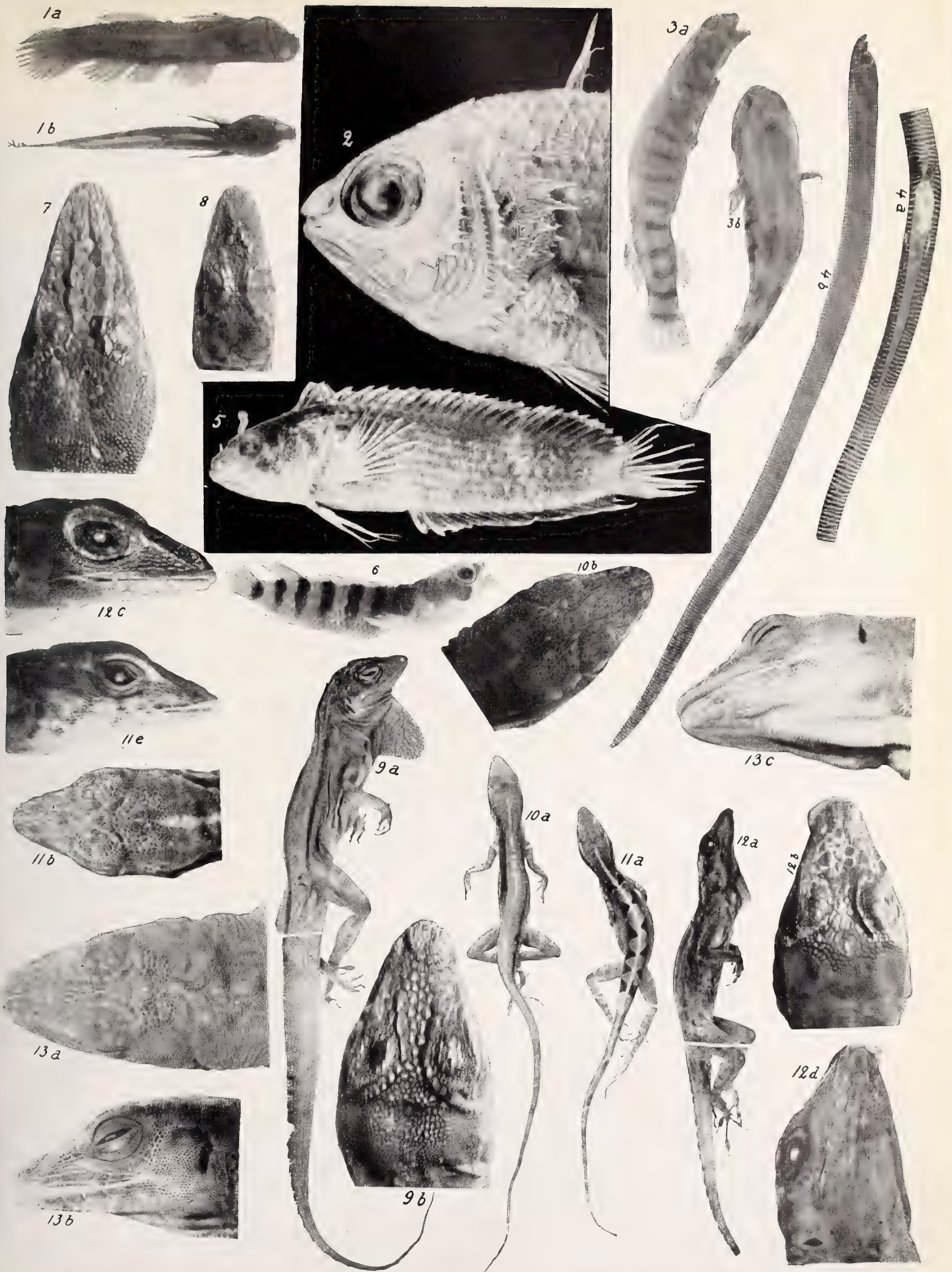
A rather large tentacle above the eye. Hexagonal black reticulation. It seems impossible to maintain the distinctness of the three species *Ch. schoepfi*, WALB., *Ch. spinosus* (L.) and *Ch. antillarum*, JORD. & RUTTER.

Explanation of plate.

---

- Fig. 1 — *Garmannia rubra* n. sp.  
 » 2 — *Plectrypops retrospinis* (GUICHENOT).  
 » 3 — *Arbaciosa rupestris*, POEY.  
 » 4 — *Nannocampus nanus* n. sp.  
 » 5 — *Auchenopterus grandicomis* n. sp.  
 » 6 — *Malacoctenus lugubris* (POEY)?  
 » 7 — *Anolis porcatus*, GRAY (*Common form in the Bahamas*)  $\times 3$ .  
 » 8 —                 »                 (*Rare form, see text*)  $\times 3$ .  
 » 9 — *Anolis sagræ*, COCT. Adult. — *a* nat. size, *b*  $\times 3$ .  
 » 10 —                 »                 Younger specimen. — *a* nat. size, *b*  $\times 3$ .  
 » 11 —                 »                 »                 — *a*                 », *b* and *c*  $\times 3$ .  
 » 12 — *Anolis distichoides* n. sp. — *a* nat. size, *b-d*  $\times 3$ .  
 » 13 — *Anolis distichus*, COPE. — *a-c*  $\times 3$ .









LUNDS UNIVERSITETS ÅRSSKRIFT. N. F. Afd. 2. Bd 7. Nr 6.  
KONGL. FYSIOGRAFISKA SÄLLSKAPETS HANDLINGAR. N. F. Bd 22. Nr 6.

---

# KREUZUNGSUNTERSUCHUNGEN

AN

HAFER UND WEIZEN

VON

H. NILSSON-EHLE

II



LUND 1911  
HÅKAN OHLSSONS BUCHDRUCKEREI





## Einleitung.

Die wichtigsten allgemeinen Schlussfolgerungen, die ich aus meinen früheren, bei den Getreidearten ausgeführten Kreuzungs- und Variabilitätsuntersuchungen gezogen habe, und die in meinen verschiedenen Publikationen der Jahre 1901—1909 zum Ausdruck gekommen sind, waren kurz resumiert die folgenden:

1. Bei der Einteilung der Variation ist die Grenze nicht zu ziehen zwischen diskontinuierliche, durch Mutation entstandene, völlig erbliche Variation einerseits, und kontinuierliche, fluktuierende, individuelle, quantitative, nicht oder nur übergehend erbliche Variation andererseits. Die einzige Grenze, die gezogen werden kann, ist diejenige zwischen nicht erbliche, von Schwankungen der äusseren Verhältnisse hervorgerufene Variation = Modifikation einerseits und erbliche Variation andererseits (1907, 1908)<sup>1</sup>. Beide Arten, Modifikation und erbliche Variation, können kontinuierlich oder diskontinuierlich sein. Die erbliche Variation kann ebenso stark quantitativ-kontinuierlich wie die Modifikationsfluktuation und auch in gewissem Sinne fluktuierend sein.

2. Die quantitativ-kontinuierliche, fluktuierende, erbliche Variation hat sich durch mendelistische Analyse, in derselben Weise wie die qualitative oder diskontinuierliche erbliche Variation, als eine Kombinationsvariation im mendelschen Sinne nachweisen lassen. Für eine und dieselbe Ausseneigenschaft können nämlich mehrere verschiedene, selbständig mendelnde Faktoren oder Erbeinheiten vorhanden sein, wobei diese entweder sämtlich instande sind, für sich allein eine gewisse, etwa dieselbe Ausseneigenschaft, z. B. Farbe, hervorzurufen, oder zum Teil nur die äussere Wirkung anderer Faktoren zu verändern vermögen (1908, 1909). Charakteristisch für die gleichsinnigen Faktoren ist es, dass sie jeder für sich etwa dieselbe oder eine wenig verschiedene äussere Wirkung haben, z. B. rote Farbe, und dass sie im Verein mit einander mehrmals eine deutlich cumulative Wirkung ausüben, so dass sie eine stärkere Ausprägung des Merkmales bewirken, was sowohl betreffend Farbenmerkmale beim Hafer und Weizen als auch betreffend andere Merkmale (Rispentypus des Hafers) hervorgehoben wurde. Durch verschiedene Kombination der verschiedenartigen Einheiten, die auf eine äussere Eigenschaft einwirken, kann

---

<sup>1</sup> Siehe Literaturverzeichnis am Schluss der Einleitung.

eine kontinuierlich abgestufte Ausprägung der betreffenden äusseren Eigenschaft zustandekommen. Bei überwiegend selbstbestäubenden Arten werden die homozygoten Kombinationen — was ja schon Mendel mathematisch zeigte — leicht überwiegen können, und die erbliche quantitative Variation bekommt dann hier in der Hauptsache den Charakter einer Reihe konstanter Abstufungen-Biotypen = konstanter erblicher Formen oder Linien. Diesen Biotypen oder Linien liegt also nicht eine ebenso grosse Anzahl von Mutationen zugrunde: von einer relativ kleinen Anzahl von Faktoren, über deren ursprüngliche Entstehungsweise, durch Mutation oder in anderer Weise, man übrigens vorläufig wenig oder nichts sicheres weiss, kann durch verschiedene Kombination eine sehr grosse Anzahl verschiedener Abstufungen-Biotypen gebildet werden<sup>1</sup>, nach der Formel  $2^n$  ( $n$  = Anzahl Faktoren). Bei Fremdbestäubern, wo die heterozygoten Stadien immer fortwährend behalten werden, können die Abstufungen erblicher Art bei einer gegebenen Anzahl von Faktoren noch viel zahlreicher ( $= 3^n$ ), die erbliche Variation noch mehr kontinuierlich werden. Bei der Kombination einer gewissen Zahl von Faktoren werden die Kombinationen mit intermediärer Einheitszahl am zahlreichsten, mit steigender bzw. abnehmender Einheitszahl werden die Kombinationen in gleicher Weise seltener; diese Kombinationsverteilung der normalen Zufallskurve gemäss lässt einigermassen verstehen, weshalb auch bei der äusseren sichtbaren erblichen Variation, wie von Grösse, Farbenintensität, Stellung der Äste usw., soweit diese von mehreren gleichsinnigen Faktoren abhängt, die Verteilung eine ähnliche wird, d. h. die Mittelwerte am zahlreichsten werden (1908, S. 272), ebenso wie bei der Modifikationsfluktuation.

3. Wenn Formen gekreuzt werden, die sich in mehreren Einheiten einer Eigenschaft unterscheiden, dann muss, infolge des oben Gesagten, falls man nur eine im Verhältnis zu den möglichen Kombinationen begrenzte Zahl von Individuen hat, die Spaltung hauptsächlich innerhalb der Kombinationen mit der mittleren Zahl von Einheiten stattfinden, und man bekommt dann nur intermediäre Nachkommen mit relativer Konstanz (d. h. im Verhältnis zu den Differenzen zwischen den Eltern), d. h. intermediär-konstante Vererbung. Man könnte deshalb hier vielleicht wenigstens einen Weg finden, um das Verhalten der Artenhybriden zu deuten (1908, S. 273).

4. Weil verschiedene selbständige Einheiten etwa dieselbe äussere Wirkung zeigen und verschiedene Kombinationen etwa dasselbe äussere Resultat ergeben können, werden solche Fälle eintreffen, wo aus Kreuzung äusserlich gleichartiger Individuen, durch Umgruppierung der Einheiten, neue Kombinationen mit mehr

---

<sup>1</sup> Für diese Kombinationen oder Biotypen wird noch vielfach die Benennung Elementarart gebraucht. Da aber DE VRIES in die Benennung Elementarart ursprünglich die Bedeutung einer durch Mutation selbständig entstandenen Art einlegt, werde ich diese Benennung für die homozygoten Kombinationen nicht benutzen, sondern, wo eine besondere Benennung für die homozygoten Kombinationen wünschenswert erscheint, mit JOHANNSEN von Biotypen, Formen oder Linien sprechen.



oder weniger scharf abweichendem äusserem Charakter gebildet werden. In der Weise können aus äusserlich einheitlichen Beständen, durch Umgruppierung schon gegebener Faktoren, scheinbare Neubildungen, scheinbare Mutationen hervorgehen (1909, S. 109).

5. Durch fortgesetzte Umgruppierung gegebener Faktoren einer quantitativen Eigenschaft kann nicht nur eine allmähliche Veränderung derselben bewirkt werden, sondern auch eine allmähliche Anpassung an die Aussenbedingungen zustandekommen (1908, S. 291).

In bezug auf die Einteilung der Variation ist dieselbe Auffassung von BAUR mehrmals (1908, 1911) geäussert worden. Er hebt auch (1907) die Konfusion hervor, die dadurch hervorgerufen wurde, dass unter dem Begriffe Fluktuation grundsätzlich verschiedene Abänderungen verstanden wurden, teils fluktuierende Modifikation, teils fluktuierende erbliche Variation. Neuerdings hat auch FEUWIRTH (1911), von demselben Gesichtspunkte aus, d. h. scharfer Unterscheidung zwischen Modifikation und Variation, in ausführlicher Weise eine Einteilung der Variabilitätsformen (Variabilität im weitesten Sinne des Wortes) durchgeführt.

Verschiedene, selbständige Faktoren mit etwa derselben äusseren Wirkung sind seitdem auch von EAST (1910) in bezug auf gewisse Farbenmerkmale beim Mais konstatiert worden. Die Schlüsse, die EAST aus diesen Versuchen zieht, sind gerade dieselben, die Verf. (1908 und 1909) zum Ausdruck gebracht hat, sowohl in bezug auf das Zustandekommen einer kontinuierlichen Variation durch verschiedene Kombination gleichsinniger Faktoren, als in bezug auf die anscheinend konstanten Artenhybriden und die Bildung scheinbarer Mutationen durch Neugruppierung von Faktoren mit etwa derselben äusseren Wirkung.

Dies Vorhandensein zweier oder mehrerer gleichsinnigen Faktoren für eine äussere Eigenschaft wurde neuerdings von LANG (1911) mit dem ebenso bequemen als zutreffenden Namen Dimerie, bezw. Polymerie bezeichnet. Mit Hilfe dieser Terminologie wird die Abgrenzung diesbezüglicher Fälle besser durchgeführt als durch die Bezeichnungen einfaktorig, zweifaktorig oder monohybrid, dihybrid usw., wobei nicht nur gleichsinnige Faktoren in Betracht zu kommen brauchen. Von LANG (1910, 1911) wurde auch die Bedeutung der Polymerie zur Erklärung nicht nur der konstanten Artenhybriden, sondern der mit der alternativen mendelschen Vererbung zunächst in Widerspruch stehenden intermediärkonstanten Vererbung überhaupt, hineingezogen und in ausführlicher, überzeugender Weise behandelt. Durch die Polymerie lasse sich die intermediäre Vererbung als eine nur scheinbar intermediäre, in Wirklichkeit alternative, erklären, in der oben in bezug auf die Artenhybriden skizzierten Weise.

Auf Grund des sicheren Feststellens mehrerer bestimmten Faktoren bei gewissen äusseren Merkmalen, habe ich (1908) versucht, das Spaltungsverhalten auch anderer Eigenschaften, d. h. quantitativer Eigenschaften im allgemeinen, wie Grösse, Winterfestigkeit, Resistenz gegen Krankheiten, auf das Vorkommen einer Anzahl selbständiger Faktoren zurückzuführen, auch in solchen Fällen, wo man infolge

Schwierigkeiten verschiedener Art noch weit davon entfernt ist, die Anzahl und spezifische Wirkung dieser Faktoren in der Weise feststellen zu können, wie dies bei mehreren Farbenmerkmalen, bei dem Rispentypus usw., im Laufe der Untersuchungen allmählich möglich war. Ich begründete diese Theorie zunächst auf dem häufigen, relativ leicht zu konstatierenden Bilden von Abstufungen, die ausserhalb der Grenzen der Eltern liegen, bei Kreuzung etwa gleicher oder wenig verschiedener Abstufungen, und auf dem offenbar parallelen Verhalten der Spaltung sowohl bei verschiedenen dieser Eigenschaften als beim Vergleich zwischen diesen und den Farbenmerkmalen, wo die Variation auf eine bestimmte Zahl mendelnder Faktoren hatte zurückgeführt werden können. Wie wir in der folgenden ausführlicheren Darstellung bei jeder einzelnen Eigenschaft sehen werden, sprechen die sämtlichen experimentellen Tatsachen ausnahmslos für diese Auffassung, und so dürfte man berechtigt sein, dieselbe als wohl begründete Theorie aufzustellen, auch wenn sie der bisher herrschenden Meinung über die Natur der kleinen kontinuierlichen erblichen Variabilität als einer stetig vorhandenen Tendenz zur Variation widerstreiten würde.

Zu Gunsten dieser Theorie sprechen auch Versuche bei anderen Pflanzenarten, vor allem die Versuche TAMMES' bei *Linum* (1911). Auf Grund ihrer eingehenden, weit durchgeführten Untersuchungen zieht auch TAMMES den Schluss: »Ein fundamentaler Unterschied im Verhalten bei der Kreuzung zwischen in Quantität und in Qualität von einander abweichenden Merkmalen besteht also nicht«. Infolge des Umstandes, dass der Unterschied z. B. an Grösse (Länge der Samen) zwischen den gekreuzten Formen von mehreren Einheiten bedingt sein kann, wird die  $F_2$ -Spaltung, wenn auch deutlich und sicher, eine komplizierte; wenn die Elternabstufungen weit verschieden sind, wird die Spaltung eine intermediäre, so dass die Elternabstufungen in  $F_2$ , wenigstens bei einer relativ begrenzten Anzahl von Individuen, nicht wiederkehren. Dagegen können die Elternabstufungen (= P-Formen) in  $F_3$ , in den Nachkommenschaften der extremen  $F_2$ -Individuen, ausgespaltet werden. TAMMES weist deshalb die Auffassung GROSS' (1906, 1911) zurück, dass es neben der alternativen, nur für diskontinuierlich, sprungweise getrennte Merkmale in Betracht kommenden Vererbungsweise noch eine intermediäre, für kontinuierlich variierende Merkmale geltende Vererbungsweise geben sollte. Auch die Tatsachen meiner Untersuchungen widersprechen, wie aus den Ausführungen sowohl des Teils I als dieses Teils hervorgeht, entschieden der Ansicht GROSS', besonders in der verallgemeinerten Form, dass alle kontinuierliche Variation ausserhalb des Gebietes der mendelschen Gesetze liegen sollte. Ohne überhaupt die Frage zu streifen, ob es zuletzt auch eine solche Form von kontinuierlicher, zu erblichen Veränderungen führender Variabilität gebe, muss man jedenfalls entschieden daran festhalten, dass eine kontinuierliche Variation durch Kombination mendelnder Faktoren zustandekommt.

Weggesehen von der Erklärungsweise der kontinuierlichen erblichen Variation muss aber andererseits das Vorkommen einer solchen, auch bei den Pflanzen, immer wieder streng betont werden. Es scheint mir deshalb zunächst notwendig, bei dieser Gelegenheit nochmals und ausführlich auf die Unrichtigkeit auch desjenigen Stand-



punktes besonders hinzuweisen, dass man die erbliche Variation bei den Getreidearten auf eine ziemlich begrenzte Zahl, sage Hunderte oder Tausende, von selbständigen, durch Mutation entstandenen, äusserlich charakterisierbaren Formen, Biotypen, Elementararten, Kleinarten (*petites espèces*) zurückführen könne (vgl. DE VRIES 1906)<sup>1</sup>. Erstens dürfte wohl jetzt ziemlich allgemein anerkannt sein, dass die Biotypen Kombinationen sind und also gar nicht ebensovielen Mutationen entsprechen, da nur von relativ wenigen Einheiten eine überaus grosse Anzahl von Biotypen möglich sind. Wie die relativ wenigen zugrunde liegenden Einheiten entstehen, ist wie gesagt noch fraglich. Es ist wohl die oft auffallende Konstanz der getrennten Typen, die lange genug getäuscht und die Annahme veranlasst hat, dass diese konstanten Typen die eigentlichen Einheiten darstellen sollten. Die Konstanz hängt aber offenbar nur mit der überwiegenden Selbstbestäubung zusammen. Es genügt, wie die folgende Darstellung immer wieder zeigen wird, zwei Formen, zwei konstante Linien zu kreuzen, um in der Nachkommenschaft durch Neukombination wieder die allergrösste Mannigfaltigkeit hervorzurufen, so dass man die reinen Elterntypen sogar nicht sicher wieder bekommt, was indessen an sich nicht sehr merkwürdig ist, da schon eine ziemlich geringe Anzahl von Differenzpunkten genügt, um die echten Elternkombinationen in der Nachkommenschaft sehr selten zu machen: auch bei Kreuzungen zwischen wenig verschiedenen Formen habe ich bis jetzt solche Formen, die ich als mit den Eltern ganz sicher identisch zu bezeichnen wage, kaum wieder aus der  $F_2$  herauszüchten können, dies eben weil so viele Abstufungen jeder Eigenschaftskategorie bei der Spaltung gebildet werden. Diese durch die Kreuzung ausgelöste Variation ist aber keine andere als die schon bei der Art vorhandene. Von den meisten Eigenschaften, sowohl Farbe als Grösse usw., kommen eine Reihe kontinuierlich verbundener Abstufungen vor, und durch verschiedene Kombination von diesen ist schon von homozygoten Formen = Biotypen eine vollständig unübersehbare Menge möglich und ohne Frage auch tatsächlich vorhanden. Geht man dann aber zu den normal allogamen Arten über, wo auch die heterozygoten Konstruktionen stetig realisiert vorkommen, wird es sogar bei einer ziemlich geringen Faktorenanzahl bald praktisch unmöglich, zwei sicher identische Individuen zu finden.

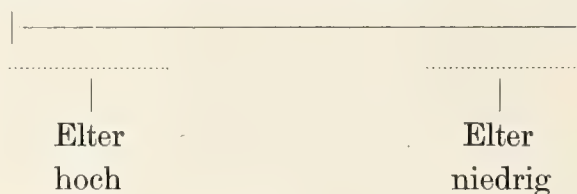
Der Umstand, dass bei meinen Linienkreuzungen die echten Elternkombinationen nicht wieder in der  $F_2$  gefunden werden können, scheint zwar im ersten Augenblick den mendelistischen Forschungsergebnissen bei anderen Pflanzenarten, z.

---

<sup>1</sup> Ein richtiges Verständnis dieser Sache ist nicht nur theoretisch wichtig, sondern auch für die praktische Züchtung von geradezu fundamentaler Bedeutung, was jedoch in diesem Zusammenhang nur nebenbei gestreift werden kann. Bei der Annahme einer relativ begrenzten Anzahl gegebener Formen oder Elementararten, wird man sich leicht damit begnügen, aus einer alten Rasse eine verhältnismässig kleine Anzahl charakteristischer Formen aufzusuchen, wobei man die Gefahr läuft, beim Verwerfen des übrigen Materiales der alten Rasse viel wertvolles zu verlieren. Wie die praktischen Züchtungsmethoden sein sollen, um diese Gefahr zu vermeiden, darauf kann jedoch hier nicht näher eingegangen werden, da dies ganz ausserhalb des Rahmens dieser Abhandlung von rein theoretischem Inhalte liegt.



B. bei Erbsen, zu widerstreiten. Es sind hier durch die ausgezeichneten Arbeiten einer Anzahl von Forschern, wie LOCK, v. TSCHERMAK, TEDIN u. a., eine lange Reihe distinkter Faktoren klar auseinandergesetzt worden, durch deren verschiedene Kombination man nach einer Kreuzung, falls der Differenzpunkte nicht zu viel sind, die Elternkombinationen ziemlich leicht zurückbekommt. Es ist aber immer fraglich, ob diese zurückbekommenen Kombinationen wirklich in allen Hinsichten mit den Elternkombinationen völlig identisch sind, oder ob nicht nebst den »grösseren«, leichter identifizierbaren Faktoren auch solche vorkommen, welche kleinere Differenzen erblicher Art verursachen. Besonders bei solchen quantitativen Eigenschaften wie Höhe der Pflanzen ist dies eine Frage, die wohl noch eine nähere Auseinandersetzung nötig hat. Über die einfache mendelsche Spaltung bei Erbsen 3 hoch : 1 niedrig kann zwar nicht der geringste Zweifel gehegt werden. Bei der hohen Varietät ist ein Faktor vorhanden, der bei der niedrigen fehlt, und das Fehlen dieses Faktors verursacht eine sehr scharfe diskontinuierliche Differenz. Die Spaltung dieses Faktors verläuft zweifellos ganz einfach und regelrecht; in dieser Hinsicht haben spätere Forschungen die Befunde MENDELS immer nur bestätigen können. Es ist aber die Frage, ob die beiden homozygoten Gruppen, die homozygot hohen und die homozygot niedrigen, an sich wirklich homogen sind und ganz dieselben Abstufungen wie die konstanten Elternlinien darstellen, oder ob nicht in jeder Gruppe



kleinere erbliche Spaltungsdifferenzen vorhanden sind, in Übereinstimmung etwa mit dem obenstehenden schematischen Bild. Ich möchte dies, wenigstens bei Kreuzungen gewisser Varietäten, für sehr wahrscheinlich halten, und was mir bisher aus den Untersuchungen TEDINS bekannt worden ist<sup>1</sup> stützt noch mehr diese Annahme, dass neben der eigentlichen starken und scharfen Spaltung eine solche »Nebenspaltung« mehr unbedeutender Art vorkomme, dies zumal nicht nur bei der Höheneigenschaft, sondern auch bei anderen Eigenschaften. Schon nach dem Befunde MENDELS, dass bei Kreuzungen mancher Varietäten Verstärkungen der Höhe eintreten, liegt der Verdacht einer solchen Nebenspaltung auf der Hand. Die Häufigkeit, um nicht fast Regelmässigkeit zu sagen, womit Verstärkungen und Abschwächungen (die sich ebenso vollständig erblich wie grössere Differenzen behalten) bei allerlei Eigenschaften nach Kreuzungen gebildet werden<sup>2</sup>, wie es u. a. v. TSCHERMAKS<sup>3</sup> und meine Untersuchungen

<sup>1</sup> nach mündlichen Mitteilungen.

<sup>2</sup> Die Annahme, die Schwierigkeit des Erhaltens der »reinen« Elternkombinationen auf Gametenunreinheit zurückzuführen, habe ich schon im Teil I (1909, S. 118) zurückgewiesen; die Tatsachen widersprechen dieser Annahme, stehen aber mit der Annahme mehrerer die Spaltung beeinflussenden Faktoren durchaus in Übereinstimmung.

<sup>3</sup> Die diesbezüglichen Beobachtungen sind von v. TSCHERMAK in FRUWIRTH, Die Züchtung der landw. Kulturpfl., Bd. III und IV, 2 Aufl., 1910, zusammengestellt.

zeigen, erweist das allgemeine Vorkommen einer solchen geringfügigen Nebenspaltung, die aber bei allgemeinen Darstellungen der mendelistischen Forschungsergebnisse bis jetzt nicht genügend berücksichtigt worden ist. Sobald aber eine solche abgestufte Spaltung mehrerer Eigenschaftskategorien stattfindet, wird es nicht leicht sein, bei einigen Hunderten oder Tausenden von  $F_2$ -Individuen die echten Elternkombinationen, ganz dieselben Biotypen, Linien, wiederzufinden. Ich glaube deshalb keinen Gegensatz zwischen meinen Resultaten bei Getreidearten und den mendelistischen Resultaten bei anderen Pflanzen zu finden. Leicht denkbar sind nun bei der Spaltung quantitativer Eigenschaften solche Fälle, wo nicht mehr die Wirkung einzelner Faktoren durch diskontinuierliche Spaltung, wie im Falle hoch: niedrig bei Erbsen, leicht erkannt werden kann, sondern wo das Ganze sich in eine abgestufte Spaltung auflöst. Sobald man aber auf dem einen oder anderen Umwege die Spaltung nach distinkten Faktoren zerlegen kann, zeigen diese immer mendelndes Verhalten, und so kann man nicht daran zweifeln, dass auch die geringfügige Spaltung, die oft als Nebenspaltung in der oben angeführten Weise erscheinen mag, von mendelnden Faktoren abhängt, sei es denn, dass diese Faktoren oft ihre auffallendste Wirkung in anderen Teilen der Pflanze ausüben (z. B. als Farbfaktoren) und nur nebenbei quantitative Grössedifferenzen beeinflussen mögen, oder dass eine Abstufung einer quantitativen Eigenschaft die Folgeerscheinung einer ganzen Kombination anderswo wirksamer Faktoren sein mag (vgl. Kreuzungsuntersuchungen Teil I, S. 52).

Wenn sich also schon aus dieser infolge des Vorhandenseins mehrerer mendelnden Faktoren stets komplizierten Spaltung und den überaus grossen Kombinationsmöglichkeiten, die damit zusammenhängen, schliessen lässt, dass man die erbliche Variation nicht in der Form einer begrenzten Zahl äusserlich distinkter Elementararten darstellen kann, so geht dies noch viel mehr aus der oft vorhandenen, oben hervorgehobenen Kontinuität der erblichen Variation hervor. Diese Kontinuität der erblichen Variation ergibt sich nicht nur aus direkten Beobachtungen, sondern auch aus mehreren Tatsachen der Kreuzungsanalyse, von denen wir in der folgenden speziellen Darstellung des Verhaltens quantitativer Eigenschaften immer wieder Beispiele sehen werden. Jeder Züchter weiss, dass die erblichen Unterschiede innerhalb der Getreidearten grösstenteils nur quantitativ sind, d. h. verschiedene Gradationen derselben Eigenschaftskategorie (CORRENS 1901), wie Länge, Grösse, Entwicklungszeit, Winterfestigkeit, Resistenz gegen eine bestimmte Krankheit usw., bezeichnen. Untersucht man die erblichen Unterschiede einer Anzahl von Individuen durch Ermittlung der Durchschnittswerte ihrer Nachkommenschaften, so zeigen sich die erblichen Variationen oft ganz kontinuierlich verbunden und ordnen sich um einen Mittelwert an, in ganz derselben Weise wie die Modifikationen (NILSSON-EHLE 1907). Die individuelle quantitative Variation von den Mutationen = Elementararten mit der Begründung abzutrennen, dass durch die erstere keine oder nur vorübergehende erbliche Unterschiede aufgebaut werden können, muss daher als unrichtig bezeichnet werden. Die individuelle, quantitative, fluktuierend-kontinuierliche Variation enthält teils erbliche quantitative Variationen, teils Modifikationen. Von den ersteren liegt



kein Grund vor anzunehmen, dass sie nicht ebenso vollständig erblich sein sollten wie die qualitativen Unterschiede, und bei den individuellen stets vorhandenen Modifikationen ist überhaupt bis jetzt gar keine echte Erblichkeit sicher nachgewiesen worden (JOHANNSEN 1903).

Aber auch gegen die Annahme, dass bei quantitativen Eigenschaften die erbliche Variation aus einer begrenzten Zahl, allerdings nur am Mittelcharakter erkennbarer, durch »Linienmutation« entstandener Typen oder Linien bestehen sollte, müssen dieselben Einwände gehoben werden. Wenn, wie anfangs hervorgehoben, die quantitative erbliche Variation durch verschiedene Kombination einer relativ geringen Zahl mendelnder Erbeinheiten zustandekommt, dann entsprechen die konstanten Linien (bei überwiegend selbstbestäubenden Pflanzen) den homozygotischen Konstruktionen. Man kann also nicht mehr sagen, dass diese Linien ebensovielen Mutationen entsprechen, sondern die Frage wird, wie die relativ wenigen, den zahlreichen Abstufungen oder Linien zu grunde liegenden Erbeinheiten entstehen. Man muss ferner mit der Möglichkeit rechnen, dass die auf dieser Weise gebildete erbliche Variation ganz kontinuierlich sei. Bei Untersuchung einer fluktuierenden kontinuierlichen Variation muss es deshalb unrichtig sein, schon aus dem Charakter derselben im vornherein zu schliessen, dass dieselbe nur oder überwiegend aus Fluktuationen nicht erblicher Art bestehe. Nur die nähere Analyse kann zeigen, wie sich Modifikation und erbliche Variation an dem Zustandekommen der Variation im Ganzen beteiligen. Natürlich ist es, sobald Selbstbestäubung möglich ist, leicht denkbar, dass in der Natur oder auf künstliche Weise homozygotische Kombinationen, Linien, isoliert werden können, die dann jede für sich in ihrer Nachkommenschaft nur Modifikationsfluktuation ergibt, wie vor allem die bekannten Untersuchungen JOHANNSENS zeigen. Eine andere Sache ist aber, dass verschiedene Kombinationen eine kontinuierliche Serie bilden können. Schon bei der Untersuchung von Populationen überwiegend selbstbestäubender Getreidearten, wie Hafer, kann wie gesagt der Fall vorkommen, dass die erblichen Unterschiede, die in einem solchen Falle wohl hauptsächlich homozygotischer Natur sind, kontinuierlich scheinen und dabei auch eine Gruppierung um ein Mittel wie gewöhnliche Modifikationsfluktuationen deutlich erkennen lassen. Eine noch weiter gehende Kontinuität muss aber die erbliche Variation bei einer normal kreuzbefruchtenden Population zeigen (bei derselben Zahl differierender Einheiten innerhalb der Population), wo auch die heterozygotischen Stadien, die wenigstens sehr oft intermediäre Stufen repräsentieren, ununterbrochen realisiert werden.

In bezug auf die Tatsachen der Kreuzungsanalyse, die auf das Vorhandensein einer Kontinuität der erblichen Variation hinzeigen, wurde schon im Teil I meiner Kreuzungsuntersuchungen hervorgehoben, dass verschiedene gleichsinnige Einheiten etwa dieselbe oder eine so wenig verschiedene Wirkung haben konnten, dass schon die verschiedenen monomeren Individuen (z. B. bei der roten Kornfarbe des Weizens  $R_1 r_2 r_3$ ,  $r_1 R_2 r_3$ ,  $r_1 r_2 R_3$ ) eine kontinuierliche Variation bildeten, und weiter auch darauf hingewiesen, wie die durch Kombination dieser gleichsinnigen Faktoren



gebildete Variation dann noch um so vollständiger kontinuierlich sein müsse, vor allem wenn sowohl die homozygote als die heterozygote Variation in Betracht komme. Wenn man trotzdem für diese Art von Variation den Begriff kontinuierlich nicht brauchen will, dann muss der Begriff kontinuierlich überhaupt einfach vom Denken ausgeschlossen werden, denn ebensowenig lässt er sich dann für die durch Kombinationen von Aussenfaktoren bewirkte stetig vorhandene Modifikationsfluktuation anwenden.

Wir werden nun im Folgenden beständig Fälle sehen, wo Linien, die etwa dieselbe äussere Abstufung darstellen, sich bei Kreuzung als ganz verschiedene Kombinationen erweisen, indem sie eine lange Reihe von Abstufungen abspalten können, die sogar weit ausserhalb der Grenzen der Eltern liegen. Da es natürlich höchst unwahrscheinlich ist, dass ganz verschiedene Kombinationen von Erbeinheiten gerade dieselbe äussere Abstufung bewirken, muss man zu dem Schlusse gelangen, dass die wirklichen Abstufungen noch viel zahlreicher sind, als was mit den äusseren Beobachtungsmitteln, Messung, Wägung usw., sicher festgestellt werden kann, was eben am besten klarlegt, was mit dem Begriff Kontinuität der erblichen Variation hier gemeint wird. Wenn schon die äussere, rein empirische Bestandsanalyse eine Kontinuität der erblichen Variation bei manchen Eigenschaften hat feststellen können, so wird dies also durch die Kreuzungsanalyse auf verschiedene Weisen nur noch weiter bestätigt, und man gelangt dadurch sogar manchmal zur Annahme einer noch weit feineren Kontinuität, als was durch die besten äusseren empirischen Untersuchungsmethoden konstatiert werden kann.

Der nur äusserlich deskriptive Elementarart-, Typus- oder Linienbegriff kann somit als Einheitsbegriff überhaupt nur ein vorübergehender sein<sup>1</sup>, der bei der Analyse nicht weit reicht; die wirkliche Analyse muss bei den quantitativen Eigenschaften wie sonst die Frage von den Erbeinheiten und deren Kombinationen aufnehmen.

Als kurze Zusammenfassung des zuletzt erörterten Themas der erblichen Variation bei den Getreidearten liesse sich denn Folgendes sagen:

Aus der Unmenge von Kombinationsmöglichkeiten schon bei einer relativ geringen Anzahl von Faktoren und dem äusserlichen Zusammenfliessen der Kombinationen, so dass verschiedene Kombinationen nicht unterschieden werden können, geht genügend deutlich hervor, dass man die erbliche Variation unmöglich in der Form einer Anzahl äusserlich distinkter Elementararten und auch nicht in der Form einer bestimmten Zahl von feiner charakterisierten Linien darstellen kann. Besonders bei normal oder häufig fremdbestäubenden Arten, wo es schon bei ziemlich geringer Faktorenzahl leicht vorkommen kann, dass man in einer Population zwei sicher identische Individuen nicht findet und dass die erbliche Variation möglichst kontinuierlich wird, ist dies ganz auffällig.

Im Gegenteil ist die alte Auffassung einer wirklich individuellen, fluktuierenden, zu distinkten erblichen Veränderungen durch Auswahl allmählich führenden Variation

---

<sup>1</sup> Dasselbe wird vielleicht einmal auch mit dem Erbeinheitsbegriff der Fall werden.

offenbar deshalb festzuhalten, weil es bei vielen alten Rassen infolge der überaus grossen Zahl von Kombinationsmöglichkeiten tatsächlich nicht leicht sein kann, zwei Individuen zu finden, die ganz dieselbe Kombination darstellen, und weil durch Umgruppierungen der Einheiten verschiedener Individuen erbliche Veränderungen in bestimmten Richtungen möglich sind. Die Entdeckungen MENDELS haben aber bezüglich der Deutungsweise und Vererblichkeit dieser individuellen fluktuierenden Variation ganz neue Gesichtspunkte eröffnet, indem im Lichte der mendelistischen Tatsachen die kleine individuelle Variation nicht mehr als eine stetig vorhandene Tendenz zur Abänderung, sondern in erster Linie als eine Kombinationsvariation erscheint.

Im Anschluss an dem jetzt Gesagten mag auch die Variationsterminologie, die in der folgenden Darstellung gebraucht werden wird, etwas erörtert werden. In der Literatur wird die Variation in der letzteren Zeit oft in folgender Weise eingeteilt:

1. Fluktuation.
2. Mutation.

Ich finde aber diese Einteilung wenig zutreffend. Einerseits kann man nämlich, nach dem oben Angeführten, auch wenn man Mutationen als Grundlage der erblichen Variation annimmt, nicht die erblichen Variationen mit Mutationen identifizieren. Die erblichen Variationen sind Kombinationen einer relativ geringen Zahl von Einheiten, vielfach zahlreicher als diese und demnach in einem ganz anderen Sinne aufzufassen als die, event. durch Mutation entstandenen, Einheiten selbst. Andererseits fallen unter dem Begriffe fluktuierender Variation, so wie diese allgemein aufgefasst wird als Schwankung in dem Ausmasse einzelner Eigenschaften, sowohl Variationen erblicher Art als auch Modifikationen.

Als die richtige Einteilung erscheint denn vielmehr die am Anfang erörterte, auch von BAUR in seiner Einführung in die Erblchkeitslehre (1911) und von FRUWIRTH (1911) durchgeführte, nämlich in:

1. Nicht erbliche Modifikation <sup>1</sup>.
2. Erbliche Variation.

Man hätte dann bei individuellen, kontinuierlichen Abänderungen zu unterscheiden zwischen:

- a. individuelle, kontinuierliche Modifikation,
- b. individuelle, kontinuierliche Variation,

und da bei den allogamen Organismen durch die stetige Umgruppierung der

---

<sup>1</sup> Ob es eine individuelle nicht erbliche Fluktuation gibt, die nicht von Modifikationsnatur ist, bleibt noch zu entscheiden. Unmöglich ist es natürlich keineswegs, dass die vielen Einheiten in verschiedener Weise auf einander influieren bei verschiedenen Individuen auch unter gleichbleibenden äusseren Bedingungen. Die Schwierigkeit, die Sache zu untersuchen, liegt jedoch darin, dass »gleiche äussere Verhältnisse« in Wirklichkeit eine Abstraktion sind. Auch auf demselben Beete, wo die Körner in derselben Tiefe, Entfernung usw. gelegt werden, wird man niemals ganz gleiche Bedingungen für verschiedene Körner herbeiführen können, weder in bezug auf Feuchtigkeit, Nahrung, noch auf Verhalten gegen andere (schädliche oder nützliche) Organismen u. a. Auch wenn man die Pflanzen in Nährlösungen kultiviert, bleibt doch übrig, z. B. das verschiedene Verhalten der Samen bezüglich Keim Schnelligkeit usw. zu berücksichtigen bzw. zu eliminieren.



Einheiten gewissermassen eine fortwährende Fluktuation der quantitativen Eigenschaften stattfindet, hier auch zwischen:

- a. fluktuierende Modifikation.
- b. fluktuierende Variation<sup>1</sup>.

Demnach müssen wir bei den Plus- und Minusfluktuationen unterscheiden:

- a. Plus- und Minusmodifikationen.
- b. Plus- und Minusvariationen.

Diejenige Definition, welche zwischen Modifikation und erbliche Variation statt zwischen Fluktuation und Mutation unterscheidet, hat auch den Vorteil, dass sie die Entstehungsweise der der erblichen Variation zu grunde liegenden Einheiten, ob diese zuletzt durch Mutation oder nicht zustandekommen, ganz unberücksichtigt lässt und nur das tatsächlich existierende Verhältnis angibt<sup>2</sup>.

Man kann wohl sagen, dass diese Trennungsweise zwischen Modifikation und erblicher Variation eigentlich die tiefsten Ahnen hat, indem sie bei den meisten, auch älteren Beobachtern der Formenunterschiede, wenigstens auf dem botanischen Gebiete, mehr oder weniger deutlich zum Ausdruck kommt, und auch vielfach in unbewusster, so zu sagen instinktiver Weise die beschreibende, systematische Gliederung engerer Formenkreise beherrscht, wenn man auch freilich andererseits bei manchen Systematikern nachweisen kann, dass Modifikationsdifferenzen in grosser Ausdehnung aufgenommen und mit Namen belegt worden sind.

Das Verständnis dieser Sache scheint hauptsächlich durch zwei in entgegengesetzten Richtungen gehende extreme Vorstellungen gehindert worden zu sein:

a) einerseits waren früher wohl Standortsmodifikationen (wozu natürlich sensu latiore auch Klimamodifikationen gerechnet werden können) bekannt genug, aber dass auf demselben Platz wachsende Individuen wenn auch kleinere jedoch oft ziemlich starke Modifikationsabänderungen zeigen können, weil auch auf demselben Beete die äusseren Verhältnisse infolge vieler Umstände für verschiedene Individuen nicht gleich sein können, das wurde oft nicht klar genug eingesehen. Daher die Folgerung, dass die individuelle Variation auf demselben Platz ausschliesslich oder überwiegend endogener, erblicher oder allmählich erblich werdender Natur sei. In Übereinstimmung damit wurde auch vielfach ein bestimmter Unterschied gemacht zwischen Modifikation einerseits und individuelle Variation andererseits. Auch in neueren Werken kommt diese ältere Auffassung bisweilen noch zum ge-

---

<sup>1</sup> In dem Sinne sagt auch BAUR (1908, S. 289): »Mit anderen Worten, wir gehen wohl nicht fehl, wenn wir annehmen, dass bei allogamen Organismen die sogenannte individuelle oder fluktuierende Variation zum grössten Teil auf Bastardspaltung und fortwährender kaleidoskopartiger Neukombination von mendelnden Erbeinheiten beruht».

<sup>2</sup> Der Unterschied zwischen Modifikation und erblicher Variation muss natürlich gemacht werden, weil er tatsächlich vorhanden ist, und solange eine Erbllichkeit der von äusseren Verhältnissen verursachten Modifikationsschwankungen nicht sicher erwiesen ist. Wie aber der Unterschied zustandekommt, ob es einen grundsätzlichen Unterschied zwischen den beiden Arten von Variation gibt, ist damit nicht beantwortet und kann auch nicht beantwortet werden, so lange nichts sicheres über die wirkliche Natur der Einheiten und über deren Entstehen bekannt ist.



wissen Vorschein. Da diese individuelle Variation als einheitliche Gruppe dargestellt wurde, wurde auch (bei dieser Auffassung) vielfach eine prinzipielle Grenze gezogen zwischen individuelle, kontinuierliche Variation und grössere diskontinuierliche Abänderungen, »single variations«, und die Bedeutung der letzteren für die Artbildung verneint oder wenigstens sehr in Zweifel gestellt, während die individuelle Variation das einzige oder hauptsächliche Material für die Umbildung oder Neubildung darstellen sollte.

b) andererseits hat DE VRIES in seiner Mutationstheorie gewissermassen das entgegengesetzte Extrem vertreten, indem er die individuelle, fluktuierende Abänderlichkeit im Ganzen für belanglos hält und eine bestimmte Grenze zwischen die überall vorhandenen Fluktuationen und die relativ seltenen Mutationen zieht. Diese Auffassung ist schon oben kritiziert worden. Dadurch wurde wohl die Unrichtigkeit der alten Auffassung, dass alle kleinen fluktuierenden Variationen von Bedeutung wären, wie es wohl am schärfsten WALLACE geltend gemacht hatte, genügend betont und die Rolle äusserer Umstände, vor allem der Ernährung im weitesten Sinne des Wortes, beim Zustandekommen der Fluktuation besser eingeschätzt. Andererseits wurde aber, weil die Grenze von DE VRIES zwischen kontinuierliche Fluktuation und diskontinuierliche Mutation gezogen wurde, eine Menge kleiner erblicher Variationen mit den Modifikationsfluktuationen unrichtiger Weise zusammengeschlagen, so in den Kapiteln über die Getreidearten, die Zuckerrübe usw.

Die jetzt skizzierte mendelistische Auffassung der Variation hält also an einer kontinuierlichen fluktuierenden Variation erblicher Art fest und betrachtet dieselbe, wenigstens in erster Linie, als eine Kombinationsvariation, verneint aber damit selbstverständlich nicht das Vorkommen und die Bedeutung diskontinuierlicher Variationen. Sie macht nur geltend, dass die erbliche Variation auch unter Umständen ganz kontinuierlich sein kann. In Übereinstimmung damit zieht diese mendelistische Betrachtungsweise auch keine scharfe Grenze zwischen kontinuierliche und diskontinuierliche Variation, da die beiden Arten von Variation durch vielfache Übergänge mit einander verbunden sind. An solche Fälle, wo in einer Population sehr zahlreiche kleine Gradationen einer Eigenschaft unterschieden werden können und vom einen Extreme zum anderen sämtlich scheinbar fliegend in einander übergehen (z. B. bei der Spelzenlänge beim Hafer<sup>1</sup>; schematisch illustriert am nebenstehenden Bild, Reihe 1), schliessen sich andere Fälle, wo die Reihe mehr lückenhaft ist, indem die Gradationen stellenweise nicht so zahlreich und mehr getrennt sind (wie bei der Begrannung der Propsteierhafer-population<sup>1</sup>); etwa wie auf Reihe 2 des Bildes), oder Fälle, wo von einer Reihe mehr nahestehender Abstufungen eine stark verschiedene Abstufung scharf abgegliedert ist (Reihe 3), wie bei der Höhe der Erbsenrassen. Sicherlich lassen

1. . . . .
2. . . . .
3. . . . .

<sup>1</sup> Vgl. meine Variationsuntersuchungen beim Hafer (1907).

sich bei der erblichen Variation viele andersartige Fälle unterscheiden, durch welche diskontinuierliche und kontinuierliche Variation, single variations und kleine individuelle Variationen, verbunden werden, und welche dieselben als nur Graddifferenzen derselben Sache erscheinen lassen<sup>1</sup>. Zuletzt können natürlich, wenn man so will, alle Gradationen diskontinuierlich genannt werden. Die Benennung kontinuierlich sagt selbstverständlich nur aus, dass die Abstufungen so fliegend in einander übergehen, dass eine sichere Unterscheidung derselben, mit den uns zu Gebote stehenden Mitteln, nicht gemacht werden kann.

Ein wichtiger Unterschied zwischen den bei Individuen desselben Beetes auftretenden Modifikationsfluktuationen und den erblichen Variationen besteht also darin, dass diese Modifikationsfluktuationen stets kontinuierlich sind und dabei die gewöhnliche oder unter Umständen etwas abgeänderte normale Zufallskurve zeigen, während die erblichen Variationen unter Umständen kontinuierlich sein können aber nicht zu sein brauchen, und dass sie sowohl bei kontinuierlichem als diskontinuierlichem Charakter der Variation eine mehr oder weniger unregelmässige Verteilung zeigen können. Einerseits ist es ja leicht verständlich, dass durch Auswahl oder Isolation aus einer kontinuierlichen Reihe, wenn diese in Übereinstimmung mit der mendelistischen Auffassung durch Kombination zustandekommt, diskontinuierliche Differenzen entstehen können, während durch Kreuzung solcher diskontinuierlich getrennten Typen die kontinuierliche Reihe wieder hergestellt werden kann. Andererseits gibt es ja, wenigstens scheinbar, stärker und schwächer diskontinuierlich wirkende Faktoren, wie es die mendelistische Analyse genügend gezeigt hat, und durch verschiedene Kombinationen ganz ungleich wirkender Faktoren ist selbstverständlich nicht eine regelmässige Verteilung der Varianten zu erwarten. Aus allen diesen Gründen ist es erklärlich, dass bei Untersuchung von Populationen, vor allem wo die Homozygoten infolge allgemein vorkommender Selbstbestäubung überwiegen, die erbliche Variation, sogar bei kontinuierlichem Charakter, eine andere, mehr unregelmässige Verteilung als die kontinuierliche Modifikation zeigen kann.

Bei Mischung von Modifikationen und erblichen Variationen hat JOHANNSEN (1903) eine gewöhnliche normale Kurve finden können, was zeigt, dass man nicht aus einem solchen Verhalten auf eine Einheitlichkeit in der Art von Variation schliessen darf. Ist die Kurve der erblichen Variationen von derselben oder annähernd derselben Art wie die Modifikationskurve, so liegt nichts befremdendes darin,

---

<sup>1</sup> Unter solchen Umständen finde ich es aus theoretischem Gesichtspunkte wenig zweckmässig, eine Einteilung der Variation in grosse und kleine Variation durchzuführen, da sowohl scharfe Grenzen als prinzipieller Gegensatz zwischen grosser und kleiner Variabilität fehlen, was ja eben schon direkt mit der Natur der Variation als Kombinationsvariation zusammenhängt. Von der Frage der Kontinuität oder Diskontinuität der Kombinationsvariation wird man eher zu der Frage übergehen müssen, wie die der Variation zugrunde liegenden Erbeinheiten sich in bezug auf Kontinuität oder Diskontinuität in ihrer Wirkung verhalten. Jedoch bin ich natürlich ganz derselben Ansicht wie FRUWIRTH (1911), insofern es sich darum handelt, durch Unterscheidung grosser und kleiner Variation die Aufmerksamkeit der praktischen Züchter nicht nur auf die grossen, auffallenden Differenzen, sondern auch auf die kleineren zu richten, besonders in einer Zeit, wo die kleineren Differenzen als nichtswertig erklärt worden sind.



dass die gemischte Kurve auch die gleiche bleibt. Ist dagegen die erbliche Variation unregelmässig, so wird sich dies auch in der gemischten Kurve zeigen können. Es liegt demnach kein Grund vor, aus dem Vorhandensein einer normalen Frequenzkurve den Schluss zu ziehen, dass dann nur unwesentliche Modifikationsfluktuationen vorhanden seien, und auch nicht, dass darin nur wenige nahestehende Typen stecken. Die Möglichkeit muss auch erwägt werden, dass die erbliche Variation an und für sich eine normale Frequenzkurve bildet, weil sie ebenso wie die Modifikation in einer Menge Abstufungen auftritt, von denen die intermediären am zahlreichsten sind. Eben z. B. bei der Körperlänge des Menschen (wobei QUETELET das bekannte Gesetz ermittelte) muss man mit dieser Möglichkeit rechnen, die ich in diesem Falle geradezu als sehr wahrscheinlich bezeichnen möchte.

Ebensowie eine, der normalen Frequenzkurve gemäss, regelmässig verteilte Variation durch Kombination einer Reihe gleichsinniger Faktoren entstehen kann, weil die Kombinationen mit intermediärer Einheitszahl am zahlreichsten sind, wie ich 1908 ausgeführt habe (1908, S. 272), ebenso lässt sich eine mehr oder weniger unregelmässig verteilte Variation erwarten, sobald die Faktoren teilweise oder sämtlich ungleiche Wirkung haben.

Man sieht also, dass die Erklärung der quantitativen, kontinuierlichen Variation als eine mendelsche, auf Grundlage verschiedener, etwa gleich oder auch ungleich wirkender Faktoren zustandekommende Kombinationsvariation, den Tatsachen am besten Rechnung trägt.

Wenn also, was allerdings durch die folgende Darstellung immer sicherer bewiesen werden wird, ein Zweifel kaum mehr bestehen kann, dass die kontinuierliche, quantitative Variation eine Kombinationsvariation im mendelschen Sinne darstellt, wobei eine grosse Menge Abstufungen von einer relativ geringen Anzahl von Faktoren gebildet werden, so sind wir jedoch bei der näheren Analyse dieser zugrunde liegenden Faktoren meistens noch nicht weit gekommen.

Die Beurteilung der Spaltung quantitativer Merkmale wird in erster Linie dadurch erschwert, dass die Modifikationsabänderungen, sowohl die individuellen als sogar die partiellen, im Verhältnis zu den erblichen Differenzen sehr gross sein können. Das leitende Prinzip bei meinen Untersuchungen ist deshalb vom Anfang an gewesen, die Spaltung der  $F_2$  nach den Durchschnittswerten der  $F_3$ -Parzellen zu beurteilen, indem die sämtlichen  $F_2$ -Pflanzen separat vermehrt wurden.

Schon 1901 habe ich in bezug auf Winterfestigkeit hervorgehoben, dass die Modifikationsabänderungen weit grösser als die erblichen Differenzen sein können, und dass deshalb nur die Prüfung der Nachkommenschaft einer Pflanze und der Vergleich mit Nachkommenschaften anderer Pflanzen den relativen erblichen Charakter mit Bezug auf Winterfestigkeit zeigen könne. Aus diesem Gesichtspunkte habe ich auch von 1901 aus die Analyse sowohl alter Rassen als auch Kreuzungen durchgeführt indem eine möglichst grosse Anzahl von Individuen (bei Kreuzungen



sämtliche  $F_2$ -Pflanzen), ganz abgesehen davon, ob diese verschieden oder gleich waren, separat vermehrt und auf den durchschnittlichen Charakter ihrer Nachkommenschaft untersucht wurden (1901, 1907).

Zunächst habe ich mich aber dann damit müssen begnügen lassen, den einfachen Durchschnittswert der  $F_3$ -Parzellen zu ermitteln, da es bei einer grossen Anzahl von  $F_3$ -Pflanzen anfangs als eine ganz unübersehbare Arbeit erschien, vor allem bei Merkmalen, die schon partiell stark fluktuieren, wie Länge der Spelzen und Begrannung des Hafers, erst den Mittelwert jeder einzelnen Pflanze und dann den Mittelwert der sämtlichen Pflanzen zu bestimmen. Ich habe deshalb beim Feststellen der Bildung von Abstufungen bei der Spaltung, die ausserhalb der Grenze der Eltern liegen, zunächst den einfacheren Weg gewählt, die  $F_3$ -Parzellen mit niedrigerem oder höherem Durchschnittswert als bei den Eltern nochmals ein anderes Jahr auszusäen, wobei im Falle parallelen Verhaltens die Erblichkeit des überschreitenden Charakters ganz zweifellos erscheint (vgl. 1908, S. 277—286). In dieser einfachen Weise hat sich jedenfalls die Regelmässigkeit des Bildens solcher transgressiven Abstufungen bei meinen zahlreichen Kreuzungen ohne besonders grosse Schwierigkeit feststellen lassen, und eine nicht unwichtige Orientierung in der Frage war wenigstens damit gewonnen. Später wurde aber auch, zur besseren Durchführung der Analyse, der mittlere Wert jeder einzelnen Pflanze der  $F_3$ -Parzellen bestimmt. In diesem Teil wird im Kapitel Ähreninternodienlänge des Weizens eine solche Analyse von  $F_3$ -Parzellen gegeben.

Bei den Eigenschaften Resistenz gegen Gelbrost und Winterfestigkeit, wo der Charakter der Pflanze natürlich keiner genauen Messung, sondern nur okulärer Schätzung unterworfen werden kann, wurde überhaupt nur der mittlere Charakter jeder Parzelle geschätzt; trotzdem lassen sich auch aus diesen Untersuchungen, besonders weil das untersuchte Material ziemlich gross war und sehr übereinstimmende Resultate bei verschiedenen Kreuzungen gewonnen wurden, gewisse Schlüsse ziehen.

Die Untersuchung der Faktoren quantitativer Merkmale wird ferner bei allen solchen Eigenschaften besonders erschwert, wo es keine Formen gibt, bei denen die Eigenschaft vollständig fehlt. Im Teil I meiner Kreuzungsuntersuchungen konnte die Anzahl der auf die quantitative Ausbildung einer Eigenschaft, z. B. roter Farbe, Ligula usw., einwirkenden Faktoren dadurch ermittelt werden, dass die betreffenden Formen mit ganz negativen Formen gekreuzt wurden, d. h. rote mit weissen, wo die rote Farbe vollständig fehlt, ligulatragende mit vollständig ligulalosen usw.,

Wenn aber nur verschiedene Abstufungen der roten Farbe mit einander gekreuzt worden wären, dann hätten hier ganz dieselben Schwierigkeiten zur genauen Ermittlung der Faktoren existiert wie sonst. Z. B. bei Kreuzung:

$$R_1 \ R_2 \ r_3 \times R_1 \ r_2 \ R_3$$

hätte man wohl eine Spaltung in der Nachkommenschaft sehen können und vielleicht auch die Bildung von Abstufungen, stärker rot ( $R_1 \ R_2 \ R_3$ ) oder schwächer

rot ( $R_1 r_2 r_3$ ) als bei den Eltern, aber eine genaue Ermittlung der Faktoren wäre unmöglich, weil die Spaltung, sobald ein gemeinsamer Rotfaktor (hier  $R_1$ ) vorhanden ist, nur verschiedene Nuancen von rot umfasst, welche man, wenn die erblichen Differenzen im Verhältnis zu den Modifikationsfluktuationen klein sind, nicht nach Zahlenverhältnissen gruppieren kann. Es sind Kreuzungen mit weiss notwendig, wobei man wenigstens sichere Zahlenverhältnisse rot: weiss bekommt, um die Anzahl der Rotfaktoren je nach der Spaltung 3:1, 15:1, 63:1 usw. zu bestimmen. Die weissen Sorten können also als Analysatoren gebraucht werden.

Ganz so wie bei Kreuzungen verschiedener Abstufungen von rot verhält es sich nun z. B. bei Kreuzungen verschiedener Abstufungen von Gelbrostresistenz. Die Spaltung ist überall ganz unverkennbar, aber die Anzahl der Faktoren lässt sich nicht ermitteln. Vorläufig sind nämlich in diesem Falle keine absolut resistenten Sorten bekannt, die als Analysatoren benutzt werden könnten, denn auch die aller resistentesten mir bekannten Sorten zeigen in starken Rostjahren etwas Rost. Ausserdem wäre eine Gruppierung nicht-resistent: resistent in diesem Falle schon aus dem Grunde meistens unmöglich durchzuführen, weil auch nicht-resistente Formen, sobald der Rost weniger stark auftritt, natürlich rostfrei bleiben können. Dass aber die Spaltung prinzipiell ganz derselben Art ist wie bei Kreuzung verschiedener Rotabstufungen, d. h. auf mendelnden Faktoren beruht, darüber kann kein Zweifel bestehen, wie es die folgende Darstellung näher zeigen wird.

Dass man bei Grössedifferenzen überhaupt nicht von rein negativen Stadien sprechen kann, ist selbstverständlich, da jede Form eine gewisse Grösse haben muss. Dass diskontinuierliche Grössedifferenzen ganz dasselbe Verhalten wie Farbendifferenzen zeigen, wurde ja schon von MENDEL erwiesen, der aber damit die kleineren, schwerer bestimmbaren, erblichen Differenzen gar nicht übersah, sondern ausdrücklich hervorhob, dass die Untersuchung der leichter bestimmbaren Differenzen nur den Ausgangspunkt bilden sollte. Wir werden nun im Folgenden sehen, wie auch kleine, ganz geringfügige Grössedifferenzen (bei der Ähreninternodienlänge des Weizens; vgl. Kap. 2), wenn auch nicht direkt durch Kreuzung wenig abweichender Abstufungen, sondern indirekt, durch Kreuzung der unter sich wenig abweichenden Abstufungen mit ganz anderen Abstufungen, sich analysieren und auf bestimmte mendelnde Faktoren zurückführen lassen. Für die Analyse der Grössefaktoren sind ferner zweifellos besonders Kreuzungen mit den extremsten Abstufungen hinein-zuziehen.

Meine Untersuchungen sind nun zwar bei den meisten quantitativen Eigenschaften noch nicht so weit gediehen, dass von solchen besonderen Gesichtspunkten aus eine vollständige Faktorenanalyse durchgeführt worden ist. Eine Klarlegung distinkter Faktoren ist bisher nur teilweise gelungen.

Wenn ich aber trotzdem schon eine Darstellung der bis jetzt gewonnenen Tatsachen für angezeigt halte, so beruht dies darauf, dass im Laufe der Jahre ein grosses Material gesammelt worden ist, das nicht nur durch übereinstimmendes Verhalten bei verschiedenen Eigenschaften und bei verschiedenen Kreuzungen ganz un-



bedingt zu dem allgemeinwichtigen Schluss führt, dass die kontinuierliche erbliche Variation ebenso wie die diskontinuierliche eine Kombinationsvariation im mendelschen Sinne darstelle, und dabei auch den durchgreifenden Unterschied zwischen den äusseren zu beobachtenden bzw. zu messenden Eigenschaften und der inneren Faktorengrundlage überall zum Ausdruck bringt, sondern auch durch seinen Umfang für die fortgesetzte Forschung orientierend wirken und die Wege angeben kann, die diese einzuschlagen habe, um eine nähere Faktorenanalyse durchführen zu können.

Auch der Nachweis, dass für das Zustandekommen einer kontinuierlichen Variation sowohl gleichsinnige Faktoren als ganz verschiedene Faktoren (vgl. das Kapitel Ähreninternodienlänge des Weizens) zusammenwirken, und dass solche Faktoren wie z. B. Farbfaktoren auf die quantitative Ausbildung ganz anderer Eigenschaften einen bestimmten Einfluss haben können, scheint mir zur Veröffentlichung der damit in Zusammenhang stehenden Tatsachen zu berechtigen.

Es konnte jedoch auch in diesen Teil noch bei weitem nicht das ganze Material aufgenommen werden. Die vollständigen Untersuchungen mehrerer noch nicht oder nur vorläufig behandelten Eigenschaften beim Weizen und Hafer können erst später veröffentlicht werden. Von physiologischen Eigenschaften wird hier die Resistenz gegen Gelbrost aufgenommen; über Winterfestigkeit und Entwicklungszeit liegt jedoch jetzt auch noch eine ausführlichere Darstellung fertig, die in den Publikationen des vierten internationalen Kongresses für Genetik in Paris 1911 erscheinen wird.



## Literaturverzeichnis zu der Einleitung.

- BAUR, E. .... 1907: Referat in Bot. Zeit. 1907, S. 351.  
 1908: Einige Ergebnisse der experimentellen Vererbungslehre. Beihefte zur Medizin. Klinik 1908, S. 265.  
 1911: Einführung in die experimentelle Vererbungslehre. Berlin 1911.
- CORRENS, C. .... 1901: Bastarde zwischen Maisrassen etc. Bibliotheca botanica. Heft 53. 1901.
- EAST, E. M. .... 1910: A mendelian interpretation of variation, that is apparently continuous. The Americ. Natural. 1910, S. 65.
- FRUWIRTH, C. .... 1911: Über Variabilität und Modifikabilität. Zeitschr. f. indukt. Abst. u. Vererbungslehre, Bd. V, 1911, S. 18.
- GROSS, J. .... 1906: Über einige Beziehungen zwischen Vererbung und Variation. Biol. Centralbl. 1906, S. 395, 508, 545.  
 1911: Über Vererbung und Artbildung. Ibid. 1911, S. 161, 193.
- JOHANNSEN, W. ... 1903: Über Erblichkeit in Populationen und in reinen Linien. Jena 1903.
- LANG, A. .... 1910: Die Erblichkeitsverhältnisse der Ohrenlänge der Kaninchen nach Castle und das Problem der intermediären Vererbung und Bildung konstanter Bastardrassen. Zeitschr. f. indukt. Abst. u. Vererbungslehre, Bd. IV, 1910, S. 1.  
 1911: Fortgesetzte Vererbungsstudien. Ibid. Bd. V, 1911, S. 97.
- NILSSON-EHLE, H. 1901: Sammanställning af höstvetesorternas vinterhärdighet å Svalöfs försöksfält åren 1898—1899 och 1900—1901. Zusammenstellung der Winterfestigkeit der Winterweizensorten auf den Svalöfer Versuchsfeldern der Jahre 1898—1899 und 1900—1901. Sveriges Utsädesfören. Tidskr. 1901, S. 154. Ref. in Journal f. Landwirtsch. 1908, S. 292.  
 1907: Om lifstyper och individuell variation. Über Lebensstypen und individuelle Variation. Botan. Notiser 1907, S. 113. Ref. in Journal f. Landwirtsch. 1908, S. 294.  
 1908: Einige Ergebnisse von Kreuzungen bei Hafer und Weizen. Botan. Notiser 1908, S. 257.  
 1909: Kreuzungsuntersuchungen an Hafer und Weizen. (Teil I). Lunds Universitets Årsskrift, N. F., Afd. 2, Bd. 5, Nr. 2. Lund 1909.
- TAMMES, TINE. .... 1911: Das Verhalten fluktuierend variierender Merkmale bei der Bastardierung. Recueil des travaux botaniques Néerlandais, Vol. VIII, Livr. 3, 1911, S. 201.
- DE VRIES, H. .... 1906: Ältere und neuere Selektionsmethoden. Biol. Centralbl. 1906, S. 385. — Elementary species in agriculture. Proceed. Americ. Phil. Soc., Vol. XLV, 1906, S. 149.

## Kap. I. Kornfarbe des Weizens.

Im ersten Teil meiner Kreuzungsuntersuchungen (S. 67) sind fünf verschiedene Kreuzungen zwischen rot- und weisskörnigen Sorten angeführt. Von diesen zeigten drei, mit den roten Eltern 0401, 0203 (Extra-Squarehead) und 0235, in  $F_2$  die einfache Spaltung 3 rot : 1 weiss. Diese roten Sorten (oder richtiger ihre zur Befruchtung gelangten Gameten) besitzen demnach nur eine Einheit für die rote Farbe. Dagegen zeigte sich der Schwed. Sammetweizen nach den Spaltungszahlen in  $F_2$  und  $F_3$  im Besitz von drei selbständigen Einheiten für die rote Farbe. Auch bei der Linie 0501, Grenadierweizen, liess die  $F_2$ -Spaltung der Kreuzung 0501  $\times$  0704, 55 rot : 1 weiss, die mit dem Verhältnisse 63 : 1 am nächsten übereinstimmt, auf drei Farbeinheiten schliessen.

Seitdem ist eine Reihe neuer Ergebnisse gewonnen, die das Vorkommen mehrerer selbständigen Einheiten für die rote Kornfarbe des Weizens noch mehr bestätigen. 1909 wurde die  $F_2$  von sechs Kreuzungen mit folgendem Resultate untersucht :

♀	♂								
0307 weiss	$\times$ 0501 rot.	$F_2$ .	58 rot, 0 weiss						
0307 »	$\times$ 0290 »	»	85 » 6 »	= 14,2	rot : 1 weiss				
Schwed. Binkel rot	$\times$ 0315 weiss.	A) 47 » 7 »	= 6,7 » 1 »						
» » »	$\times$ » »	B) 88 » 6 »	= 14,7 » 1 »						
0307 weiss	$\times$ 0406 rot.	» 114 » 7 »	= 16,3 » 1 »						
0406 rot	$\times$ 0705 weiss.	» 34 » 3 »	= 11,3 » 1 »						
0406 »	$\times$ 0234 rot.	» 52 » 5 »	= 10,4 » 1 »						

1910 wurden noch einige dergleichen Zahlen gewonnen:

♀	♂								
0290 rot	$\times$ Stand-up weiss.	$F_2$ ,	Linie A. 15 rot, 3 weiss,						
» »	$\times$ » »	»	B. 14 » 1 »						
» »	$\times$ » »	»	C. 20 » 2 »						
» »	$\times$ » »	»	D. 32 » 1 »						
0501 rot	$\times$ Stand-up weiss	»	A. 17 » 0 »						
» »	$\times$ » »	»	B. 5 » 0 »						

0307 weiss  $\times$  0501 rot. Die im Jahre 1909 gewonnenen Zahlen stehen in Übereinstimmung mit der früher auf Grund des Verhältnisses 55 rot:1 weiss bei der Kreuzung 0501  $\times$  0704 gemachten Annahme, dass bei der Linie 0501, Grenadier, drei Einheiten für die rote Farbe vorhanden seien. Da die Muttersorte 0307 weisskörnig ist, kann das Ausbleiben weisskörniger Individuen in  $F_2$  nicht dadurch gedeutet werden, dass die Kreuzung misslungen wäre; ausserdem spalten andere Merkmale deutlich. Das früher gewonnene Verhältnis 55 rot:1 weiss liegt zwar der Ratio 63:1 am nächsten, könnte aber auch als ein mehr selten eintreffender Fall der Spaltung 15:1 angesehen werden. Das Verhalten dieser Kreuzung vermehrt aber sehr die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei der Linie 0501 nicht zwei, sondern drei Einheiten für die rote Farbe vorhanden sind, ebenso wie bei dem Schwed. Sammetweizen. Erst durch die  $F_3$ , die vorläufig nicht angebaut werden konnte, ist jedoch eine sichere Auskunft zu erhalten.

0307 weiss  $\times$  0290 rot. Nach der  $F_2$ -Spaltung 14,2 rot:1 weiss sind bei dem befruchtenden Pollenkorn der 0290 zwei Einheiten für die rote Kornfarbe vorhanden. 0290, Extra-Squarehead II, ist aus einer Kreuzung 0203, Extra-Squarehead  $\times$  0501, Grenadier, gezüchtet. Da nach dem oben Gesagten 0203 eine Einheit, 0501 drei Einheiten für die rote Farbe besitzen, müssen in der Descendenz einer Kreuzung zwischen diesen Sorten auch Gametenkombinationen mit zwei Einheiten gebildet werden. Das Verhalten der 0290 bei dieser Kreuzung zeigt, dass solche Kombinationen auch tatsächlich gebildet worden sind. Aus anderen Gründen (intermediäres Verhalten mit Hinsicht auf die Luftkeimung des Korns) stellte ich im Teil I, S. 75 die Frage auf, ob nicht bei 0290 die intermediäre Einheitszahl vorhanden wäre, was durch diese Kreuzung wenigstens insofern bestätigt wird, als Gameten mit zwei Einheiten bei 0290 vorkommen.

Schwed. Binkelweizen rot  $\times$  0315 weiss. Die Linie B wurde in  $F_3$  vollständig verfolgt, indem sämtliche 94  $F_2$ -Pflanzen auf verschiedenen Reihen vermehrt wurden. Die folgenden Zahlen wurden dabei erhalten (1910):

$F_2$ -Pflanze		Spaltung in $F_3$		$F_2$ -Pflanze		Spaltung in $F_3$	
N:r	Farbe	rot	weiss	N:r	Farbe	rot	weiss
1	rot	27	2	16	rot	26	0
2	»	10	0	17	»	39	0
3	»	38	1	18	»	24	8
4	»	14	0	19	»	24	1
5	»	24	0	20	»	21	4
6	»	36	10	21	»	26	1
7	»	13	2	22	»	35	4
8	»	12	4	23	»	43	0
9	»	16	1	24	»	12	0
10	»	41	0	25	»	6	1
11	»	6	3	26	»	24	1
12	»	13	0	27	weiss	0	23
13	»	20	0	28	rot	23	8
14	weiss	0	10	29	»	30	0
15	»	0	12	30	»	14	0



$F_2$ -Pflanze		Spaltung in $F_3$		$F_2$ -Pflanze		Spaltung in $F_3$	
N:r	Farbe	rot	weiss	N:r	Farbe	rot	weiss
31	rot	24	6	63	rot	34	0
32	»	16	1	64	«	8	0
33	»	30	1	65	»	36	0
34	»	25	9	66	»	41	1
35	»	13	1	67	»	43	2
36	»	45	0	68	»	37	0
37	»	27	0	69	»	10	3
38	»	31	0	70	»	63	0
39	»	32	9	71	»	27	9
40	»	15	0	72	»	44	2
41	»	17	4	73	»	42	0
42	»	36	2	74	»	28	1
43	»	50	0	75	»	38	1
44	»	17	0	76	»	61	0
45	»	11	0	77	»	16	1
46	»	6	0	78	»	14	0
47	»	34	0	79	weiss	1	43
48	»	26	0	80	rot	23	0
49	»	26	8	81	»	33	8
50	»	8	0	82	»	55	4
51	»	12	1	83	»	10	5
52	weiss	2	5	84	»	41	0
53	»	0	23	85	»	26	4
54	rot	53	0	86	»	16	3
55	»	13	0	87	»	20	6
56	»	39	2	88	»	42	3
57	»	32	0	89	»	42	5
58	»	7	0	90	»	57	3
59	»	30	5	91	»	7	1
60	»	39	22	92	»	19	0
61	»	22	0	93	»	18	1
62	»	53	0	94	»	29	4

Die kleine Zahl der Pflanzen in den  $F_3$ -Reihen gestattet zwar nicht immer eine sichere Beurteilung des Spaltungsverhältnisses. Bei zwei Einheiten sollen von 15 Pflanzen 7 konstante Nachkommenschaft ergeben; 4 werden im Verhältnisse 15 rot : 1 weiss, 4 im Verhältnisse 3 rot : 1 weiss aufspalten. Die Spaltung 3 : 1 ist bei einer grossen Anzahl von Parzellen deutlich vorhanden (n:r 6, 7, 8, 11, 18, 20, 25, 28, 31, 34, 39, 41, 49, 69, 71, 81, 83, 86, 87); vielleicht gehören hierher auch N:r 59, 60, 85, 91. Die gesamte Individuenzahl dieser Parzellen ist 483 rot, 142 weiss = 3.4 rot : 1 weiss. Dagegen dürfte bei N:r 1, 3, 9, 19, 21, 22, 26, 32, 33, 35, 42, 51, 56, 66, 67, 72, 74, 75, 77, 82, 88, 89, 90, 93, 94 wohl überall die Spaltung 15 : 1 vorhanden sein. Die Individuenzahl dieser Parzellen ist 789 rot, 47 weiss = 16.8 rot : 1 weiss. 40 Parzellen sind konstant rot; unter diesen dürften jedoch vielleicht einige mit geringer Individuenzahl den im Verhältnisse 15 : 1 spaltenden zugehören.

Unter den Nachkommenschaften weisser  $F_2$ -Pflanzen sind nicht alle konstant weiss; N:r 52 und 71 enthalten auch rote Pflanzen (wohl Viziisten).

Zwischen den erwarteten und den gefundenen Zahlen ergibt sich, unter der Voraussetzung, dass die oben gemachte Gruppierung richtig ist, folgende Übereinstimmung:

		Gefunden	Theoretisch erwartet
$F_3$ -Parzellen	Konstant rot	40 6.8	7
	Spaltend 15 rot : 1 weiss	25 4.3	4
	» 3 rot : 1 weiss	23 3.9	4
	Konstant weiss (von den Vizinisten abgesehen)	6 1.0	1

Auch wenn die hier durchgeführte Begrenzung der drei ersten Gruppen nur annähernd richtig ist, indem bei jeder Gruppe einige Parzellen vielleicht einer anderen Gruppe zugehören, ist die Übereinstimmung mit dem erwarteten Verhältnisse so gut, dass an dem regelrechten Verlauf der Spaltung nicht gezweifelt werden kann.

Wenn schon die  $F_2$ -Spaltung zeigte, dass bei dem Schwed. Binkelweizen, Linie *B*, zwei Faktoren für die rote Farbe vorhanden sind, so wird dies durch das Verhalten der  $F_3$  sicher bestätigt.

Auch bei der Linie *A* ist die  $F_2$ -Spaltung 47 rot : 7 weiss am wahrscheinlichsten aus zwei Rotfaktoren herzuleiten. Die  $F_3$  dieser Linie wurde aber vorläufig nicht untersucht.

Der bei der Kreuzung benutzte Schwed. Binkelweizen ist jedoch keine reine Linie, sondern die ursprüngliche alte im Lande angebaute Rasse. Es kann wohl vorkommen, dass andere Individuen der Rasse nur einen oder auch mehr als zwei Farbfaktoren besitzen. Interessant ist jedenfalls, dass wieder ein neuer Fall konstatiert worden ist, wo eine alte Landrasse mehr als eine Farbeneinheit besitzt, was in auffallend vielen Fällen sowohl beim Weizen als beim Hafer nachgewiesen worden ist (vgl. Teil I, S. 112).

Auch bei den beiden Kreuzungen 0307 weiss  $\times$  0406 rot und 0406 rot  $\times$  0705 weiss ist offenbar das Verhältnis 15 : 1 vorhanden. Die zur Befruchtung gelangten Gameten der Linie 0406 müssen deshalb zwei Rotfaktoren besessen haben. Diese Kreuzungen wurden in  $F_3$  nicht verfolgt.

Ein damit nicht übereinstimmendes Verhalten hat aber 0406 bei der Kreuzung 0406 rot  $\times$  0234 rot gezeigt. Es entstanden nämlich bei Kreuzung dieser beiden rotkörnigen Linien in  $F_2$  einzelne weisskörnige Individuen, und zwar in einem Verhältnis, das deutlich auf je eine verschiedene Farbeneinheit bei diesen Sorten hinwies. Die Kreuzung wäre dann folgendermassen zu bezeichnen:

$$\begin{array}{cc} 0406 & 0234 \\ R_1 r_2 & \times r_1 R_2 \end{array}$$

Das Verhalten der  $F_3$  hat die Richtigkeit dieser Annahme durchaus bestätigt<sup>1</sup>.

Nach dieser Kreuzung ist es sichergestellt, dass die zur Befruchtung gelangten Gameten von 0406 und 0234 nur je eine verschiedene Einheit für die rote Farbe besitzen.

<sup>1</sup> Der Fall wurde von mir in einem besonderen Aufsätze ausführlich beschrieben: Über Entstehung scharf abweichender Merkmale aus Kreuzung gleichartiger Formen beim Weizen. Ber. d. deutsch. bot. Ges., Bd 29, 1911, S. 65.

Es ist also ein tatsächliches Beispiel jetzt davon vorhanden, dass dieselbe reine Linie (0406) sich in einem Falle einfaktorig, monomer<sup>1</sup>, in anderen Fällen zweifaktorig, dimer, erweisen kann. Die reine Linie ist dann zwar äusserlich konstant (abgesehen von den kleinen Schwankungen an Farbenintensität, die aus dem Vorhandensein von einem oder zwei Rotfaktoren folgen mögen), in Wirklichkeit aber nicht. Die Möglichkeit des Vorhandenseins solcher Fälle, wo reine Linien nur scheinbar konstant sind, auf die ich früher mit der Bemerkung hinwies, dass nur Kreuzungen lehren können, ob Konstanz wirklich vorhanden ist<sup>2</sup>, hat sich also jetzt schon durch ein sicheres Beispiel als tatsächlich herausgestellt.

0290 rot  $\times$  Stand-up weiss. Ebenso wie das Pollenkorn der 0290 bei der Kreuzung 0307 weiss  $\times$  0290 rot (vgl. oben) sind die bei den Linien *B*, *C* und *D* befruchteten Eizellen der 0290 am wahrscheinlichsten dimer. Zusammen ergeben diese Linien in  $F_2$  66 rot, 4 weiss = 16.5 rot : 1 weiss. Dagegen scheint bei der Linie *A* die Eizelle von 0290 eher monomer zu sein. Ein solches Verhalten von der 0290 ist aber nicht auffällig. Aus Kreuzung zwischen einer monomeren und einer trimeren Linie gezüchtet und auf die Gametenkonstanz äusserlich nicht beurteilbar, ist 0290 in dieser Hinsicht höchst wahrscheinlich noch nicht konstant, sondern enthält ebenso wie die Linie 0406 verschiedenartige Gameten.

Meine Untersuchungen über das Verhalten der Weizenkornfarbe werden fortgesetzt. Die Kreuzung 0315  $\times$  Schwed. Sammetweizen (vgl. Teil I, S. 67—73) wurde in späteren Generationen teilweise verfolgt. Die Untersuchungen haben jetzt vor allem den Zweck, näher auseinanderzusetzen, wie viele selbständige Faktoren es bei dieser Eigenschaft gibt und welche Wirkung diese allein und in Verbindung mit einander haben. Es ist wohl kaum wahrscheinlich, dass z. B. der trimere Schwed. Sammetweizen und der ebenfalls wahrscheinlich trimere 0501 gerade dieselben drei Faktoren besitzen. Vielleicht haben wir mit noch viel mehr als drei selbständigen Faktoren zu rechnen. Es werden aber noch viele Jahre nötig sein, um diese Fragen zu lösen.

### Zusammenfassung.

Die hier beschriebenen neuen Resultate meiner seit 1909 fortgesetzten Untersuchungen über die Kornfarbe des Weizens können folgendermassen kurz formuliert werden:

1. Das Konstatieren des Vorkommens von mehr als einer Farbeinheit bei noch anderen Sorten und Linien als vorher.
2. Die Nachweisung des Hervorgehens weisskörniger Individuen aus Kreuzung zweier rotkörnigen Sorten, die je eine Einheit für die rote Farbe besitzen.
3. Die tatsächliche Nachweisung einer reinen Linie, die zwar äusserlich, nicht aber in ihrem Gametencharakter konstant ist.

<sup>1</sup> Über diese Bezeichnung vgl. die Einleitung S. 5.

<sup>2</sup> Kreuzungsuntersuchungen Teil I, S. 74, Fussnote.



## Kap. II. Ähreninternodienlänge des Weizens.

Dass die Ährendichtigkeit des Weizens ein spaltendes Merkmal darstellt, ebenso wie Farbe, Behaarung usw., konnte ich schon bei meinen ersten Kreuzungsuntersuchungen im Jahre 1900 feststellen. Die Resultate dieser meiner Untersuchungen und die dabei gewonnenen Zahlenverhältnisse wurden folgendes Jahr, gelegentlich seines Besuches in Svalöf, dem Herrn Professor E. v. TSCHERMAK zum Teil mitgeteilt, welcher auch bald nachher etwas darüber veröffentlichte<sup>1</sup>. Im Bericht v. TSCHERMAKS, welcher zum ersten Mal das Mendeln einer Reihe verschiedener Getreidemerkmale nachwies, wurden auch die früheren, im Jahre 1891 veröffentlichten Untersuchungen RIMPAUS verwertet. Schon aus diesen stellt sich die Spaltung der Ährenform deutlich heraus, wogegen der nähere Verlauf der Spaltung wegen Mangels an Zahlenverhältnissen nicht ersichtlich ist. Etwa gleichzeitig mit mir hatte auch SPILLMAN das Verhalten dieser und anderer Eigenschaften des Weizens bei Kreuzungen untersucht und ebenso die Zahlenverhältnisse genau berücksichtigt. Die Veröffentlichung dieser Untersuchungen erfolgte im Jahre 1902<sup>2</sup>. Eine Reihe anderer Beobachtungen liegen seit dieser Zeit vor, die nebst den schon erwähnten neuerdings von v. TSCHERMAK zusammengestellt worden sind<sup>3</sup>. Die nähere Berücksichtigung der einschlägigen Literatur wird in der folgenden Darstellung an geeigneten Stellen stattfinden.

Ebenso leicht wie die Spaltung in der  $F_2$  bei meinen ersten Untersuchungen konstatiert werden konnte, ebenso schwierig zeigte es sich aber, den gesetzmässigen Verlauf derselben zu ermitteln, wie ich schon früher mehrmals hervorgehoben habe. Während bei den Merkmalen Behaarung und Farbe die  $F_2$ -Individuen immer leicht in die Alternativen behaart : unbehaart, gefärbt : ungefärbt gruppiert werden konnten, war in bezug auf Ährentypus die Spaltung zum Teil eine so unreine, dass eine Gruppierung der Individuen in die beiden Elterntypen oder in Elterntypen und intermediäre Typen sich nicht durchführen liess. Was die in systematisierenden

---

<sup>1</sup> Über Züchtung neuer Getreiderassen mittelst künstlicher Kreuzung. Zeitschr. f. das landw. Versuchswesen in Österreich, 1901, S. 1029.

<sup>2</sup> Quantitative studies on the transmission of parental characters to hybrid offspring. U. S. Department of Agriculture, Office of Experiment Stations Bulletin 115.

<sup>3</sup> In FRUWIRTH, Die Züchtung der landw. Kulturpfl., Bd IV, 2 Aufl., 1910, S. 167—170.

Arbeiten hie und da erwähnten Svalöfer Typen beim Weizen betrifft<sup>1</sup>, die hauptsächlich nach der Form der Ähren aufgestellt worden sind, so ist hervorzuheben, dass diese Typen nur einen Haltpunkt für die einfachste äussere Charakterisierung der Formen erbieten, keineswegs aber eine Begrenzung der Individuen für den hier in Betracht kommenden Zweck zulassen. Der Übergang von den nächst dichtesten Typen II–III, den Squareheadtypen, zum lockersten Landweizentypus VII, ist nämlich eine so allmähliche, und die Abgrenzung der aufeinander folgenden Stufen wird durch sehr erhebliche (sogar partielle) Modifikationsfluktuation so erschwert, dass eine Einordnung der Individuen nach der einfachen äusseren Beurteilung in den einen oder anderen der aufeinander folgenden Typen ganz willkürlich wird. Diese Typeneinteilung ist also nur als eine künstliche Gruppengliederung zu betrachten. Nur *Triticum compactum* mit den kürzesten Internodien (Typus I) ist von den übrigen Typen so diskontinuierlich getrennt, dass eine Abgrenzung desselben im allgemeinen schon durch die einfache äussere Beobachtung möglich ist, was sich auch darin äussert, dass dieser Typus vor Alters her einen besonderen botanischen Namen erhalten hat. Zur Beurteilung der übrigen, mehr kontinuierlich verbundenen erblichen Unterschiede an Internodienlänge muss dagegen Messung einsetzen. Auch in diesem Falle sind jedoch, infolge der starken partiellen und individuellen Modifikation, die kleineren erblichen Unterschiede schwer festzustellen.

Aus dem Gesagten geht hervor, dass Kreuzungen mit dem leicht zu charakterisierenden *Compactum* das einfachste Untersuchungsobjekt erbieten müssen.

#### A. *Compactum* × andere Weizen.

In einigen Distrikten Schwedens wird noch eine alte *Compactum*rasse angebaut, die Schwed. Binkelweizen genannt wird. Diese Rasse ist sehr winterfest und in derselben Weise wie die alten schwedischen lockerährigen Landweizenrassen dem Klima gut angepasst. Ohne Zweifel ist diese *Compactum*rasse seit alten Zeiten in Schweden in Kultur. Die Hauptmasse dieser Rasse ist vom echten *Compactum*typus; häufig eingemischt kommen jedoch lockerährige Typen vor, die auch höher im Halm sind<sup>2</sup>.

Meine ersten Untersuchungen über Kreuzungen mit *Compactum*, von denen ein Fall von v. TSCHERMAK (1901, l. c.) erwähnt wird, zeigten, dass in  $F_1$  *Compactum* dominierte oder prävalierte, und dass in  $F_2$ , wenigstens in gewissen Fällen, die einfache Spaltung 3 *Compactum* (— *compactum*ähnlich): 1 Nicht*compactum* bestand.

Unter anderswo ausgeführten *Compactum*kreuzungen sind zuerst diejenigen SPILLMANS (1902, l. c.) zu erwähnen. Die *Compactum*rasse Little Club und Red

<sup>1</sup> Vgl. z. B. FRUWIRTH l. c., S. 158.

<sup>2</sup> Diese können ebensogut durch Kreuzung mit Landweizenrassen als auch eventuell durch spontanes Wegfallen des *Compactum*faktors (vgl. unten) zustandekommen.



Chaff wurden mit verschiedenen langährigen Sorten gekreuzt. Über  $F_1$  wird nichts mitgeteilt. In  $F_2$  trat Spaltung ein in Compactum, intermediäre und langährige, und zwar in den meisten Fällen, wie aus den Tabellen deutlich ersichtlich ist, in der Weise, dass 3 Compactum + intermediär auf 1 langährig gebildet wurden. In einigen Fällen überwiegen die als kurzährige Compactumtypen bezeichneten Individuen. Es scheint deshalb, als ob die intermediären Individuen (= Bastarde) doch dem Compactum näher stehen sollten, so dass Compactum prävaliere. Eine auffallende, nicht aufgeklärte Ausnahme besteht jedoch bei gewissen Linien der Kreuzung Little Club  $\times$  Farquahar, wo in  $F_2$  langährige oder intermediäre überwiegen und Compactum vollständig oder fast vollständig fehlt.

Bei den Versuchen BIFFENS<sup>1</sup> (Devon, langährig  $\times$  Hedgehog, Compactum) zeigte die  $F_1$  ebenfalls Mittelstellung; über die  $F_2$  wurde noch nichts berichtet. WILSON<sup>2</sup> kreuzte Red King, langährig, mit Rood Koren, Compactum, wobei Compactum offenbar prävalierte; in  $F_2$  konnten die Individuen in kurzährige und langährige gruppiert werden, wobei sich das Verhältnis 3 kurzährig : 1 langährig, ebenso wie bei meinen Versuchen, herausstellte. Unter den kurzährigen konnten jedoch kürzere und längere unterschieden werden; die letzteren bildeten die Mehrzahl.

STRAMPELLI<sup>3</sup> erhielt bei Kreuzungen Hérisson, Compactum  $\times$  Rieti, langährig, in der  $F_1$  intermediäre, meistens squareheadähnliche Typen, die dem Compactum näher standen; in  $F_2$  erfolgte die gewöhnliche Aufspaltung in Compactum, intermediäre und langährige.

V. RÜMKER<sup>4</sup> erhielt bei Kreuzung Compactum  $\times$  langähr. Eppweizen in  $F_1$  intermediäre Squareheadtypen und in  $F_2$  ganz deutlich das Verhältnis 1 Compactum : 2 Squarehead : 1 langährig; Squareheadindividuen aus der  $F_2$ , nochmals ausgesät, ergaben wiederum dieselbe Spaltung in ihrer Nachkommenschaft. Die übrigen RÜMKERSchen Compactumkreuzungen zeigten mit Hinsicht auf andere Eigenschaften, wie Behaarung, ein solches Verhältnis, als ob die Eltern nicht konstant sondern heterozygotisch wären, und geben deshalb kein klares Bild über das Verhalten der Ährendichte. Schliesslich gibt v. TSCHERMAK<sup>5</sup> an, dass auch bei seinen Kreuzungen Compactum  $\times$  langährige Weizen Compactum prävaliere.

Von den Resultaten meiner Compactumkreuzungen wurde ausser dem von v. TSCHERMAK (1901, l. c.) Mitgeteilten, von mir bisher nur wenig veröffentlicht<sup>6</sup>. In der folgenden Darstellung werden daher sämtliche gefundene Tatsachen zusammengestellt.

<sup>1</sup> Mendel's laws of inheritance and wheat breeding. Journ. of agricult. science, I, 1, 1905, S. 31.

<sup>2</sup> The hybridisation of Cereals. Ibid II, 1, 1907, S. 82.

<sup>3</sup> Alla ricerca e creazione di nuove varietà di frumenti a mezzo dell'ibridazione. R. staz. sperim. di granicoltura in Rieti. Rom 1907.

<sup>4</sup> Methoden der Pflanzenzüchtung in experimenteller Prüfung. Mitteil. d. landw. Institute d. Kgl. Univ. Breslau. Berlin 1909, S. 273.

<sup>5</sup> In FRUWIRTH, l. c. S. 167.

<sup>6</sup> Einige Ergebnisse von Kreuzungen bei Hafer und Weizen. Botan. Notiser 1908, S. 279.



1. In den Jahren 1900—1904, hauptsächlich nur in  $F_1$  und  $F_2$ , untersuchte Kreuzungen.

1) *Upländ. brauner Landweizen* (lang- und lockerährig)  $\times$  *Schwed. Binkelweizen*.<sup>1</sup>  
 $F_1$ : Compactum, jedoch ein bisschen längere, lockerere Ähren.  $F_2$ : Spaltung in Compactum und compactumähnliche Typen mit etwas lockereren Ähren (»Binkelsquarehead«) einerseits und sehr scharf abweichende, lang- und lockerährige Landweizentypen andererseits (keine Zahlenangaben).

Weiter ausgesät wurden vier  $F_2$ -Pflanzen:

- a. Echt Compactum.  $F_3$ : konstant Compactum.
- b. Compactumähnlich, etwas lockerere Ähren.  $F_3$ : konstant Compactum.<sup>2</sup>
- c. » » » »  $F_3$ : Spaltung in 72 Compactum und compactumähnliche, 28 langährige.
- d. Langähriger Landweizen.  $F_3$ : konstant langährig.

Von c. wurde weiter ausgesät:

- c<sub>1</sub>. Compactumähnlich, etwas lockerere Ähren.  $F_4$ : Spaltung in etwa  $\frac{3}{4}$  Compactum + compactumähnliche und  $\frac{1}{4}$  langährige.

2) 0705, langähr. *Landweizenlinie*  $\times$  *Schwed. Binkelweizen*.<sup>3</sup>  $F_1$ : Ähren compactumähnlich, etwas lockerer (»Binkelsquarehead«).  $F_2$ : 15 Compactum und etwas langährigere, verlängerte Compactumtypen. 3 langährige. Ebenso wie bei der vorigen Kreuzung war die Differenz zwischen den beiden Gruppen sehr scharf, diskontinuierlich, und das Zahlenverhältnis leicht festzustellen.

Weiter ausgesät wurden 2  $F_2$ -Pflanzen:

- a. Compactumähnlich, etwas langähriger.  $F_3$ : Spaltung in Compactum und verlängerte Compactum einerseits, scharf getrennte lang- und lockerährige Landweizen andererseits (ohne Zahlenangabe).
- b. Lang- und lockerährig.  $F_3$ : konstant lang- und lockerährig.

3) *Schwed. Binkelweizen*  $\times$  0601, langährig.

Linie A.  $F_1$ : Compactum.  $F_2$ : 28 Compactum, zum Teil jedoch nicht ganz so dicht wie bei dem Elter, sondern etwas mehr ausgezogen; 7 langährige, von der vorigen Gruppe weit und scharf getrennt.

Weiter ausgesät wurden zwei  $F_2$ -Pflanzen:

- a. Compactum, etwas ausgezogen.  $F_3$ : Spaltung in Compactum und etwas mehr ausgezogene compactumähnliche einerseits, scharf getrennte lang- und lockerährige Landweizen andererseits (ohne genaue Zahlenangabe).

<sup>1</sup> In bezug auf Spaltung der Ährenfarbe ist diese Kreuzung im Teil I, S. 61, beschrieben worden.

<sup>2</sup> Die compactumähnliche  $F_2$ -Pflanze also offenbar echt Compactum, nur Modifikationsabänderung.

<sup>3</sup> Vgl. Teil I, S. 59.

b. Langährig.  $F_3$ : konstant langährig.

Linie B.  $F_1$ : Compactum.  $F_2$ : nicht untersucht.

4) 0501, Grenadier (Ähren mitteldicht)  $\times$  Schwed. Binkelweizen.

Linie A.  $F_1$ : Beobachtung unsicher (Pflanze schlecht entwickelt).  $F_2$ : Spaltung in 21 Compactum und compactumähnliche Binkelsquarehead einerseits, 6 von der vorigen Gruppe scharf getrennte lang- und lockerährige andererseits, die letzteren ebenso wie bei der Linie B sämtlich mit längeren und lockereren Ähren als beim Grenadier.

Weiter ausgesät wurden zwei Pflanzen:

a. Compactumähnlich.  $F_3$ : winterte im strengen Winter 1901 vollständig aus.

b. Lang- und lockerährig.  $F_3$ : ziemlich stark ausgewintert. Übrig gebliebene Pflanzen sämtlich lang- und lockerährig, der Mutterpflanze ähnlich.

Folgendes Jahr wurde wieder eine  $F_2$ -Pflanze ausgesät:

c. Compactumähnlich.  $F_3$ : Spaltung in 16 Compactum und compactumähnliche, 4 scharf getrennte lang- und lockerährige Landweizen.

Von b wurde eine Pflanze weiter ausgesät:

b<sub>1</sub>. Lang- und lockerährig.  $F_4$ : konstant lang- und lockerährig.

Linie B.  $F_1$ : Beobachtung unsicher (Pflanze schlecht entwickelt).  $F_2$ : Spaltung in 11 Compactum und etwas mehr ausgezogene, compactumähnliche, 4 sehr lang- und lockerährige, von der vorigen Gruppe weit und scharf getrennt. Sämtliche langährige Pflanzen mit auffallend längeren und lockereren Ähren als beim Grenadier, landweizenähnlich.

Weiter ausgesät wurden drei  $F_2$ -Pflanzen:

a. Echt Compactum.  $F_3$ : ziemlich stark ausgewintert, konstant Compactum

b. Compactumähnlich.  $F_3$ : ziemlich stark ausgewintert; Spaltung in Compactum und compactumähnliche einerseits, scharf getrennte langährige Landweizen andererseits (ohne Zahlenangabe).

c. Sehr lang- und lockerähriger Landweizentypus.  $F_3$ : ziemlich stark ausgewintert, konstant sehr lang- und lockerährig.

Von b wurde weiter ausgesät eine Pflanze:

b<sub>1</sub>. Compactumähnlich.  $F_4$ : Spaltung in 44 Compactum und compactumähnliche, 13 scharf getrennte lang- und lockerährige Landweizentypen.

5) 0411 (Ähren mitteldicht)  $\times$  Schwed. Binkelweizen.

Linie A.  $F_1$ : Compactum.  $F_2$ : Spaltung (ohne genaue Zahlenangabe) in Compactum und Nichtcompactum (Ähren dabei mitteldicht wie bei 0411 oder länger, lockerer); die letzte Gruppe in ihrer Gesamtheit von der Compactumgruppe scharf getrennt.

Weiter ausgesät wurden drei  $F_2$ -Pflanzen:

a. Compactum.  $F_3$ : zum Teil ausgewintert; Spaltung in Compactum und langährige (ohne Zahlenangabe).

b. Compactum.  $F_3$ : zum Teil ausgewintert; konstant Compactum.

c. Ziemlich langährig.  $F_3$ : zum Teil ausgewintert; konstant langährig (oder geringfügige Variation an Ährendichte?).

Linie B.  $F_1$ : Compactum.  $F_2$ : Spaltung in Compactum und (selten) compactumähnliche Binkelsquarehead einerseits, von der vorigen Gruppe scharf getrennte, 0411-ähnliche oder mehr lockerährige Typen andererseits (ohne genaue Zahlenangabe).

Weiter ausgesät wurde eine  $F_2$ -Pflanze:

a. Compactum.  $F_3$ : Spaltung in Compactum und compactumähnliche einerseits, lange, lockerährige Landweizentypen andererseits (ohne Zahlenangabe). Die letzteren weit mehr lang- und lockerährig als 0411.

#### 6) 6301, *Topp-Squarehead* $\times$ *Swed. Binkelweizen*.

Linie A.  $F_1$ : Compactum.  $F_2$ : Spaltung in 55 Compactum und (ziemlich selten) compactumähnliche Binkelsquarehead, 25 0301-ähnliche (Squarehead) — intermediäre — lang- und lockerährige (zum Teil mit sehr langen, lockeren Ähren). Zwischen Binkelsquarehead und Squarehead die Grenze nicht mehr sehr scharf.

Weiter ausgesät wurden drei  $F_2$ -Pflanzen:

a. Compactumähnlich (Binkelsquarehead).  $F_3$ : winterte 1911 grösstenteils aus; die wenigen überwinterten Pflanzen teils Topp-Squareheadähnlich, teils langährige Landweizentypen (kein Compactum).

b. Topp-Squareheadähnlich.  $F_3$ : Spaltung in Squarehead — langährige Landweizen.

c. Sehr lang- und lockerähriger Landweizentypus.  $F_3$ : winterte 1901 grösstenteils aus. Die wenigen überwinterten Pflanzen waren sämtlich sehr lang- und lockerährige Landweizentypen.

Linie B.  $F_1$ : Compactum.  $F_2$ : Spaltung in 29 Compactum und (selten) compactumähnliche Binkelsquarehead, 5 Nichtcompactum (Ähren bei diesen länger, lockerer als bei 0301). —  $F_3$  wurde nicht untersucht.

Linie C.  $F_1$ : Compactum.  $F_2$ : Spaltung in 30 Compactum, 12 Squarehead — intermediäre — lang- und lockerährige (eine Pflanze mit sehr langen und lockeren Ähren).

Weiter ausgesät wurden vier  $F_2$ -Pflanzen:

a. Compactum.  $F_3$ : winterte 1901 grösstenteils aus. Die wenigen übrig gebliebenen Pflanzen sämtlich Compactum.

b. Squarehead.  $F_3$ : Spaltung in Compactum (ausgezogen), Squarehead und lang- und lockerährige echte Landweizentypen (ohne Zahlenangabe).

c. Squarehead. Winterte 1901 vollständig aus.

d. Intermediär (mitteldichte Ähren). Winterte 1901 vollständig aus.

#### 7) 0203, *Extra-Squarehead* $\times$ *Swed. Binkelweizen*.

Linie A.  $F_1$ : Compactum. Weiter nicht untersucht.



Linie *B*.  $F_1$ : Compactum.  $F_2$ : Spaltung in 18 Compactum, 11 Squarehead — lang- und lockerährige Landweizen.

Weiter ausgesät wurden zwei Pflanzen:

a. Compactum.  $F_3$ : winterte 1901 vollständig aus.

b. Squarehead.  $F_3$ : winterte 1901 grösstenteils aus; die übrig gebliebenen Pflanzen sämtlich Squarehead.

Bei sämtlichen jetzt beschriebenen Compactumkreuzungen ist es offenbar, dass Compactum dominiert oder stark prävaliert. Bei den letzten drei Kreuzungen, wo der zweite Elter mitteldichte Ähren hat, sind die primären Bastarde als echt Compactum beschrieben; bei den drei ersten Kreuzungen, wo der zweite Elter lang- und lockerährig ist, wird dagegen der Compactumtypus beim primären Bastard etwas mehr ausgezogen, dem Squareheadtypus angenähert (Binkelsquarehead). Dies steht mit den Resultaten der anderswo ausgeführten, oben erwähnten Kreuzungen in Übereinstimmung; bei Kreuzungen mit langährigen Landweizen wird  $F_1$  mehrmals als intermediär bezeichnet.

In der  $F_2$  treten bei fast sämtlichen Kreuzungen sowohl echte Compactum als compactumähnliche Binkelsquarehead auf. Die echten Compactum und die Binkelsquarehead sind dabei nicht scharf getrennt, sondern müssen überall in eine Gruppe zusammengefasst werden. Diese Gruppe ist aber in den meisten Fällen von den Nichtcompactumformen scharf und weit getrennt, weshalb sichere Zahlenverhältnisse erhalten werden können. Nur bei den zwei letzten Kreuzungen 6) und 7), wo der zweite Elter vom Compactum am wenigsten getrennt ist, ist die Grenze zwischen den beiden Gruppen nicht mehr scharf aufrecht zu halten, und die Zahlenverhältnisse sind deshalb hier nicht mehr so sicher. Um Durchschnittszahlen für die  $F_2$  zu erhalten, werden daher diese beiden Kreuzungen nicht mitgerechnet.

0705	×	Schwed. Binkel	$F_2$ .	15	Compactum und compactumähnlich,	3	Nichtcompactum
0601	×	»	»	28	»	7	»
0501	×	»	» <i>A</i> »	21	»	6	»
»	×	»	» <i>B</i> »	11	»	4	»
Summa				75	»	20	»

Aus diesem Zahlenverhältnis ergibt sich deutlich, dass die einfache Spaltung 3 : 1 vorliegt; die  $F_2$ -Heterozygoten sind, ebenso wie die  $F_1$ -Bastarde, von echtem Compactumtypus oder compactumähnlich und bilden mit den homozygoten Compactum eine Gruppe.

Durch das Verhalten der  $F_3$  der sämtlichen fünf ersten Kreuzungen wird dies weiter bestätigt. Die der Nichtcompactumgruppe zugehörigen Individuen ergeben in ihrer Nachkommenschaft niemals Compactum oder compactumähnliche Binkelsquarehead, sondern lauter mehr oder weniger lockerährige Individuen. Die Individuen der Compactumgruppe bleiben in  $F_3$  zum Teil konstant Compactum;

die übrigen spalten weiter in derselben Weise wie vorher. Die in  $F_3$  (und in  $F_4$ ) erhaltenen Spaltungszahlen waren die folgenden:

Upl. braun. Landw. $\times$ Schwed. Binkel. $F_3$ . 72 Compactum, 28 Nichtcompactum.						
0501	$\times$	»	» A. »	16	»	4
»	$\times$	»	» B. $F_4$ .	44	»	13
Summa				132	»	45

Es stellt sich hier noch deutlicher das Verhältnis 3 : 1 heraus.

Bei den Kreuzungen 6) und 7), wo Binkelsquarehead und andere Squarehead in der Weise zusammenfließen, dass keine scharfe Grenze zwischen die Compactumgruppe und die Nichtcompactumformen mehr gezogen werden kann, sind die Heterozygoten offenbar zum Teil der Nichtcompactumgruppe zugerechnet, denn bei 0301  $\times$  Schwed. Binkel, Linie C, ergab eine als Squarehead bezeichnete  $F_2$ -Pflanze in  $F_3$  Spaltung in Compactum — langährig. Es wäre also hier eine Untersuchung sämtlicher  $F_2$ -Pflanzen in der  $F_3$  notwendig, um das Zahlenverhältnis in der  $F_2$  ganz sicher zu ermitteln.

Aus sämtlichen übrigen Kreuzungen geht aber deutlich hervor, dass eine einfache Spaltung vorliegt, sofern nur an Compactum und Nichtcompactum als zwei Gruppen gedacht wird. Da Compactum bei meinen Kreuzungen überall ganz deutlich dominiert oder prävaliert, und da auch bei den oben erörterten Compactumkreuzungen anderer Forscher ein mehr oder weniger deutliches Prävalieren des Compactumtypus sowie auch dieselbe einfache Spaltung in der  $F_2$  meistens erkennbar sind, so ist die Sache so darzustellen, dass bei Tr. compactum ein distinkt wirkender Faktor vorhanden ist, der bei den übrigen Weizen fehlt. Dieser Faktor bewirkt eine Verkürzung der Internodien, ist also als einen Hemmungsfaktor zu betrachten.

So weit scheint die Sache ziemlich klar zu sein. Die weiter unten zu besprechenden Kreuzungen werden die Richtigkeit dieser Annahme nur noch mehr bestätigen.

Dagegen ist die Spaltung keineswegs einfach in dem Sinne, dass z. B. die rezessive Nichtcompactumgruppe eine homogene, mit dem einen Elter übereinstimmende Gruppe bilden sollte. Vor allem ist dies nicht der Fall, wenn Compactum mit Squareheadtypen oder mit anderen Formen von mittlerer Ährendichte gekreuzt wird. Statt Squarehead und mitteldichter Formen werden dann, wie die Kreuzungen zeigen, bei der  $F_2$ -Spaltung hauptsächlich ganz andere, lang- und lockerährige Individuen gebildet, und in gewissen Fällen scheint der Elterntypus sogar überhaupt nicht mehr wiederzukehren. Bei den oben erörterten Kreuzungen anderer Forscher ist keine derartige komplizierte Spaltung zu sehen, weil überall lang- und lockerährige Weizen mit Compactum gekreuzt wurden; in keinem Falle sind Squarehead oder ähnliche Formen als Elter benutzt worden. Bei meinen zwei ersten Kreuzungen mit Landweizensorten ist vielleicht eine einfache Spaltung in die beiden Ährendichtigkeits-



typen der Eltern vorhanden; fraglich ist jedoch, ob nicht eine geringfügige Spaltung, z. B. in der Landweizengruppe, vorkommt. Bei den Kreuzungen mit Square-head und anderen mitteldichten Typen ist aber die Kompliziertheit der Spaltung ganz offenbar.

Infolge der geringen Individuenzahl in der  $F_2$ , vor allem in der Nichtcompactumgruppe, konnte keine nähere Auseinandersetzung dieser Frage bei den oben erörterten Kreuzungen erfolgen. Statt dessen sind in den letzten Jahren zwei neue Kreuzungen zwischen Compactum und mitteldichten Typen untersucht worden. Diese sollen jetzt beschrieben werden.

## 2. In den Jahren 1908—1910, in $F_1$ — $F_3$ vollständig untersuchte Kreuzungen.

1) *Swed. Binkelweizen*  $\times$  0315, *Pudelweizen*, mit mitteldichten Ähren (square-headähnlich, aber oben nicht verdichtet, nicht kolbig) <sup>1</sup>.

Linie A.  $F_1$ : Compactum.  $F_2$ : Spaltung in 36 Compactum (teilweise dichter als die Elternsorte), 18 von der vorigen Gruppe scharf getrennte mitteldichte — lockere Typen, grösstenteils mehr lockerährig als 0315 (= 2,0 Compactum : 1 Nichtcompactum). Nach der okulären Beobachtung schien nur eine von den zwanzig Pflanzen etwa so dichtährig wie 0315 zu sein, eine andere zeigte annähernd dieselbe Ährendichte; die sämtlichen übrigen waren dagegen deutlich lockerähriger.

Die Ähreninternodienlänge sämtlicher  $F_2$ -Pflanzen wurde gemessen (vgl. Tabelle 1). Die dabei erhaltenen Zahlen zeigen, dass die Compactumindividuen eine Gruppe für sich bilden (Internodienlänge 1,4—2,2 mm.) und dass die Differenz von den Nichtcompactumindividuen (Internodienlänge 3,5—4,9 mm.) scharf diskontinuierlich ist, indem eine weite Lücke zwischen den Plusextremen der Compactumgruppe und den Minusextremen der Nichtcompactumgruppe vorhanden ist. Infolgedessen können auch die beiden Gruppen okulär sicher abgegrenzt werden. In der Nichtcompactumgruppe fällt es sofort auf, in Übereinstimmung mit der okulären Beobachtung, dass die Internodienlänge grösstenteils ausserhalb derjenigen der Elternsorte 0315 liegt <sup>2</sup>. Auch die Bildung von Compactumindividuen dichter als die Elternsorte wird durch die Messung bestätigt.

$F_3$  dieser Linie wurde nicht untersucht.

Linie B.  $F_1$ : Compactum.  $F_2$ : Spaltung in 61 echte Compactum (davon 5 besonders dicht, auffallend dichter als die Elternsorte, *Swed. Binkelweizen*); 5 etwas mehr ausgezogene Compactum; 28 von den vorigen Gruppen scharf getrennte mitteldichte — lockere Typen, grösstenteils mehr lockerährig als 0315 (= 2,4 Compactum : 1 Nichtcompactum). Nur zwei Pflanzen (Internodienlänge 3,21, 3,28 mm.; vgl. Tabelle 1) schienen etwa so dichtährig wie 0315 zu sein.

<sup>1</sup> Die Farbenspaltung dieser Kreuzung ist oben S. 22—24 behandelt.

<sup>2</sup> Von 0315 wurde dieselbe Anzahl von Pflanzen gemessen wie bei der Nichtcompactumgruppe der Linie B (28).





Die Messung der Ähreninternodienlänge der 28 Nichtcompactumpflanzen (die Compactumpflanzen wurden bei dieser Linie vor der Aussaat nicht gemessen) ergab ähnliches Resultat wie bei der Linie *A*. Wie Tabelle 1 zeigt, ist die Internodienlänge der Mehrzahl dieser Pflanzen grösser als bei 0315. Die nähere Besprechung der Zahlen folgt unten S. 41—43.

Diese Linie wurde in  $F_3$  vollständig verfolgt, indem sämtliche 94  $F_2$ -Pflanzen in separaten Reihen vermehrt wurden. Die Nachkommenschaften der  $F_2$ -Pflanzen zeigten dann folgendes Verhalten:

- 5 Compactum, sehr dicht.  $F_3$ : 5 konstant Compactum.
- 56 Compactum.  $F_3$ :  $\left\{ \begin{array}{l} 18 \text{ konstant Compactum.} \\ 38 \text{ spaltend in Compactum und Nichtcompactum.} \end{array} \right.$
- 5 etwas mehr ausgezogene Compactum.  $F_3$ : 5 spaltend in Compactum und Nichtcompactum.
- 28 Nichtcompactum.  $F_3$ : sämtliche Nachkommenschaften enthalten nur Nichtcompactum, zeigen aber sonst verschiedenes Verhalten der Ährendichte (siehe näheres gleich unten).

Nach dem Verhalten der  $F_3$  bestehen also die  $F_2$ -Pflanzen aus 23 homozygot Compactum, 43 Heterozygoten und 28 homozygot Nichtcompactum. Die Spaltung in Compactum und Nichtcompactum verläuft also, was schon aus den früheren Kreuzungen geschlossen wurde, in ganz einfacher monohybrider Weise, nach dem Verhältnis 1 : 2 : 1.

Die okulare Beobachtung der 28  $F_3$ -Nachkommenschaften der Nichtcompactumgruppe zeigte Folgendes: Die Nachkommenschaften der beiden mit 0315 übereinstimmenden Pflanzen schienen ziemlich konstant kurz- und dichtährig, jedoch kaum so dichtährig wie 0315, zu sein. Die Mehrzahl der Nachkommenschaften zeigte deutliche Spaltung in langährigere und kurzährigere Typen. Sehr auffallend war nun ferner, dass von diesen deutlich spaltenden Nachkommenschaften manche eine weit grössere Anzahl von 0315-ähnlichen Typen ausspalteten als die  $F_2$ , während andere sich anscheinend in derselben Weise wie die  $F_2$  verhielten, d. h. langährige und intermediäre, aber nur seltene 0315-ähnliche Typen ausspalteten. Mehrere Nachkommenschaften enthielten gar keine 0315-ähnlichen Typen, sondern nur langährige und intermediäre, oder waren in ihrer Gesamtheit ziemlich konstant langährig.

Zur besseren Beurteilung wurde bei jeder dieser Nachkommenschaften die Ähreninternodienlänge sämtlicher Pflanzen gemessen (vgl. Tabelle 2). Die Besprechung des Resultates dieser Messung im Vergleich mit demjenigen der okularen Beobachtung wird am zweckmässigsten weiter unten S. 41—45 stattfinden.

Die Nachkommenschaften der Compactumindividuen wurden auch zuerst einer okularen Beobachtung unterworfen. Unter den 23 »konstant Compactum« zeigten einige einen deutlich dichter Compactumtypus als die übrigen. Von den 5 als besonders dicht bezeichneten  $F_2$ -Pflanzen behielten 3 den auffallend dichten Typus,

während 2 etwa den Typus der Hauptmasse zeigten. Unter den 18 Nachkommenschaften nach gewöhnlichen Compactumpflanzen wurden 2 als besonders dichtährig bezeichnet.

Die 43 in Compactum — Nichtcompactum spaltenden Nachkommenschaften ergaben eine auffallend verschiedene Spaltung. Zum Teil wiederholten sie die  $F_2$ -Spaltung, indem ausser Compactum sowohl mitteldichte (= 0315-ähnliche) als langährige Typen gebildet wurden, zum Teil ergaben sie nur Compactum und Typen mehr langährig als 0315; in wieder anderen Fällen erschienen nebst Compactumindividuen nur mitteldichte, etwa 0315-ähnliche Typen, oder nebst diesen auch etwas lockerere Typen. Eine genaue Trennung dieser drei Gruppen konnte jedoch, wegen geringer Individuenzahl in einigen Nachkommenschaften und der nicht deutlich genug verschiedenen Spaltungsart der Gruppen, nicht gemacht werden. Die drei Gruppen entsprechen aber ganz deutlich denjenigen der Nichtcompactum-nachkommenschaften, von denen einige deutliche Spaltung in lange, lockere — mitteldichte, 0315-ähnliche Typen ergaben, andere mehr konstant lang und locker bzw. mitteldicht waren. In 3 von den 43 Parzellen mendelten nebst Compactum nur mitteldichte, 0315-ähnliche Typen aus.

2) *Schwed. Binkelweizen*  $\times$  0406, *Boreweizen*, mit mitteldichten Ähren (square-headähnlich, aber oben nicht verdichtet, nicht kolbig).

Linie A.  $F_1$ : Compactum.  $F_2$ : Spaltung in 52 Compactum, dichter — mehr ausgezogen, 19 Nichtcompactum, von der vorigen Gruppe scharf getrennt (= 2,7 Compactum : 1 Nichtcompactum). Unter den Compactumindividuen waren einige besonders dicht, dichter als die Elternsorte. Von den Nichtcompactumpflanzen schien kaum eine einzige so dichtährig wie 0406, sondern sämtlich mehr lockerährig, teilweise von sehr langem, lockerem, fast spelzähnlichem Landweizentypus<sup>1</sup>.

Die Messung sämtlicher  $F_2$ -Pflanzen dieser Linie ergab das aus Tabelle 1 ersichtliche Resultat. Ebenso wie bei der vorigen Kreuzung ist zwischen der Compactumgruppe (Internodienlänge 1,4—2,2 mm.) und der Nichtcompactumgruppe (Internodienlänge 3,6—5,0 mm.) eine weite Lücke vorhanden. Auch die Nichtcompactumgruppe zeigt ähnliches Verhalten wie bei der vorigen Kreuzung. Die Elternsorte 0406 hat etwa dieselbe Ähreninternodienlänge wie 0315; fast alle  $F_2$ -Pflanzen liegen, in Übereinstimmung mit der okulären Beobachtung, ausserhalb der Grenzen der 0406. In ganz ähnlicher Weise wie bei der vorigen Kreuzung zeigt die Messung auch das Bilden von Compactumindividuen dichter als der Compactumelter.

$F_3$  dieser Linie wurde nicht untersucht.

Linie B.  $F_1$ : Compactum.  $F_2$ : Spaltung in 46 echte Compactum, davon 1 mit besonders dichten Ähren (mehrere schienen dichtähriger als die Elternsorte Schwed. Binkelweizen zu sein), 31 Compactum, etwas mehr ausgezogen, 11 Binkelsquarehead,

<sup>1</sup> Die Eltern dieser Kreuzung und ein in  $F_2$  herausgemendelter lockerähriger Typus sind in BAUR, Einführung in die experimentelle Vererbungslehre S. 250 abgebildet.



1 Squarehead, 37 mitteldichte — lockere Typen, grösstenteils lockerer als 0406. Wenn Compactum — Squarehead als Compactumgruppe gerechnet werden (was nach dem Verhalten der  $F_3$  richtig ist; vgl. unten), ergibt sich das Verhältnis 89 Compactum : 37 Nichtcompactum = 2,4 Compactum : 1 Nichtcompactum.

Bei dieser Linie wurden vor der Aussaat nur die Nichtcompactumpflanzen gemessen (vgl. Tabelle 1). Die Messung bestätigt die okulare Beobachtung, indem bei dieser Linie mehr Pflanzen als bei der Linie A in die Modifikationskurve der Elternsorte 0406 eingreifen. Die weit überwiegende Mehrzahl der Pflanzen liegt jedoch auch hier ausserhalb der Grenzen der 0406.

Sämtliche 126  $F_2$ -Pflanzen wurden in Reihen separat vermehrt. Diese Prüfung in  $F_3$  ergab folgendes Resultat:

46 echte Compactum.  $F_3$  :  $\left\{ \begin{array}{l} 25 \text{ konstant Compactum.} \\ 21 \text{ spaltend Compactum : Nichtcompactum.} \end{array} \right.$

31 Compactum, etwas ausgezogen.  $F_3$ : sämtlich spaltend Compactum : Nichtcompactum

11 Binkelsquarehead.  $F_3$ : » » » »

1 Squarehead.  $F_3$ : » » » »

37 mitteldicht — locker.  $F_3$ : sämtliche Nachkommenschaften enthalten nur Nichtcompactum, zeigen aber sonst verschiedenes Verhalten der Ährendichte (vgl. näher unten).

Bei dieser Kreuzung ergibt sich also in  $F_2$  das Verhältnis 25 homozygot Compactum : 64 Heterozygoten : 37 homozygot Nichtcompactum. Auch bei dieser Kreuzung besteht also in bezug auf den Compactumfaktor deutlich das einfache Verhältnis 1 : 2 : 1.

In der Nichtcompactumgruppe zeigten nur die Nachkommenschaften von drei 0406-ähnlichen Pflanzen (Internodienlänge 3,30, 3,57, 3,61 mm.) nahe Übereinstimmung mit 0406 und schienen etwa ebenso konstant zu sein. Die übrigen in die Modifikationskurve der 0406 eingreifenden  $F_2$ -Pflanzen (Internodienlänge 3,44, 3,58 mm.) ergaben dagegen in ihren Nachkommenschaften deutliche Spaltung in langährigere und 0406-ähnliche Pflanzen. Die Nachkommenschaften der sämtlichen übrigen  $F_2$ -Pflanzen waren von 0406, meistens sehr deutlich, verschieden. Die spaltenden  $F_3$ -Nachkommenschaften verhielten sich in ganz derselben Weise wie bei der vorigen Kreuzung: einige (Internodienlänge der Mutterpflanzen 3,44, 3,58, 3,70, 3,75, 3,98, 4,16, 4,20, 4,26 mm.) ergaben eine erheblich grössere Zahl von 0406-ähnlichen Pflanzen als die  $F_2$ ; in anderen waren 0406-ähnliche Pflanzen selten wie in  $F_2$  (Internodienlänge der Mutterpflanzen dieser Nachkommenschaften 4,09, 4,12, 4,17, 4,20, 4,20, 4,22, 4,30, 4,30, 4,35, 4,58, 4,58 mm.). Einige Nachkommenschaften ergaben nur Pflanzen mit deutlich lockereren Ähren als bei 0406 (Internodienlänge der Mutterpflanzen dieser Nachkommenschaften 3,80, 4,04, 4,06, 4,06, 4,10, 4,20, 4,31, 4,33, 4,38, 4,47, 4,62, 4,66, 4,71 mm.).

Die Nachkommenschaften der Compactumgruppe verhielten sich auch auf ähnliche Weise wie bei der vorigen Kreuzung. Die 25 »konstant Compactum« waren unter sich deutlich verschieden, nämlich mehr oder weniger dichtährig. 3 Nach-

kommenschaften, deren Mutterpflanzen dichtähriger als der Compactumelter waren, (vgl. oben), wurden als sehr dichtährig bezeichnet; einige waren in ihrer Gesamtheit von mehr ausgezogenem Compactumtypus. Die Mehrzahl spaltete in dichtere (zum Teil sehr dichte) und etwas mehr ausgezogene Typen auf.

Von den 64 in Compactum — Nichtcompactum spaltenden Nachkommenschaften ergaben 4 nur Compactum und mitteldichte, 0406-ähnliche oder wenig lockerere Typen, einige (besonders nach mehr ausgezogenen, als Binkelsquarehead bezeichneten Compactum-Mutterpflanzen) nur Compactum und sehr lange, lockere Landweizentypen. Die Mehrzahl dieser Nachkommenschaften zeigte dagegen deutliche Spaltung innerhalb der Nichtcompactumgruppe; da aber diese Gruppe nur etwa ein Viertel der Individuen umfasst, wurde die Zahl der Individuen meistens klein, und eine genaue Trennung verschiedener Spaltungsweisen konnte deshalb ebensowenig wie bei der vorigen Kreuzung gemacht werden.

### 3. Die Faktoren des Schwed. Binkelweizens.

Durch die vollständige Verfolgung in  $F_3$  haben die zwei Kreuzungen Schwed. Binkelweizen  $\times$  0315 und Schwed. Binkelweizen  $\times$  0406 die auf Grundlage der vorigen Kreuzungen aufgestellte Annahme sicher bestätigt, dass beim Compactum ein besonderer Hemmungsfaktor vorhanden ist, der sonst fehlt und der die beträchtliche Abkürzung der Ähreninternodien bewirkt. Bei Kreuzungen mit weit getrennten Landweizentypen wird die  $F_2$ -Spaltung (wenigstens bei meinen Kreuzungen) stets eine scharfe, auch äusserlich reine, weil die Heterozygoten, auch wenn sie etwas verlängerte Binkelsquarehead oder Squarehead darstellen, doch stets von den ausgespalteten Landweizentypen scharf, diskontinuierlich getrennt sind. Bei Kreuzungen Compactum  $\times$  Squarehead oder andere mitteldichte Typen kann dagegen die Spaltung leicht eine äusserlich unreine werden, weil die Heterozygoten in kontinuierlicher Weise Compactum mit Squarehead verbinden, wie bei der Kreuzung 0301  $\times$  Schwed. Binkelweizen; vgl. S. 31). Von den letzten beiden Kreuzungen ist jedoch nur bei Schwed. Binkel  $\times$  0406, Linie B, die Abgrenzung der beiden Gruppen Compactum und Nichtcompactum in  $F_2$  nicht mehr sehr scharf. Die  $F_3$ -Prüfung hat aber dann gezeigt, dass die  $F_2$ -Spaltung nur äusserlich unrein ist, in Wirklichkeit aber in der gewöhnlichen einfachen Weise verläuft.

Das Bestehen eines distinkten Compactumfaktors und die Wirkung desselben sind somit ganz klar. Im Lichte dieser Erkenntnis wird man aber auch die oben erörterte komplizierte Spaltung bei Kreuzungen Schwed. Binkelweizen  $\times$  Squarehead und andere mitteldichte Formen (wo statt Squarehead etc. hauptsächlich langährige Landweizentypen bei der  $F_2$ -Spaltung gebildet werden) besser verstehen können.

Ein lang- und lockerähriger Landweizen, der den hemmenden Compactumfaktor bekommt, wird nämlich Compactum. Eine Compactumform kann m. a. W. ein Landweizen sein, bei welchem der Compactumfaktor zugekommen ist. Der hier benutzte Schwed. Binkelweizen ist offenbar eine solche Com-



pactumform, ein Landweizen mit dem Compactumfaktor. Wenn ein derartiger Compactum mit Squarehead gekreuzt wird, muss die Kreuzung demnach, vom Compactumfaktor abgesehen, ganz so verlaufen, wie wenn Landweizen mit Squarehead oder anderen mitteldichten Formen gekreuzt wird. M. a. W., in der Nichtcompactumgruppe muss dieselbe Spaltung eintreten wie nach Kreuzung Landweizen  $\times$  Squarehead.

Bei Kreuzungen zwischen Landweizen und Squarehead dominiert nun oder prävaliert, nach den Versuchen mehrerer Forscher<sup>1</sup>, stets der lange, lockere Landweizentypus, und die langen, lockeren Typen werden deshalb bei der  $F_2$ -Spaltung in der Majorität. Dies erklärt nun auch vollständig, weshalb bei Kreuzung zwischen Compactum und Squarehead hauptsächlich langährige Landweizentypen statt Squarehead ausgespaltet werden. Wenn der Compactumfaktor  $C$  genannt, der lange, lockere Landweizentypus vorläufig im Besitz nur eines Verlängerungsfaktors  $L$  gedacht wird, dann wird die Bezeichnung der Kreuzung die folgende:

$$\begin{array}{rcccl}
 & \text{Schwed. Binkelweizen} & & \text{Squarehead} & \\
 & CL & \times & cl & \\
 F_2: \text{Ratio} & 9 CL & : & 3 cl & : & 3 cL & : & 1 cl \\
 & \underbrace{12 \text{ Compactum}} & & \underbrace{4 \text{ Nichtcompactum}} & & & & \\
 & \underbrace{3 \text{ Landweizen}} & & \underbrace{1 \text{ Squarehead}} & & & & 
 \end{array}$$

Das Ausspalten von überwiegenden Landweizentypen (nebst Compactum) bei Kreuzung Compactum  $\times$  Squarehead ist also nicht schwer zu erklären. Die Schwierigkeit ist aber, die Spaltung in der Nichtcompactumgruppe genau auseinanderzusetzen, das Verhältnis zwischen langährigen Typen und Squarehead festzustellen. Dies Verhältnis ist in keinem der hier beschriebenen Fälle das einfache 3 : 1, wie oben nur zur vorläufigen leichteren Orientierung in der Frage angenommen wurde; die Squareheadtypen sind dazu viel zu selten. Z. B. bei der Kreuzung Compactum  $\times$  0315, Pudelweizen, zeigt schon die einfache okuläre Beobachtung ganz sicher, dass unter den Nichtcompactumindividuen 0315-ähnliche Typen viel seltener als 1 auf 4 sind. Dies ist aber sicher ein sehr häufiger Fall (wenn nicht sogar die Regel) bei Kreuzungen zwischen Landweizen und Squarehead oder ähnlichen mitteldichten Typen, was u. a. aus meinen diesbezüglichen Kreuzungen deutlich hervorgeht. Nach v. TSCHERMAK<sup>2</sup>, der bei eigenen Versuchen gleiche Erfahrungen gemacht hat, ist das seltene oder gar ausbleibende Wiederkehren von Squareheadtypen nach Kreuzung Squarehead  $\times$  Landweizen schon lange praktischen Züchtern bekannt. Offenbar ist dann der Landweizen vom Squarehead in zwei oder mehrere in derselben Richtung wirkende Faktoren getrennt.

Wir werden jetzt sehen, inwieweit die genaue Messung der Ähreninternodienlänge dazu beitragen kann, diese Frage zu lösen.

<sup>1</sup> Vgl. v. TSCHERMAK in FRUWIRTH, l. c. S. 168.

<sup>2</sup> In FRUWIRTH l. c. S. 169.



Bei der Kreuzung *Schwed. Binkelweizen*  $\times$  0315, *Pudelweizen*, wurden die Nichtcompactumpflanzen sowohl der  $F_2$  als der  $F_3$  gemessen. Da jede Pflanze meistens mit mehreren Ähren versehen ist und jede Ähre gemessen werden muss, wird es natürlich eine äusserst umfassende Arbeit, sämtliche Pflanzen der  $F_3$ -Nachkommenschaften zu untersuchen. Ich habe mich deshalb vorläufig darauf beschränken müssen, nur diese eine Kreuzung in  $F_3$  vollständig zu untersuchen. Die Zahl der bei dieser Kreuzung gemessenen Nichtcompactumpflanzen und 0315-Pflanzen ist 1112, der gemessenen Ähren 3934, und da bei jeder Ähre zuerst die Zahl der Internodien gezählt, dann die Länge sämtlicher Internodien gemessen werden muss, wird die Arbeit natürlich zeitraubend genug.

Wie oben S. 34 gesagt, schienen bei der okulären Beobachtung der  $F_2$  der Kreuzung 0315, *Pudelweizen*  $\times$  *Schwed. Binkelweizen*, Linie *B.*, von den 28 Pflanzen der Nichtcompactumgruppe höchstens zwei etwa den Typus von 0315 zu wiederholen, während die übrigen mehr langährig waren. Die Vermutung liegt deshalb nahe, dass hier das Verhältnis 15 : 1 bestehe; beim Compactum sollten dann zwei Verlängerungsfaktoren vorhanden sein, die bei 0315 fehlen. Die Messung der  $F_2$ -Pflanzen (vgl. Tabelle 1, S. 35) zeigt aber, dass von den 28 Pflanzen 7 in die Kurve der Elternsorte 0315 eingreifen. Infolge der starken Modifikationsfluktuation lässt sich jedoch nicht sagen, wie viele von diesen sieben Pflanzen mit 0315 wirklich übereinstimmen; möglicherweise sind sie zum Teil Minusmodifikationen von längeren Abstufungen. Es müssen deshalb die Kurven der Nachkommenschaften der  $F_2$ -Pflanzen mit der Kurve von 0315 desselben Jahres verglichen werden. Dieser Vergleich wird durch Tabelle 2 veranschaulicht.

Von den 28 Nachkommenschaften zeigen Nr 1 und 2 (Gruppe 1) in bezug auf den Mittelwert am nächsten Übereinstimmung mit 0315. Es sind dies gerade die Nachkommenschaften, die aus den zwei 0315-ähnlichen  $F_2$ -Pflanzen stammen und die bei der okulären Beobachtung als relativ konstant kurzährig und als im Ganzen am meisten 0315-ähnlich bezeichnet wurden (vgl. S. 36). Wie aber hervorgehoben wurde, glichen diese Nachkommenschaften 0315 nicht vollständig, sondern schienen etwas weniger dichtährig zu sein. Dies kann aber damit zusammenhängen, dass die Ähren, wenn die Ährchen kleiner sind, schmaler werden und dadurch bei derselben Internodienlänge lockerer aussehen. In Wirklichkeit ist aber, wie die Messung zeigt, die mittlere Internodienlänge bei diesen Nachkommenschaften nicht grösser als bei 0315, sondern etwa dieselbe.

Keine von den übrigen in die Kurve der 0315 eingreifenden  $F_2$ -Pflanzen (Nr 3--7; vgl. Tab. 1) ergaben mit 0315 übereinstimmende Nachkommenschaften, sondern erwiesen sich, in Bestätigung der okulären Beobachtung, als Minusmodifikationen längerer Abstufungen, indem ihre Mittelwerte entschieden grösser als bei 0315 sind. In bezug auf den Mittelwert weicht Nr 5 am wenigsten von 0315 ab; Differenz 0,20 mm. Durch Berechnung der Standardabweichung für die Kurven der 0315 und Nr 5 ergibt sich aber ein mittlerer Fehler für diese Differenz von nur  $\pm 0,031$  mm. Die Differenz ist also etwa 6,5 mal grösser als ihr mittlerer Fehler und kann

TABELLE 2.

Kreuzung *Sched. Binkelweizen* × 0315. Ähreninternodienlänge bei den Pflanzen der  $F_3$ -Nachkommenschaften der Nichtcompactungsgruppe.

Ähreninternodienlänge der Mutterpflanze aus $F_2$ mm.		Nr der $F_2$ -Pflanzen und ihrer Nachkommenschaften		Gesamtzahl von Pflanzen		Anzahl von Pflanzen zwischen den untenstehenden, in mm. ausgedrückten Klassengrenzen																			Mittlere Ähreninternodienlänge mm.																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					
3.21	0315	78	—	—	—	3	6	19	27	10	5	5	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—



infolgedessen als ganz sicher betrachtet werden; d. h. N:r 5 hat durchschnittlich längere Internodien als 0315. Bei N:r 7 ist die Differenz von 0315 zwar grösser, 0,36 mm., die Individuenzahl aber gering, und der mittlere Fehler der Differenz deshalb grösser,  $\pm 0,065$  mm. Die Differenz ist in diesem Falle etwa 5,5 mal grösser als ihr mittlerer Fehler und somit auch als sicher zu betrachten. In derselben Weise ist die Differenz der N:r 3, 4 und 6 von 0315 ausser Zweifel gestellt.

Von den übrigen Nachkommenschaften, N:r 8—28, deren Mutterpflanzen sämtlich ausserhalb der Kurve von 0315 lagen (vgl. Tabelle 1), ist keine mit 0315 identisch. Eigentümlich verhält sich indessen N:r 8, deren Mittelwert etwa derselbe wie bei 0315 ist. Von einer Identität mit 0315 kann jedoch keine Rede sein, da Individuen mit erheblich längeren Internodien als bei 0315 vorhanden sind.

Von den 28 Nachkommenschaften zeigen also nur 2 in bezug auf Mittelwert und Variantenverteilung Übereinstimmung mit 0315. In Bestätigung der okulären Beobachtung ergibt sich in  $F_2$  das Verhältnis 26 mit längeren Internodien als bei 0315 (a):2 etwa wie 0315 (b) = 13 a:1 b. Höchst wahrscheinlich besteht also bei der  $F_2$ -Spaltung das Verhältnis 15:1.

Die Spaltung der  $F_3$ -Nachkommenschaften, soweit sie beurteilt werden kann, steht mit dieser Annahme in Übereinstimmung. Die Spaltung der  $F_3$ -Nachkommenschaften lässt sich aber aus der verschiedenen Ähreninternodienlänge der Pflanzen natürlich nicht sicherer ermitteln als die  $F_2$ -Spaltung. Die Modifikationsfluktuation ist nämlich so stark, dass auch ziemlich verschiedene Typen mit ihren Modifikationen leicht stark in einander eingreifen, und es lässt sich deshalb aus den blossen Zahlen im ersten Moment kaum so viel über die Spaltungsweise ersehen, wie schon die okuläre Beobachtung zeigte. Das Auftreten in den meisten Nachkommenschaften von Individuen mit viel längeren Internodien als bei den extremen Individuen von 0315 wird jedoch zunächst durch die Messung bestätigt. Auch die okulär beobachtete grössere oder geringere Spaltung bei verschiedenen Nachkommenschaften wird durch die Zahlen angedeutet.

Wenn aber die beiden Methoden Hand in Hand gehen, bekommt man ein viel klareres Bild des Ganzen. Es verhält sich nämlich so, dass die Modifikationsfluktuationen der Internodienlänge, nicht aber die erblichen Variationen derselben, mit der mehr oder weniger kräftigen Entwicklung der Pflanzen zusammenhängen: bei schwächeren Pflanzen, ebenso wie bei den schwächeren Seitenähren, werden die Internodien kürzer. Die individuelle Modifikation ist ganz derselben Art wie die partielle. Die Spaltung der erblichen Internodienlänge verläuft dagegen ganz unabhängig von der Kräftigkeit der Pflanzen. Infolgedessen kann eine spaltende Nachkommenschaft bei der okulären Beobachtung ganz anders gestaltet als die Elternlinie 0315 erscheinen und von dieser weit deutlicher verschieden sein, als was die Variantenzahlen und die Mittelwerte der Nachkommenschaften hervortreten lassen. Bei der konstanten 0315 haben die schwächeren Pflanzen freilich kürzere Ähreninternodien, aber die Ährchen sind dann in entsprechendem Masse kleiner, und der Ährentypus behält deshalb einen relativ wenig abgeänderten Charakter; das Ganze



gibt den Eindruck von Konstanz. Bei einer deutlich spaltenden Nachkommenschaft können dagegen die Individuen mit kürzeren Internodien ebenso kräftig sein wie die Individuen mit längeren Internodien; die Individuen beider Kategorien sind kräftiger und schwächer. Infolgedessen kann die Spaltung, trotz der erheblichen transgressiven Modifikationsfluktuation, bei der okulären Beobachtung ganz auffallend sein, wie schon oben S. 36 beschrieben wurde.

Es wurde S. 36 erwähnt, dass ein Teil der deutlich spaltenden  $F_3$ -Nachkommenschaften kurzährige, 0315-ähnliche Typen in grösserer Anzahl als die  $F_2$  ausspalteten. Es gilt dies besonders N:r 3, 5, 10, 13, 16 und 19 (= Gruppe 2). Wie die durch Messung erhaltenen Zahlen zeigen, sind die Mutterpflanzen dieser Nachkommenschaften durch relativ kurze Internodien gekennzeichnet (3,59, 3,65, 3,71, 3,80, 3,92 und 4,10 mm.). Ferner gibt es bei diesen Nachkommenschaften keine der langährigsten Pflanzen (Maximum 4,1 mm. Internodienlänge). In Übereinstimmung mit dem relativ grossen Gehalt von kurzährigen Typen und dem Mangel an den aller langährigsten Typen sind die Mittelwerte dieser Nachkommenschaften nicht so sehr von demjenigen der 0315 verschieden wie bei den meisten übrigen (3,41—3,61 mm.).

Die  $F_2$ -Spaltung etwa zu wiederholen, d. h. langährige — intermediäre, aber seltene 0315-ähnliche Typen auszuspalten, schienen vor allem N:r 21, 22, 26, 27 und 28 (= Gruppe 3). Wie die Zahlen zeigen, sind die Internodien der hierher gehörigen Mutterpflanzen länger als bei der vorigen Gruppe (4,13, 4,14, 4,42, 4,55 und 4,94 mm.), und auch enthalten diese Nachkommenschaften selbst Individuen mit noch ziemlich viel längeren Internodien als bei der vorigen Gruppe (bis 4,7 mm.). In Übereinstimmung mit dem ganzen Charakter dieser Nachkommenschaften sind auch ihre Mittelwerte für Internodienlänge grösser (3,67—4,05 mm.).

Ganz ohne 0315-ähnliche Typen und nur im Besitz von langährigen bis mehr oder weniger weit reichenden intermediären Typen zeigten sich die Nachkommenschaften 4, 17, 18, 20, 23 und 25 (= Gruppe 4). In dieser Gruppe finden sich die aller langährigsten Pflanzen und die höchsten Mittelwerte für Internodienlänge (3,89—4,17 mm.). Zwar greifen auch diese Nachkommenschaften, mit Ausnahme der N:r 18, in die Variationskurve der 0315 ein (vgl. Tabelle 2), und der ganz sichere Nachweis, dass keine »0315-Typen« unter den Pflanzen dieser Nachkommenschaften vorkommen, liesse sich deshalb wieder erst durch Prüfung der transgressiven Pflanzen auf das Verhalten ihrer Nachkommenschaft bringen. Ebenso wie aber die okuläre Beobachtung die  $F_2$ -Spaltung richtig beurteilen konnte, ebenso lässt sich auch hier ziemlich sicher voraussagen, dass keine von diesen Pflanzen eine mit 0315 übereinstimmende Nachkommenschaft ergeben wird.

Von den übrigen Nachkommenschaften N:r 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15 und 24 lässt sich, zum Teil wegen zu geringer Individuenzahl, nicht mit Sicherheit sagen, welcher Kategorie sie gehören.

Obwohl nun, infolge der kleinen Anzahl von Individuen in vielen  $F_3$ -Nachkommenschaften und der starken transgressiven Modifikationsfluktuation, die Zahlenverhältnisse der langährigen und der 0315-ähnlichen Pflanzen in den spaltenden  $F_3$ -

Nachkommenschaften ebenso wenig wie in der  $F_2$  genau bestimmt werden können, und die Abgrenzung der Gruppen 2—4 deshalb nur andeutungsweise möglich ist, so steht jedoch alles, was über das Verhalten der  $F_3$  hat sicher festgestellt werden können, wie gesagt in der besten Übereinstimmung mit der Annahme, dass die Spaltung innerhalb der Nichtcompactumgruppe, wenigstens in der Hauptsache, von zwei Verlängerungsfaktoren, »Landweizenfaktoren« ( $L_1$   $L_2$ ) bedingt sei, die jeder für sich mehr verlängerte Internodien als bei 0315 bewirken und welche vom Compactum eingeführt werden. Die Kreuzung wäre demnach folgenderweise zu bezeichnen:

Schwed. Binkelweizen		0315, Pudelweizen
Compactum		Squareheadähnlich, Ähren mitteldicht
$C$ $L_1$ $L_2$	$\times$	$c$ $l_1$ $l_2$

In der Nichtcompactumgruppe der  $F_2$  kann dann von 16 Individuen nur eines ( $l_1$   $l_2 \times l_1$   $l_2$ ) mit 0315 übereinstimmen und in seiner Nachkommenschaft den Charakter derselben wiederholen, während die übrigen 15 langähriger sein und in ihrer Nachkommenschaft teilweise oder ausschliesslich langährigere Individuen erzeugen müssen.

Von den 28  $F_3$ -Nachkommenschaften haben wir nun zwei gefunden, die sowohl im äusseren Typus mit 0315 ziemlich gut übereinstimmen als auch etwa dieselbe mittlere Internodienlänge zeigten. Es sollten diese also den Nachkommenschaften der homozygoten Verbindung  $l_1$   $l_2 \times l_1$   $l_2$  entsprechen.

Von den 16 Verbindungen sollen ferner vier ( $L_1$   $l_2 \times l_1$   $l_2$ ,  $l_1$   $l_2 \times L_1$   $l_2$ ,  $l_1$   $L_2 \times l_1$   $l_2$  und  $l_1$   $l_2 \times l_1$   $L_2$ ) die einfache Spaltung 3 : 1, d. h. einen 0315-Typus auf drei langährigere, ergeben. Hierher gehört ganz offenbar die Gruppe 2 (vgl. oben), in welcher 0315-ähnliche Individuen in deutlich grösserer Zahl als in  $F_2$  ausgespaltet wurden. Vier andere Verbindungen sollen die  $F_2$ -Spaltung 15 : 1 wiederholen ( $L_1$   $L_2 \times l_1$   $l_2$ ,  $L_1$   $l_2 \times l_1$   $L_2$ ,  $l_1$   $L_2 \times L_1$   $l_2$  und  $l_1$   $l_2 \times L_1$   $L_2$ ), wie die Gruppe 3 (vgl. oben) es zweifellos tut. Sieben Verbindungen ( $L_1$   $L_2 \times L_1$   $L_2$ ,  $L_1$   $L_2 \times L_1$   $l_2$ ,  $L_1$   $L_2 \times l_1$   $L_2$ ,  $L_1$   $l_2 \times L_1$   $L_2$ ,  $l_1$   $L_2 \times L_1$   $L_2$ ,  $L_1$   $l_2 \times L_1$   $l_2$  und  $l_1$   $L_2 \times l_1$   $L_2$ ) sollen schliesslich keine 0315-Typen, sondern nur langährigere Typen ergeben, wie die Gruppe 4. Unter den hierher gehörigen Nachkommenschaften entspricht Nr. 23, mit relativ begrenzter Variation, möglicherweise einer der homozygoten Verbindungen, z. B.  $L_1$   $l_2 \times L_1$   $l_2$ .

Die Annahme von zwei Verlängerungsfaktoren wird nun auch durch das Verhalten der Spaltung innerhalb der Compactumgruppe weiter bestätigt. Wie oben S. 37 hervorgehoben wurde, ergaben von den 43 spaltenden Compactumpflanzen der Kreuzung Schwed. Binkelweizen  $\times$  0315, Linie B, 2 nur Compactum und mitteldichte, 0315-ähnliche Typen (nach der Verbindung  $C$   $l_1$   $l_2 \times c$   $l_1$   $l_2$ ), was mit dem erwarteten Verhältnisse 16 : 1 in guter Übereinstimmung steht.

Auch die bei der Kreuzung Schwed. Binkelweizen  $\times$  0406 erhaltenen Tatsachen (vgl. S. 38—39) stehen mit der Annahme von zwei Verlängerungsfaktoren beim Schwed.



Binkelweizen durchaus in Übereinstimmung. In  $F_2$  sind die 0406-ähnlichen Pflanzen sowohl bei Linie  $A$  als bei Linie  $B$  viel zu selten, um aus dem Mendeln nur eines Faktors hergeleitet werden zu können. Bei der in  $F_3$ , wenn auch nur okulär, untersuchten Linie  $B$  ergaben von 37 Pflanzen nur 3 mit 0406 etwa übereinstimmende Nachkommenschaften. Hier besteht also das Verhältnis  $37 : 3 = 12,2 : 1$ . Auch bei dieser Kreuzung ist also offenbar das Verhältnis  $15 : 1$  vorhanden. Das übrige Verhalten der  $F_3$ -Nachkommenschaften bestätigt dies noch mehr, was aus dem S. 38—39 Gesagten genügend hervorgeht.

Von einer ganz vollständig durchgeführten Analyse kann zwar, auch bei der Kreuzung Schwed. Binkelweizen  $\times$  0315, nicht die Rede sein. Viele  $F_3$ -Nachkommenschaften enthalten zu wenig Pflanzen, um überhaupt in die eine oder andere Gruppe eingeordnet werden zu können; um die genauen Zahlenverhältnisse bei den spaltenden  $F_3$ -Nachkommenschaften zu ermitteln, wäre ferner eine Untersuchung der Nachkommenschaften jeder einzelnen  $F_3$ -Pflanze aufs neue notwendig, was ausserhalb der praktischen Möglichkeiten liegt.

Trotz dieser Unvollständigkeit der Analyse kann jedoch behauptet werden, dass die Annahme von zwei Verlängerungsfaktoren, welche die Spaltung in der Nichtcompactumgruppe in der Hauptsache bestimmen, sehr grosse Wahrscheinlichkeit für sich hat, denn soweit der Verlauf der Spaltung in  $F_2$  und  $F_3$  hat verfolgt werden können, ist er nach dem oben Ausgeführten ganz ein solcher, wie er mit dieser Annahme sein sollte. Ganz so, wie nach Kreuzung einer rotkörnigen, zweifaktorigen, bimeren (d. h. mit zwei gleichsinnigen Faktoren für die rote Farbe) Linie mit einer weisskörnigen die weissen Individuen in  $F_2$  selten sind (1 auf 16), aber dann bei gewissen  $F_3$ -Nachkommenschaften in weit grösserer Zahl auftreten (1 auf 4), sind hier die 0315-ähnlichen Individuen in  $F_2$  selten, treten aber bei gewissen  $F_3$ -Nachkommenschaften sehr deutlich in grösserer Zahl auf. Obwohl die Schwierigkeiten für die sichere Beurteilung der Spaltung und für den exakten Nachweis des Verlaufs derselben infolge der erheblich transgressiven Modifikation hier weit grösser sind, ist die Spaltungsweise in den beiden Fällen eine so offenbar parallele, dass an dem gesetzmässigen Verlauf der Spaltung infolge bestimmter mendelnder Faktoren auch hier jedenfalls gar nicht gezweifelt werden kann. Für diese Gesetzmässigkeit der Spaltung spricht übrigens auch noch das deutlich übereinstimmende Verhalten in  $F_2$  der verschiedenen Linien derselben Kreuzung sowie auch der beiden Kreuzungen Schwed. Binkelweizen  $\times$  0315 und Schwed. Binkelweizen  $\times$  0406.

Es soll nur nicht behauptet werden, dass die beiden genannten Verlängerungsfaktoren und der Compactumfaktor die einzigen auf die Internodienlänge einwirkenden Faktoren seien, welche die Compactumrasse z. B. von 0315 trennen und die Spaltung bestimmen. Es ist nicht ausgeschlossen, sondern im Gegenteil sogar ziemlich wahrscheinlich, dass nebst diesen distinkteren Faktoren noch andere vorkommen, die die Elternrassen trennen und eine, wenn auch mehr geringfügige, Variation in der Kreuzungsdendenz bewirken. Es ist sehr möglich, dass die



beiden mit 0315 nahe übereinstimmenden  $F_3$ -Nachkommenschaften 1 und 2 (vgl. Tabelle 2) nicht ganz konstant sind, sondern eine geringe Nebenspaltung (vgl. Einleitung S. 8) noch aufweisen. Nach den erhaltenen Zahlen für Internodienlänge scheinen bei mehreren Nachkommenschaften Individuen mit etwas kürzeren Internodien als bei 0315 gebildet zu werden (vgl. Tabelle 2). Inwieweit dies wirklich der Fall ist, wird eine nähere Untersuchung der mittleren Internodienlänge bei den Nachkommenschaften dieser Individuen zeigen können. Es ist natürlich denkbar, dass bei 0315 Längsfaktoren vorhanden sein können, die bei der Compactumrasse fehlen, und die Möglichkeit zur Bildung von Nichtcompactumformen, kurzähriger als 0315, durch die Kreuzung ist damit gegeben.

Durch die Faktorenanalyse sind also zwar vorläufig nur drei distinktere, auf die Internodienlänge einwirkende Faktoren mit einiger Sicherheit festgestellt worden: teils ein scharf diskontinuierlich wirkender Compactumfaktor, der eine Abkürzung der Internodien bewirkt, teils zwei weniger scharf wirkende Faktoren entgegengesetzter Art, die jeder für sich imstande sind, eine Verlängerung der Internodien zu bewirken. Es lässt sich aber, wie oben angedeutet, kaum daran zweifeln, dass die vielen Unterschiede an Internodienlänge beim Weizen durch noch andere Faktoren als die hier auseinandergesetzten bewirkt werden.

Über die genaue Wirkung der beiden  $L$ -Faktoren lässt sich noch wenig aussagen. Am wahrscheinlichsten nach den bis jetzt vorliegenden Tatsachen scheint es mir, dass jeder Faktor für sich nur mässig verlängerte Internodien bewirke, und dass durch Vereinigung von beiden eine weitere Verlängerung der Internodien zustandekomme. Die beiden Faktoren hätten dann eine cumulative Wirkung, ebenso wie die Faktoren des Rispentypus beim Hafer (vgl. Teil I, S. 99).

Dafür spricht u. a. der Umstand, dass bei der Kreuzung Schwed. Binkelweizen  $\times$  0315 die Mutterpflanzen der Nachkommenschaften der Gruppe 2, wo nach dem oben Gesagten nur einer der  $L$ -Faktoren vorhanden ist, sämtlich kürzere Internodien zeigen als die Mutterpflanzen der Gruppe 3, wo beide  $L$ -Faktoren zusammen vorkommen müssen. Bei den Mutterpflanzen mit einem  $L$ -Faktor ist die Internodienlänge 3,59, 3,65, 3,71, 3,80, 3,92 und 4,10 mm.; wo zwei  $L$ -Faktoren vorhanden sind, ist die Internodienlänge 4,13, 4,14, 4,42, 4,55 und 4,94 mm.

Bei der Kreuzung Schwed. Binkelweizen  $\times$  0406 finden wir jedoch ein etwas abweichendes Verhältnis (vgl. S. 38). Diejenigen  $F_2$ -Pflanzen, welche zahlreiche kurzährige, 0406-ähnliche Nachkömmlinge ausspalten und demnach nur in einem  $L$ -Faktor von 0406 verschieden sind, zeigen die Internodienlänge 3,44, 3,58, 3,70, 3,75, 3,98, 4,16, 4,20 und 4,26 mm. Diejenigen  $F_2$ -Pflanzen dagegen, die in ihrer Nachkommenschaft die  $F_2$ -Spaltung wiederholen, d. h. seltene 0406-ähnliche ausspalten und demnach nach der hier gemachten Annahme von 0406 in zwei  $L$ -Faktoren verschieden sind, zeigen die Internodienlänge 4,09, 4,12, 4,17, 4,20, 4,20, 4,22, 4,30, 4,30, 4,35, 4,58 und 4,58 mm. Aus diesen Zahlen wäre eher zu schliessen, dass der eine  $L$ -Faktor etwa dieselbe Wirkung wie die beiden Faktoren zusammen ausübte.

Als ganz sicher kann jedenfalls betrachtet werden, dass einer von den  $L$ -Fak-

toren allein schwächere Wirkung als die beiden Faktoren hat. Ob das auch mit dem zweiten Faktor der Fall ist, wobei die beiden Faktoren cumulative Wirkung haben sollten, oder ob dieser Faktor ebenso stark wirkt wie beide zusammen, d. h. den schwächeren Faktor einfach verdeckt, wird dagegen nur durch fortgesetzte Untersuchungen genau festgestellt werden können.

Schliesslich wird hier wie sonst selbstverständlich nichts ausgesagt über die gemeinsamen Faktoren, die bei allen bekannten Formen vorhanden sind. Nur die differierenden Faktoren können analysiert werden. Man kann also nur sagen, dass Compactum und Landweizen vom Squarehead durch gewisse Faktoren abweichen, gewisse Faktoren besitzen, die beim Squarehead fehlen. Über die Faktoren der gemeinschaftlichen Grundlage, in diesem Falle des Squarehead, wird nichts gesagt. Man hätte für die gemeinsamen Faktoren, wie JOHANNSEN es ausdrückt, in alle Formeln das Zeichen X einzusetzen. Diese Sache ist ja schon lange ganz klar, muss aber immer wieder betont werden, da über das Negative in der Bezeichnungsweise sich noch immer Missverständnisse geltend machen, so dass z. B. in die Bezeichnung  $c l_1 l_2$  für Squarehead die Bedeutung eingelegt werden könnte, dass beim Squarehead alle Faktoren für Internodienlänge fehlen, was natürlich mit dieser Bezeichnung gar nicht gemeint wird.

Bei den früheren kürzeren Darstellungen meiner diesbezüglichen Untersuchungen ging ich unrichtigerweise davon aus, dass die auf die Internodienlänge einwirkenden Faktoren sämtlich derselben Art seien. Zuerst<sup>1</sup> wurde von die Internodien abkürzenden Faktoren gesprochen, später<sup>2</sup> wurden sämtliche Faktoren als Verlängerungsfaktoren betrachtet, in welchem letzteren Falle Compactum negativ sein sollte. Die richtige Erklärung liegt aber ganz zweifellos zwischen diesen beiden, indem es sowohl abkürzende als verlängernde Faktoren gibt. Bei den beiden ersten Erklärungsversuchen musste von den Dominanzverhältnissen weggesehen werden, sowohl der Dominanz des Compactum über Landweizen als der Dominanz des Landweizens über Squarehead. Ich wurde erstens dadurch geirrt, dass die Dominanz des Compactum bei den Kreuzungen anderer Forscher (SPILLMAN, BIFFEN u. a.) viel weniger vollständig als bei meinen Kreuzungen zu sein schien, weshalb ich keinen genügend grossen Wert auf die Dominanz überhaupt legte. Zweitens hatte ich gefunden, dass nach Kreuzungen zwischen verschiedenen Squareheadformen und anderen dichtährigeren Formen einzelne ziemlich compactumähnliche Formen ausgespaltet werden konnten, ebenso wie eine kurze Angabe von RIMPAU über das Entstehen von Compactum aus Kreuzung langähriger Formen berichtet. Diese Tatsachen schienen mir zur Annahme von Compactum als dem einfachen, durch Fehlen gewisser Einheiten gekennzeichneten Typus zu führen.

Ich bin aber immer mehr von der grossen Tragweite überzeugt worden, die der Theorie BATESONS zukommt, dass die Dominanz (oder Prävalenz) im allgemeinen

<sup>1</sup> Einige Ergebnisse von Kreuzungen etc. Botan. Notiser 1908, S. 279.

<sup>2</sup> Kreuzungsuntersuchungen, Teil I, S. 104.



das positive Glied des Merkmalspaares, das Vorhandensein des Faktors, bezeichnet. Die hier gemachte Erklärung steht nun in der besten Übereinstimmung sowohl mit den Dominanzverhältnissen als mit anderen nunmehr näher festgestellten Tatsachen. Dagegen wird besonders die von mir 1909 vorläufig gemachte Annahme durch die nachher gewonnenen Resultate der zwei letzten, weit vollständiger als früher untersuchten Kreuzungen entschieden widerlegt. Die compactumähnlichen Formen, die aus Kreuzung gewisser Squareheadformen mit anderen mitteldichten Formen entstanden sind, haben offenbar mit dem echten Compactum nichts zu tun, obwohl eine nicht geringe äusserliche Ähnlichkeit besteht. Bei Farben ist ja auch eine Ähnlichkeit zwischen den negativen Weissen und den durch Hemmungsfaktoren bewirkten Weissen vorhanden. Nur ist bei der Internodienlänge die Wirkung des Hemmungsfaktors so stark, dass durch denselben ein noch dichter Compactumtypus bewirkt wird als bei den mir bisher bekannten »negativen Compactumformen«, während umgekehrt bei den Farben die durch Hemmungsfaktoren verursachten Weissen nicht so rein weiss sind wie die negativ Weissen.

Unter den echten, durch den Hemmungsfaktor  $C$  verursachten Compactumformen sind nun zwei Kategorien zu unterscheiden:

1.  $C L_1 L_2$ , wo die  $L$ -Faktoren, von  $C$  verdeckt, hypostatisch, vorhanden sind. Daneben auch  $C L_1 l_2$ ,  $C l_1 L_2$ , die nur je einen der  $L$ -Faktoren enthalten.
2.  $C l_1 l_2$ , die nur den Compactumfaktor besitzt.

Kreuzungen von Compactum  $C L_1 L_2$  mit einem Landweizen von der Konstitution  $c L_1 L_2$  müssen natürlich die einfache Spaltung 3 Compactum : 1 Landweizen ergeben, wenn Compactum dominiert. Derselbe Compactum  $C L_1 L_2$ , mit Squarehead  $c l_1 l_2$  gekreuzt, muss kompliziert aufspalten, mit Bildung von Compactum, Landweizen und Squarehead, wie bei meinen Kreuzungen.

Wenn dagegen ein Compactum von der Konstitution  $C l_1 l_2$  mit dem Landweizen  $c L_1 L_2$  gekreuzt wird, dann muss Squarehead  $c l_1 l_2$  in geringem Prozent als Neuheit entstehen. Ob die RÜMKERSchen Fälle vom Entstehen von Squarehead aus Kreuzung Compactum  $\times$  Landweizen<sup>1</sup> hierher gehören, darüber kann ich nicht entscheiden. Jedenfalls liegt diese Möglichkeit vor. Solche Fälle, wo aus Kreuzung Compactum  $\times$  Landweizen Squareheadformen entstehen, können also häufig vorkommen; es hängt dies von der Konstitution der betreffenden Compactumformen ab. Die Bildung von Squarehead aus solchen Kreuzungen bezeichnet also nur eine Neukombination schon existierender Differenzpunkte; wie diese zuerst entstanden sind, wird durch die Kreuzungen nicht aufgeklärt.

Das oft, speziell in vielen Fällen von v. TSCHERMAK<sup>2</sup>, konstatierte Auftreten von Squareheadformen in der  $F_2$  aus Kreuzung verschiedener langähriger Formen lässt sich wohl in den einfachsten Fällen aus der Verbindung  $L_1 l_2 \times l_1 L_2$  herleiten, welche in  $F_2$   $1/16$  Squarehead,  $l_1 l_2$ , ergibt. Wahrscheinlich gibt es aber, wie oben

<sup>1</sup> RÜMKER l. c.

<sup>2</sup> In FREUWIRTH, l. c. S. 169.



gesagt wurde, mehrere  $L$ -Faktoren, und der Vorgang mag deshalb unter Umständen mehr kompliziert sein.

#### 4. Der Compactumfaktor verwandelt eine diskontinuierliche Variation in eine kontinuierliche.

Es wurde oben hervorgehoben, dass durch den Compactumfaktor die beiden  $L$ -Faktoren verdeckt, unsichtbar gemacht werden, so dass  $CL_1L_2$  ebenso wie  $Cl_1l_2$  ganz echten Compactum bezeichnen. Zwar ist es nicht anzunehmen, dass die Wirkung der  $L$ -Faktoren von  $C$  ganz vollständig unterdrückt werde; jedenfalls ist aber die äussere sichtbare Wirkung der  $L$ -Faktoren viel geringer, wenn  $C$  vorhanden ist, als wenn  $C$  fehlt. Dieser Umstand ist aus allgemeinem theoretischem Gesichtspunkte besonders zu beachten. Man könnte sich im voraus vielleicht vorstellen, dass die abkürzende äusserliche Wirkung des  $C$ -Faktors auf die Internodienlänge in verschiedenen Fällen etwa die gleiche wäre; dann wäre der  $CL_1L_2$ -Compactum ebenso leicht vom  $Cl_1l_2$ -Compactum zu trennen wie Landweizen vom Squarehead. Dies ist aber entschieden nicht der Fall. Der Compactumfaktor muss auf die langährigen Landweizen eine absolut genommen weit stärker abkürzende Wirkung als auf die Squareheadformen haben, denn schon die erste äussere Beobachtung zeigt gleich, dass die  $F_3$ -Nachkommenschaften »konstant Compactum« (unter denen alle vier Konstitutionen  $CL_1L_2$ ,  $CL_1l_2$ ,  $Cl_1L_2$  und  $Cl_1l_2$  vorhanden sein müssen), obwohl kleinere Differenzen an Ährendichtigkeit ganz deutlich sind (vgl. S. 36—37, 38—39), jedoch viel weniger verschieden sind als Squarehead ( $l_1l_2$ ) und Landweizen ( $L_1L_2$ ) derselben Kreuzung. Die Compactumgruppe erscheint als eine viel homogenere Gruppe als die Nichtcompactumgruppe.

Bei der Beschreibung des Verhaltens der  $F_2$  von der Kreuzung Schwed. Binkelweizen  $\times$  0315 (vgl. S. 34) wurde hervorgehoben, dass von den ausgespalteten Compactumpflanzen einige auffallend dichtähriger als die Compactumelternrasse waren. Wie Tabelle 1 zeigt, geht bei der Linie  $A$  dieser Kreuzung die  $F_2$ -Spaltung deutlich ausserhalb der Grenzen der Elternrasse, indem von den 36 Compactumpflanzen 8 Pflanzen kürzere Internodien (Klassen 1,4—1,5 mm.) als die Extreme des Elters (Klasse 1,6 mm.) besitzen. Wenn die  $L$ -Faktoren von dem  $C$ -Faktor nicht vollständig verdeckt werden, dann ist nun eine solche Bildung dichter, überschreitender Abstufungen selbstverständlich. Von Kreuzung  $CL_1L_2 \times cl_1l_2$  muss nämlich die neugebildete Kombination  $Cl_1l_2$ , wo die Verlängerungsfaktoren fehlen, kürzere Internodien ergeben als die Elternkombination  $CL_1L_2$ . Die  $F_2$ -Zahlen zeigen aber zugleich, dass die Unterschiede in der Compactumgruppe doch für die äusserliche, okuläre Beobachtung unbedeutend sind. Die ganze Variation in der Compactumgruppe liegt, trotzdem dass hier auch die Heterozygoten  $Ce$  eingerechnet sind, zwischen 1,4 mm. und 2,2 mm., d. h. in 9 Klassen; die Nichtcompactumgruppe umfasst dagegen bei geringerer Anzahl Individuen 15 Klassen, 3,5 mm.—4,9 mm. Bei der Linie  $B$ , wo leider die Compactumgruppe vor der Aussaat nicht gemessen werden konnte, umfasst die Nichtcompactumgruppe sogar 18 Klassen, 3,2 mm.—4,9 mm.

Bei der Kreuzung Schwed. Binkelweizen  $\times$  0406 verhält sich die  $F_2$  in entsprechender Weise. Bei der Linie *A* umfasst die Compactumgruppe nur die 9 Klassen 1,4 mm.—2,2 mm., die Nichtcompactumgruppe dagegen 15 Klassen, 3,6 mm.—5,0 mm. Bei der Linie *B* umfasst die Nichtcompactumgruppe ebenfalls 15 Klassen, 3,3 mm.—4,7 mm.

Kein Zweifel kann also darüber bestehen, dass die okuläre Beobachtung richtig ist: in der Compactumgruppe sind die absoluten Unterschiede an Internodienlänge viel geringer als in der Nichtcompactumgruppe.

Durch Untersuchung der  $F_3$  der Kreuzung Schwed. Binkelweizen  $\times$  0315 geht dies noch deutlicher hervor. Zwar wurden nur in der Nichtcompactumgruppe die sämtlichen 28  $F_3$ -Nachkommenschaften gemessen; von den 23 »konstant Compactum« wurden dagegen nur einerseits die anscheinend dichtährigste Nachkommenschaft, andererseits zwei Nachkommenschaften mit dem anscheinend am meisten ausgezogenen Compactumtypus ausgewählt und gemessen. Die erhaltenen extremen Compactumklassen waren dabei 1,3 mm. und 2,1 mm. (über die Messung siehe Tabelle 3), d. h. die ganze Variation der Compactumtypen dehnt sich kaum über mehr als 9 Klassen. In der Nichtcompactumgruppe dehnt sich dagegen die Variation über 24 Klassen (2,6 mm.—4,9 mm.), wie die Tabelle 2 zeigt. Dass die Variation der Internodienlänge bei den ausgespalteten Compactumtypen äusserlich weit enger als bei den Nichtcompactumtypen ist, wird also durch die Untersuchung der  $F_3$  durchaus bestätigt.

Um nun der Frage näher zu treten, inwieweit die  $CL_1L_2$  und  $Cl_1l_2$  wirklich von einander an Internodienlänge abweichen, gibt es zunächst nur einen Weg, diesen nämlich, solche  $F_3$ -Nachkommenschaften, die nur Compactum und mitteldichte, 0315-ähnliche Typen ausspalten (nach der Verbindung  $Cl_1l_2 \times cl_1l_2$ ), mit solchen Nachkommenschaften zu vergleichen, die nur Compactum und lange Landweizentypen ausspalten (nach der Verbindung  $CL_1L_2 \times cL_1L_2$ ). Ich habe versucht, bei der Kreuzung Schwed. Binkelweizen  $\times$  0315, Linie *B*, diesen Vergleich durchzuführen, indem 3 Nachkommenschaften, die nur Compactum und mitteldichte, 0315-ähnliche Typen ausspalteten, und ebenfalls 3 Nachkommenschaften, nur Compactum und lockere, extreme Landweizentypen enthaltend, ausgewählt und gemessen wurden. Die ersteren können ebensowenig wie 0315 die Landweizenfaktoren enthalten, sondern müssen aus der Verbindung  $Cl_1l_2 \times cl_1l_2$  hervorgehen. Von den letzteren kann wegen geringer Individuenzahl zwar nicht mit Sicherheit behauptet werden, dass sie der Verbindung  $CL_1L_2 \times cL_1L_2$  und nicht z. B. auch der Verbindung  $CL_1L_2 \times cL_1l_2$  entsprechen; jedenfalls müssen aber die Landweizenfaktoren in beiden Gameten vollständig oder fast vollständig repräsentiert sein, wenn nebst Compactum nur lockere, extreme Landweizentypen ausgespaltet werden. Das Resultat dieses Vergleichs geht aus der Tabelle 3 hervor.

Nach der okulären Beobachtung waren die Compactumpflanzen bei den Nachkommenschaften, die nebst Compactum nur mitteldichte, 0315-ähnliche Typen (aber keine lockeren Landweizentypen) enthielten, im Ganzen besonders dichtährig und

*Ährenstielnodelänge der Compactumpflanzen verschiedener  $H_3$ -Nachkommenschaften.*

Charakter der $F_g$ -Nachkommenschaft	Anzahl von Pflanzen zwischen den untenstehenden, in mm. ausgedrückten Klassengrenzen													Mittelwert mm.
	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	
<i>Kreuzung Schwed. Binkel <math>\times</math> 0315, Linie B.</i>														
1. Spaltend in Compactum — mitteldichte, 0315-ähnliche Typen .....	1	2	1	1	—	1	2	1	—	—	—	—	—	1.69
2. » » » » » .....	1	—	3	5	4	4	4	1	—	—	—	—	—	1.72
3. » » » » » .....	2	4	1	4	4	5	1	—	—	1	—	—	—	1.59
4. » » » — lockere Landweizenotypen .....	—	—	—	3	—	2	4	2	2	3	—	—	—	1.98
5. » » » » » .....	—	—	1	2	—	—	—	5	—	—	—	—	1	1.93
6. » » » » » .....	—	1	1	1	—	—	4	2	—	2	—	—	—	1.96
7. Konstant Compactum, besonders dicht .....	2	18	8	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1.48
8. » » » » » .....	—	—	1	—	2	6	2	3	1	—	—	—	—	1.83
9. » » » » » .....	—	—	—	—	—	—	—	—	2	—	—	—	—	1.96
<i>Kreuzung Schwed. Binkel <math>\times</math> 0406, Linie B.</i>														
10. Konstant Compactum, besonders dicht .....	—	2	5	5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1.58
11. » » » » » .....	—	2	1	6	4	4	8	7	—	—	—	—	—	1.68
12. » » » » » .....	—	—	—	4	9	—	—	1	—	—	—	—	—	1.82



wenigstens zum Teil (ebenso wie in der  $F_2$  einzelne Pflanzen; vgl. oben) offenbar dichtähriger als die Elternrasse, wogegen diejenigen Nachkommenschaften, die nebst Compactum nur lockere Landweizentypen ausspalteten, einen mehr ausgezogenen, mit der Elternrasse übereinstimmenden Compactumtypus zeigten. Die Zahlen bestätigen nun insofern diese Beobachtungen, als die mittlere Internodienlänge bei den drei Nachkommenschaften der letzten Kategorie tatsächlich grösser ist als bei denjenigen der ersten Kategorie. Leider ist die Individuenzahl jeder Nachkommenschaft nur gering; die Übereinstimmung zwischen den verschiedenen Nachkommenschaften jeder Kategorie macht es aber höchst unwahrscheinlich, dass die Differenzen zwischen den beiden Kategorien zufälliger Art seien. Ganz zweifellos sind die Internodien bei der letzten Kategorie, die die Landweizenfaktoren enthält, etwas länger als bei der ersten. Die Landweizenfaktoren werden also durch den Compactumfaktor nicht vollständig unwirksam gemacht.

Die Tabelle 3 zeigt auch die Internodienlänge der anscheinend dichtesten und der am meisten ausgezogenen  $F_3$ -Compactumnachkommenschaften der beiden Kreuzungen. Die Mittelwerte dieser Nachkommenschaften liegen zwischen 1.48 und 1.96 mm., wogegen die Mittelwerte der Nichtcompactumgruppe, wo der  $C$ -Faktor fehlt, zwischen 3.24 und 4.17 mm. liegen (vgl. Tabelle 2). Auch bei Ermittlung der Mittelwerte der  $F_3$ -Nachkommenschaften finden wir demnach die äusserlich wahrnehmbaren erblichen Differenzen in der Compactumgruppe, wenn auch deutlich, jedoch viel geringer als in der Nichtcompactumgruppe.

Resumierend können wir also aus den sämtlichen Tatsachen den Schluss ziehen, dass die Verlängerungsfaktoren  $L_1L_2$  durch den Hemmungsfaktor  $C$  zwar nicht vollständig verdeckt, aber in ihrer Wirkung wesentlich (wenn auch nur scheinbar, äusserlich) abgeschwächt werden. Die Wirkung der  $L$ -Faktoren ist bei der Anwesenheit des Faktors  $C$  äusserlich eine viel schwächere als sonst. Faktoren, die unter gewissen Umständen erhebliche äussere Differenzen verursachen, haben m. a. W. unter anderen Umständen, in der Anwesenheit bestimmter anderer Faktoren, nur kleine erbliche Differenzen zur Folge.

Wir sehen hier ein neues Beispiel davon, dass eine allem Anschein nach allerfeinste kontinuierliche erbliche Variation durch das Zusammenwirken distinkter mendelnder Faktoren zustandekommen kann. In der Abwesenheit des Faktors  $C$  sind die Differenzen noch so deutlich, dass mit wenigstens annähernder Sicherheit die Spaltung beurteilt und die Faktoren auseinandergesetzt werden können, obwohl die starke Modifikationsfluktuation schon hier der ganzen Variation einen so fließenden Eindruck verleiht, dass die intermediären Stufen  $L_1l_2$ ,  $l_1L_2$  nur andeutungsweise von den Extremen  $l_1l_2$ ,  $L_1L_2$  unterschieden werden können. Wenn aber dann der Faktor  $C$  zukommt und die ganze Variation in der Weise stark eingeengt wird, wie schon hervorgehoben wurde, dann kann man sich leicht vorstellen, wie aus der früher kaum vorhandenen Diskontinuität die allerfeinste Kontinuität in der Varia-

tion sich ausbilden kann, besonders wenn man den heterozygoten Stufen Rechnung trägt.

Wahrscheinlich lassen sich viele ähnliche Fälle auffinden, wo, durch die Wirkung von epistatischen Faktoren, sei es Hemmungs- oder Verdeckungsfaktoren, aus grösseren Differenzen kleine, kontinuierlich verbundene zustandekommen, wenn nur dabei die Wirkung der unterliegenden Faktoren nicht vollständig aufgehoben bzw. verdeckt wird.

Durch Beobachtungen dieser Art wird eine neue Stütze der Ansicht gewonnen, dass die kleine kontinuierliche erbliche Variation keiner anderen Art ist als die diskontinuierliche, sondern ebenso wie diese durch Kombination und verschiedenartiges Zusammenwirken mendelnder Faktoren zustandekommt.

Aus dem Umstande, dass dieselben Faktoren bald grosse, bald (durch den Einfluss anderer Faktoren) kleine äussere Wirkung haben, wird ferner ersichtlich, dass die äusserlich zu beobachtenden Unterschiede an Diskontinuität, die Unterschiede zwischen mehr und weniger diskontinuierlich wirkenden Faktoren, nur scheinbar sein können. Ich habe dies neuerdings von einem anderen Gesichtspunkte aus erörtert<sup>1</sup>: beim Hafer kommt ein Hemmungsfaktor vor, der die Begrannung und Behaarung der Ährchen unterdrückt, und der eine ungleiche Wirkung bei verschiedenen Formen ausübt; die Tatsachen scheinen dafür zu sprechen, dass der Hemmungsfaktor durch den Einfluss anderer Faktoren eine stärkere, mehr diskontinuierliche äussere Wirkung bekomme. Hier ist das Verhältnis gerade das entgegengesetzte, indem sonst stark wirkende Faktoren beim Vorhandensein eines anderen Faktors eine schwächere äusserliche Wirkung zeigen.

##### 5. Über die Bildung von Längestufungen, die die Grenzen der Eltern in beiden Richtungen überschreiten.

Wie in der vorigen Darstellung zum Teil gezeigt wurde, entstehen in  $F_2$  der Kreuzungen zwischen Compactum und mitteldichten Formen einerseits langährige Landweizenformen, die weit ausserhalb der Grenzen der mitteldichten Formen gehen, andererseits sehr dichte Compactumformen, welche ebenfalls, wenn auch in geringerem Grade, die Grenzen des Compactumelters überschreiten.

Die Untersuchung der  $F_3$  zeigt nun ganz zweifellos, dass die Überschreitungen beiderlei Art erblich sind. Betreffend die langährigen Formen wurde dies schon oben genügend gezeigt. In bezug auf die Compactumtransgressionen ist Folgendes festgestellt worden:

Bei der Kreuzung *Schwed. Binkelweizen*  $\times$  0315, Linie B, wurde eine als sehr dicht bezeichnete  $F_2$ -Pflanze auf ihre Nachkommenschaft untersucht. Die Kurve dieser Nachkommenschaft wird auf Tabelle 3 (N:r 7) dargestellt. Zwei andere mehr lockere, etwa mit dem Elter übereinstimmende Compactumpflanzen ergaben, wie erwartet wurde, Nachkommenschaften mit durchschnittlich lockereren

<sup>1</sup> Über Fälle spontanen Wegfallens eines Hemmungsfaktors beim Hafer. Zeitschr. indukt. Abst. und Vererbungslehre, Bd. V, 1911, S. 1.



Compactumähren (Tabelle 3, Nr 8—9). Die Differenz der Mittelwerte der ersten Nachkommenschaft einerseits (1,48 mm.) und der zwei letzten (zusammengeschlagen) andererseits (1,88 mm.) ist 0,40 mm., der mittlere Fehler dieser Differenz nur + 0,037 mm., infolge wovon kein Zweifel bestehen kann, dass die erste Nachkommenschaft dichtähriger als die beiden letzten ist. Nun wurde leider der Elter nicht zum Vergleich mit den  $F_3$ -Nachkommenschaften in demselben Jahre angebaut. Die Bildung der überschreitenden Abstufungen in  $F_2$  (vgl. Tabelle 1) stellt es aber ausser Zweifel, dass die letzten zwei Nachkommenschaften ebenso wie ihre Mutterpflanzen etwa mit dem Elter übereinstimmen, während die erste Nachkommenschaft dichtähriger ist.

Bei der Kreuzung *Schwed. Binkelweizen*  $\times$  0406 wurden die Nachkommenschaften von zwei besonders dichten und einer gewöhnlichen, etwa mit dem Elter übereinstimmenden Compactumpflanzen untersucht (vgl. Tabelle Nr 10—12). Die beiden Nachkommenschaften erster Art sind durchschnittlich dichtähriger als diejenige der letzten Art. Die Differenz zwischen den beiden ersten (zusammengeschlagen) und der letzten beträgt 0,19 mm.; mittlerer Fehler dieser Differenz =  $\pm$  0,030 mm. Auch in diesem Falle ist also die Bildung mehr und weniger dichtähriger Formen bei der Spaltung ausser Zweifel gestellt.

Es soll bemerkt werden, dass der Compactumelter, *Schwed. Binkelweizen*, keine reine Linie ist. Nach der Kurve auf Tabelle 1 können aber nur unbedeutende erbliche Variationen bei demselben vorhanden sein. Übrigens gehen die mehr und weniger dichtährigen Compactumformen aus einer und derselben Gametenverbindung hervor, entstehen also durch die  $F_2$ -Spaltung und nicht durch Unreinheit des Elters.

Nach dem oben S. 51—53 Ausgeführten, sind nun die  $Cl_1l_2$ -Formen, welche die Verlängerungsfaktoren entbehren, dichtähriger als die  $CL_1L_2$ -Formen, wo die Verlängerungsfaktoren vorhanden sind. Da der Elter die Konstitution  $CL_1L_2$  besitzt, stellen demnach die überschreitenden, sehr dichtährigen Formen, wenigstens zum Teil, die Kombination  $Cl_1l_2$  dar. Die Entstehung der Überschreitungen ist dann folgenderweise zu bezeichnen:

Compactum		Form mit	
weniger dichtährig		mitteldichten Ähren	
	$CL_1L_2$	$\times$	$cl_1l_2$
$Cl_1l_2$	$CL_1L_2$	$cl_1l_2$	$cL_1L_2$
Compactum			langähr. Land-
sehr dicht			weizenform (In-
(Internodien kür-			ternodien länger
zer als bei den			als bei den Eltern)
Eltern)			

Wir sehen also hier ein tatsächliches Beispiel, wie durch Kreuzung zweier Abstufungen quantitativer Eigenschaften überschrei-



tende Abstufungen in der Kreuzungsdascendenz entstehen. Dann eine solche Spaltung bei quantitativen Eigenschaften allgemein vorkommt, erhält man durch dieses Beispiel eine neue Stütze für die Ansicht, dass diese Spaltung quantitativer Eigenschaften im allgemeinen auf Rekombination mendelnder Faktoren zurückzuführen ist.

### B. Landweizen $\times$ Squarehead und andere mitteldichte Formen.

Meine diesbezüglichen Kreuzungen bestätigen die S. 40 kurz erwähnten Untersuchungen anderer Forscher <sup>1</sup>, indem die lang- und lockerährigen Landweizenformen stets dominieren oder prävalieren und die rezessiven Squarehead oder ähnliche Formen in  $F_2$  nur selten erscheinen. Bei einigen Kreuzungen scheint nach dem Verhalten der  $F_2$  das Verhältnis 15:1 in  $F_2$  zu bestehen, ebenso wie bei den Nicht-compactumformen der hier beschriebenen Kreuzungen Compactum  $\times$  mitteldichte Formen. Die Beschreibung der Resultate sämtlicher dieser Kreuzungen wird aber zweckmässiger erfolgen, wenn die  $F_3$  mehrerer dieser Kreuzungen vollständig untersucht worden ist. Vorläufig ist das Tatsachenmaterial nicht gross genug, um die, wie es scheint, teilweise ziemlich verwickelten Verhältnisse zu beleuchten und ein einigermaßen klares Bild des Ganzen zu geben.

### C. Zusammenfassung.

Die wichtigsten Schlussfolgerungen von allgemeinem Interesse, die aus meinen bis jetzt durchgeführten Kreuzungsuntersuchungen über die Ähreninternodienlänge beim Weizen gezogen werden können, sind die folgenden:

1. Die erblichen Abstufungen einer Längseeigenschaft kommen durch verschiedenartiges Zusammenwirken mehrerer mendelnden Faktoren zustande.
2. Diese Faktoren sind zweierlei Art, teils gleichsinnige Verlängerungsfaktoren, teils in entgegengesetzter Richtung wirkende Hemmungsfaktoren.
3. Durch Einwirkung eines epistatischen Faktors kann eine ziemlich diskontinuierliche Variation in eine kontinuierliche Variation allerfeinster Art verwandelt werden. Eine kontinuierliche erbliche Variation kann demnach in verschiedenen Weisen durch Kombination mendelnder Faktoren zustandekommen.
4. Die Bildung von Abstufungen bei Kreuzung quantitativer Eigenschaften, die ausserhalb der Grenzen der Eltern gehen, werden durch Neugruppierung mendelnder Faktoren erklärt.

In ihrer ausgezeichneten Arbeit weist T. TAMMES <sup>1</sup> (1911, S. 242) auf die Möglichkeit hin, dass eine Längseeigenschaft sowohl von Verlängerungsfaktoren als auch von Hemmungsfaktoren bedingt sein könne, und dass dadurch in der  $F_2$  nach Kreuzungen Individuen auftreten können, welche die Elterntypen überschreiten. Diese Annahme TAMMES <sup>2</sup> wird hier durch ein tatsächliches Beispiel veranschaulicht.

<sup>1</sup> Vgl. v. TSCHERMAK in FRUWIRTH, l. c. S. 168.

<sup>2</sup> Vgl. Literaturverzeichnis S. 20.

### Kap. III. Resistenz gegen Gelbrost beim Weizen.

#### 1. Allgemeines.

Meine ersten Beobachtungen über das Verhalten der Resistenz gegen Gelbrost (*Puccinia glumarum*) bei Weizenkreuzungen wurden in den Jahren 1903—1904 gemacht. Im letztgenannten Jahre, das bei Svalöf ein ausgeprägtes Rostjahr war, wurde eine Anzahl von Parzellen angebaut, die der  $F_4$  oder der  $F_5$  einer Reihe 1898 ausgeführter Winterweizenkreuzungen gehörten. Verschiedene Parzellen derselben Kreuzung zeigten dabei deutlich verschiedene Resistenz, was auf eine Spaltung der Rostresistenz, derjenigen morphologischer Eigenschaften analog, klar hinwies. Sehr auffallend war aber auch, dass gewisse Parzellen eine entschieden grössere Empfänglichkeit als die beiden Elternsorten zeigten, was darauf hindeutete, dass die Spaltung keineswegs in einfacher Weise verlaufen war. Es stellte sich dann gleich die Frage auf, ob solche ausgesprochene Verstärkungen der regelmässigen Spaltung gehören, oder ob sie als mehr zufällige, in Zusammenhang mit der Kreuzung stehende neue, Variationen aufzufassen sind.

Im Jahre 1906, wo eine Anzahl Parzellen der dritten Generation einer 1903 gemachten Kreuzung (zwischen der sehr resistenten Sorte 0319, Kotteweizen, und 0501, Grenadier, mit mittelmässiger Resistenz) zeigten sich dieselben Verhältnisse. In einem Aufsatze über die Kreuzungsarbeiten bei Winterweizen habe ich damals auf die Spaltung der Gelbrostresistenz bei meinen Kreuzungen und die Unabhängigkeit dieser Eigenschaft von anderen Eigenschaften hingewiesen und dabei auch das Vorkommen der erwähnten Verstärkungen kurz bemerkt<sup>1</sup>. Weitere Mitteilungen habe ich 1908 gegeben<sup>2</sup>.

Im Jahre 1905 erschien die erste Veröffentlichung **BIFFENS** über die Spaltung der Gelbrostresistenz bei Weizenkreuzungen<sup>3</sup>; eine zweite, ausführlichere folgte im Jahre 1907<sup>4</sup>. Als Resultat seiner Untersuchungen hebt **BIFFEN** in der letzten Mitteilung u. a. hervor, dass bei Kreuzung immuner Varietäten mit empfänglichen

<sup>1</sup> Något om korsningar etc. Sveriges Utsädesfören. Tidskr. 1906, S. 309. Ref. in Journ. f. Landw. 1908, S. 299.

<sup>2</sup> Einige Ergebnisse von Kreuzungen bei Hafer und Weizen. Botan. Notiser 1908, S. 288.

<sup>3</sup> Journ. agric. sc., I, S. 40.

<sup>4</sup> Studies in the inheritance of disease-resistance. Journ. agric. sc., II, S. 109—128.



die resultierenden Individuen der ersten Generation empfänglich sind, und dass die Spaltung in  $F_2$  in einfacher Weise 3 empfänglich (mehr oder weniger): 1 resistent erfolgt. Wenn die Eltern einen verschiedenen Grad von Rostempfindlichkeit besitzen, dann gleicht der Bastard dem mehr empfänglichen Elter und die Spaltung erfolgt im Verhältnis 3 stark empfänglich: 1 schwach empfänglich. Die verhältnismässig immunen Formen bleiben konstant in folgenden Generationen. Immunität ist unabhängig von morphologischen Eigenschaften und es ist möglich, Varietäten zu züchten, die bei einem beliebigen morphologischen Typus immun oder empfänglich sind.

Eine Schwierigkeit bei der Untersuchung des Verhaltens der Gelbrostresistenz bei Kreuzungen bereitet der Umstand, dass Gelbrost nicht jedes Jahr auftritt. Bei Svalöf im südlichen Schweden kann man in der zwanzigjährigen Periode 1890—1910 vier »Rostjahre« nennen, wo der Gelbrost in erheblichem Masse aufgetreten ist und nicht geringen Schaden bei empfänglichen Sorten verursacht hat, nämlich 1890, 1898, 1903 und 1904. Im schroffen Gegensatz dazu stehen viele Jahre, wo der Gelbrost sich fast gar nicht gezeigt hat, wie 1891, 1893, 1894, 1897, 1899 und 1901. Auch 1900, 1902 war der Gelbrost sehr spärlich und wurde nur an den aller empfänglichsten Sorten ersichtlich. In solchen Jahren lässt sich natürlich nichts oder nur sehr wenig über das Verhalten der Rostempfindlichkeit bei Kreuzungen ersehen. Auch 1895 und 1896 war wenig Gelbrost vorhanden. 1905—1910 ist der Gelbrost alljährlich aufgetreten, zwar im allgemeinen zu spät oder zu wenig heftig, um nennenswerten Schaden zu verursachen, aber doch in einem solchen Umfange, dass ausgedehnte Beobachtungen über das Verhalten der Rostresistenz bei den Kreuzungen haben gemacht werden können. Die letzten Jahre (am wenigsten jedoch 1907—1908) sind also für das Durchführen dieser Untersuchungen<sup>1</sup> ziemlich günstig gewesen.

## 2. Die verschiedene erbliche Rostempfindlichkeit verschiedener Sorten und Linien.

Dass im Zusammenhang mit der so stark wechselnden Intensität der Gelbrost in verschiedenen Jahren die Bezeichnung »Immunität« in verschiedenem Sinne zu verstehen ist, wird selbstverständlich erscheinen. Eine Sorte, die in einem mittelmässig starken oder sogar ziemlich starken Rostjahr noch ganz unbefallen, »immun« ist, kann in einem sehr starken Rostjahr, ob auch zwar nur verhältnismässig wenig, befallen werden. Die Frage ist wohl, wie auch BIFFEN bemerkt, ob es eine absolute Immunität überhaupt gibt: »Absolute immunity under all conditions is not to be expected in any wheat where the rusts are in question« (l. c. 1907, S.

<sup>1</sup> Näheres über die Gelbrostbeobachtungen bei Svalöf findet sich in einem besonderen Kapitel über die Resistenz der Sorten gegen Gelbrost in meinem zusammenfassenden Bericht der bis 1906 ausgeführten Winterweizenversuche bei Svalöf und Ultuna. Sveriges Utsädesfören. Tidskr. 1906. S. 208—217.



114). Weizensorten, die bei Svalöf sogar in den stärksten Rostjahren zu den resistentesten zu rechnen sind, können unter anderen Verhältnissen stark angegriffen werden. Der alte im mittleren Schweden angebaute Schwed. Sammetweizen hat sich bei Svalöf auch in den Jahren 1898, 1903 und 1904 als besonders resistent erwiesen, wird dagegen im mittleren Schweden stets stark befallen usw.<sup>1</sup> Die Resistenz ist somit nur als ein ganz relativer Begriff aufzufassen. Von Empfänglichkeit und Immunität als Alternativen kann man gewiss nicht sprechen, sondern nur von einem höheren oder geringeren Grad von Resistenz; statt »immune« Sorten wird man richtiger »am meisten resistente« Sorten sagen sollen. Es ist auch bekannt, dass zwischen den resistentesten und den empfänglichsten Sorten viele Zwischenstufen vorkommen. ERIKSSON & HENNING<sup>2</sup> stellen nach den Beobachtungen im mittleren Schweden, bei Stockholm, fünf Klassen auf (0–4), und BIFFEN, der zum Teil dieselben Sorten, wie Michigan Bronze, in seinen Versuchen gehabt hat, benutzt dieselbe Klassifizierung der von ihm gekreuzten Sorten.

In meinem oben zitierten Bericht über die Weizenversuche (1906) habe ich nach den in den Jahren 1898–1906 benutzten Gradierungen der Rostintensität bei den verschiedenen bei Svalöf geprüften, älteren und neugezüchteten Sorten vier Klassen aufgestellt. Zu der ersten, resistentesten Klasse gehören u. a. 0203, Extra-Squarehead, und 0319, Kotteweizen, die beide in den hier zu besprechenden Kreuzungen vorkommen. In der zweiten, ziemlich resistenten Klasse findet sich u. a. 0501, Grenadier. Als dritte Klasse sind die ziemlich empfänglichen Sorten 0315, Pudelweizen, Renodlad Squarehead und 0406, Boreweizen, aufgestellt. Zu der vierten Klasse gehört der sehr empfängliche 0301, Topp-Squarehead.

Es ist indessen zu bemerken, dass diese Klassen wohl nur den niedrigen und mittleren Rostklassen ERIKSSONS und HENNINGS entsprechen. Es sind nämlich noch entschieden empfänglichere Formen von mir bei Svalöf beobachtet, aber diese sind nach und nach aus dem Sortiment ausgeschaltet und nicht zu Kreuzungen verwendet worden. Zu den Kreuzungsversuchen sind keine Sorten verwendet, die grössere Empfänglichkeit als die Klasse 3 haben. Bei dieser Klasse ist die Empfänglichkeit zwar ziemlich gross, aber jedoch nicht grösser, als dass die Sorten wegen hervorragender Eigenschaften in anderen Hinsichten, wie Winterfestigkeit, Lagerfestigkeit usw., in gewissen Teilen des Landes grosse Verbreitung gefunden haben. Auch scheint es mir nicht ausgeschlossen, dass Sorten vorkommen, die noch mehr resistent sind als die genannten Sorten der Klasse 1. Insgesamt sollten dann etwa 5–6 Klassen aufzustellen sein.

Ferner ist zu bemerken, dass auch unter den Sorten, die derselben Klasse zugerechnet sind, kleinere, aber doch ohne Zweifel sichere erbliche Differenzen vorhanden sind. In der Klasse 3 ist z. B. 0315, Pudelweizen, nicht so empfänglich wie 0406, Boreweizen. Aus Renodlad Squarehead, die keine Pedigreesorte ist, son-

<sup>1</sup> vgl. meinen oben zitierten Bericht über die Weizenversuche.

<sup>2</sup> Die Getreideroste, Stockholm 1894.

dern eine fortgesetzte Reinzüchtung von Pflanzen mit Squareheadtypus aus einem in den achtziger Jahren importierten englischen Squarehead, sind Linien mit ein wenig (aber deutlich) verschiedener Rostresistenz getrennt worden. Zum Teil beruhen jedoch diese kleineren Differenzen nur darauf, dass die Sorten verschieden früh angegriffen werden. Auch gibt es bei den kleineren Differenzen keine so ausgesprochene Parallelität zwischen verschiedenen Jahren wie bei den grösseren Differenzen; eine kleine Plusdifferenz einer Sorte im Vergleich mit einer anderen kann sich in einem anderen Jahre nicht bemerkbar machen, oder sogar in eine kleine Minusdifferenz verwandelt werden, was auch nicht auffällig ist, wenn die Sorten z. B. nicht ganz gleichzeitig in Entwicklung sind und deshalb auch nicht ganz denselben Witterungsverhältnissen auf gleichem Entwicklungsstadium ausgesetzt sind. Es lassen sich daher die Sorten gegenwärtig am besten in wenigen Hauptgruppen zusammenfassen, obwohl natürlich eine längere Erfahrung immer sicherer auch die kleineren Differenzen, bei dieser Eigenschaft sowie bei allen anderen, die einen verschiedenen Grad bezeichnen, wird feststellen können. Vor allem ist aber einer solchen Auffassung vorzubeugen, dass die aufgestellten Klassen scharf von einander getrennt seien; im Gegenteil stehen gewisse Sorten an der Grenze der Gruppen und können wegen etwas wechselnden Verhaltens in verschiedenen Jahren ebenso gut der einen als der anderen von zwei Nachbarklassen zugerechnet werden. Es gibt m. a. W. eine für unsere Auffassung völlig kontinuierliche Reihe von Abstufungen zwischen den Extremen.

In bezug auf alte Sorten, deren Abstammung und Charakter nicht genügend bekannt sind, könnte vielleicht die Einwendung gemacht werden, dass die Zwischenstufen nur verschiedenartige Mischungen von mehr und weniger widerstandsfähigen Formen seien, womit der durchschnittliche Charakter natürlich wechseln muss. In der Tat kann man durch Linientrennung aus morphologisch einheitlichen (oder scheinbar einheitlichen) alten Sorten Formen mit ziemlich verschiedener Rostresistenz herauszüchten, worauf ich mehrmals hinwies. Ein besonders beleuchtendes Beispiel davon ist u. a. ein gotländischer Landweizen, »Stahlweizen« genannt, aus welchem bei ähnlichem Ährentypus, Kornform etc. durch Linientrennung sehr verschieden rostresistente Formen gezüchtet wurden. Im Herbst 1905 wurden 20 beliebig ausgewählte Pflanzen von nicht oder sehr wenig verschiedenem Ährentypus separat ausgesät. Die Nachkommenschaften dieser Pflanzen, neben einander wachsend, zeigten 1906 sehr deutlich wechselnden Rostgrad, von 0—3. Kleinere derartige Differenzen habe ich bei anderen alten Sorten gefunden. Es lässt sich daher nicht leugnen, dass bei alten Sorten durch verschiedenartige Mischungen Zwischenstufen zustande kommen können. Nichtsdestoweniger glaube ich dieser Sache eine nur untergeordnete Bedeutung zuschreiben zu dürfen. Auch wenn man, wie bei Svalöf, Pedigreesorten, d. h. nach einzelnen Pflanzen gezogene reine Linien, mit einander vergleicht, bezeichnen diese nach dem oben Ausgeführten eine Reihe verschiedener Abstufungen zwischen den Extremen.

Die Tatsache, dass die Kulturvarietäten durch einen verschiedenen erblichen Grad



von Rostresistenz, nicht durch Empfänglichkeit oder Resistenz als zwei Alternativen gekennzeichnet sind, wird wohl übrigens von Niemanden bestritten.

In bezug auf die Konstanz der Rostresistenz eigenschaft bei den hier zu besprechenden reinen Linien ist aus den vieljährigen vergleichenden Untersuchungen nunmehr so viel zu schliessen, dass die spezifische Resistenz gegen Gelbrost eine der betreffenden Linie ganz charakteristische Eigenschaft ist, die sie auf einem gegebenen Platz Jahr nach Jahr treu behält, ohne dass eine Veränderung derselben — abgesehen von den schon beschriebenen kleinen Schwankungen im relativen Verhältnisse, die die Sorten in verschiedenen Jahren zeigen — konstatiert werden kann. 0406, Boreweizen, z. B. ist bei Svalöf immer fortwährend relativ empfänglich, wie er vom Anfang an gewesen ist, 0203, Extra-Squarehead, u. a. fortwährend sehr resistent. Wo verschiedene Pflanzen derselben Linie separat neben einander ausgesät worden sind, was bei Extra-Squarehead u. a. Linien mehrmals geschehen ist, da haben sie keine sicheren Differenzen an Rostresistenz gezeigt. Wenn sich auch bei längerer Vermehrung einer Linie Variationen erblicher Art wieder einstellen mögen, so ist jedenfalls die Konstanz der Linie in den ersten Jahren nach der Vermehrung aus einer einzelnen Pflanze so gross, dass wir sicher damit rechnen können, dass die Kreuzungen zwischen Individuen (bezw. Gameten) mit der für die Linie charakteristischen Abstufung gemacht worden sind. Es ist wohl deshalb auch wenigstens sehr wahrscheinlich, dass auch die kleineren erblichen Differenzen zwischen verschiedenen Linien konstant, d. h. homozygotischer Natur sind, obwohl gegenwärtig, vor allem weil kein zahlenmässiger Vergleich bei dieser Eigenschaft sich durchführen lässt, nichts ganz Bestimmtes darüber gesagt werden kann.

Die Grundlage der folgenden Ausführung ist also die Befindlichkeit von Formen, reinen Linien, mit verschiedener erblicher Rostresistenz, m. a. W. einer Reihe erblicher Abstufungen dieser Eigenschaft.

Die unten zu besprechenden Sorten, die oben bei der Besprechung der vier Rostklassen nicht erwähnt wurden, sind nach mehrjährigen Beobachtungen in die folgenden Klassen einzuordnen:

Klasse 1. Schwed. Sammetweizen; 0516 <sup>1</sup>.

» 2. 0401, 0705, 0728.

» 3. 0234.

### 3. Resultate von Kreuzungen zwischen Sorten mit verschiedener oder etwa gleicher Rostresistenz.

Das Verhalten der primären Bastarde, der  $F_1$ , ist im allgemeinen schwer zu beurteilen, weil die Zahl der Pflanzen meistens nur eine sehr geringe ist. Wo Beobachtungen darüber haben gemacht werden können, werden sie in dem Folgenden angeführt.

---

<sup>1</sup> Eine ganz besonders resistente Linie, die vielleicht in eine noch niedrigere Klasse einzuordnen wäre.



In der  $F_2$  wurde bei meinen Untersuchungen das Verhalten der einzelnen Pflanzen nicht klassifiziert.

Die  $F_2$  der ersten Kreuzungen wurde in einem Jahre (1900) angebaut, wo der Gelbrost gar zu wenig auftrat, um ein Gradieren der Spaltung zu erlauben. Später ging ich von dem Gesichtspunkte aus, dass, wenn die Kreuzungen zwischen mehr und weniger resistenten Sorten ausgeführt worden waren, es infolge der gewöhnlichen Modifikationsfluktuation verschiedener Individuen derselben Linie <sup>1</sup> ziemlich willkürlich wäre, die Individuen als intermediär zu bezeichnen oder der Abstufung des einen oder des anderen Elters zuzurechnen. Spaltungszahlen in  $F_2$  zu erhalten, schien mir deshalb unmöglich, vor allem wenn die Differenz zwischen den Eltern sehr gering war. Über die  $F_2$  wurde deshalb nur bemerkt, ob deutliche Spaltung vorkam, was jedenfalls bei Kreuzungen zwischen erheblich verschiedenen Eltern leicht zu sehen war.

Das Hauptgewicht wurde auf das Verhalten der Nachkommenschaften der  $F_2$ -Individuen, die  $F_3$ -Parzellen, gelegt, besonders seitdem im Jahre 1904 es sich deutlich gezeigt hatte, dass Formen mit grösserer Empfänglichkeit als bei den Eltern gebildet wurden. Eine solche grössere Empfänglichkeit wäre in  $F_2$  unmöglich sicher zu ermitteln. Man könnte nicht sicher sein, ob nicht eine besonders hohe Empfänglichkeit einzelner  $F_2$ -Individuen nur Plusmodifikationen unter dem Einflusse besonders günstiger äusserer Umstände bezeichnete; umgekehrt liesse sich denken, dass nicht durch besonders hohe Empfänglichkeit gekennzeichnete  $F_2$ -Individuen doch in Wirklichkeit einer mehr empfänglichen Abstufung als die Elternsorten zugehörten; nur wären sie in diesem Falle Minusmodifikationen.

Die Untersuchung des Verhaltens der  $F_3$ -Parzellen mehrerer Kreuzungen hat seitdem gelehrt, dass eine solche Spaltung mit Bildung von Abstufungen, welche die Grenzen der Elternsorten stark überschreiten, keineswegs Ausnahme sondern im Gegenteil ganz allgemein ist.

Im Jahre 1904 wurden Rostbeobachtungen über eine Anzahl von Kreuzungsparzellen gemacht, die der  $F_4$  oder  $F_5$  von 1898 gemachten Kreuzungen angehörten. Früher konnte über das Verhalten der Rostresistenz dieser Kreuzungen nichts bemerkt werden, denn Gelbrost trat, wie schon früher bemerkt, in den Jahren 1899—1902 nicht oder nur äusserst wenig auf. Das Auswählen der Pflanzen zur Weiterzucht war somit ganz ohne Rücksicht auf ihr Verhalten gegen Gelbrost gemacht. Obwohl der Parzellen jeder Kreuzung nur wenig waren, zeigte sich aber deutlich, dass solche Parzellen vorkamen, die entschieden empfänglicher als die beiden Eltern waren.

---

<sup>1</sup> Dass die Modifikationsdifferenzen zwischen verschiedenen Pflanzen derselben Linie nicht gering sind, kann oft beobachtet werden. Einige Pflanzen werden früher oder stärker befallen als andere, was sich auch im Reichtum an Teleutosporen an den Blattscheiden zuletzt bemerkbar macht: bei geringerem Angriff der Linie wird man Teleutosporen nicht an allen Pflanzen finden, bisweilen sogar nur an einzelnen.

Von der Kreuzung 0401  $\times$  0705 wurden im starken Rostjahr 1904 8 Parzellen angebaut, die folgendes Verhalten im Vergleich mit den Eltern zeigten:

0401	—	—	—	—	—	—	Rostgrad <sup>1</sup> $\frac{6}{6}$	1; $\frac{29}{6}$	2; $\frac{1}{8}$	Blätter	5, Ähren	0—1
0705	—	—	—	—	—	—	» $\frac{7}{6}$	1 $\frac{30}{6}$	2 $\frac{30}{7}$	»	2	» 0—1
0401 $\times$ 0705.	$F_5$	Parzelle	1	»	»	1	» $\frac{28}{6}$	2 $\frac{1}{8}$	»	3—4	»	0
»	»	»	2	»	»	3	»	5	»	»	5	» 5
»	»	»	3	»	»	2	»	5	»	»	5	» 3—4
»	»	»	4	»	»	2	»	4—5	»	»	5	» 4—5
»	»	»	5	»	»	3	»	4—5	»	»	4—5	» 4—5
»	»	»	6	»	»	3	»	4	»	»	5	» 5
»	»	»	7	»	»	0	»	0—1	»	»	1—2	» 0
»	»	»	8	»	»	0	»	0	»	»	2	» 0

Die Differenzen zwischen den Parzellen waren äusserst auffallend. In unmittelbarer Nähe von solchen Parzellen, deren Blätter ganz übervoll von Rost waren und infolgedessen früh eintrockneten, wuchsen andere, die trotz des sehr starken Rostjahres lange ganz gesund blieben und zuletzt nur wenig angegriffen wurden. Es fiel auch sofort besonders auf, dass die Differenz zwischen den empfänglichsten und den resistentesten Parzellen sehr viel grösser war als zwischen den Eltern, was zeigte, dass die Grenzen der Eltern überschritten sein mussten. Der direkte Vergleich mit den Eltern ergab, dass die Parzellen 2, 5 und 6 von Anfang an viel stärker rostbefallen als die Eltern und am Ende Juni sehr stark geschädigt waren, während die Eltern noch nur wenig zu leiden hatten. Die Differenz war damals so auffallend gross, dass gar kein Zweifel über die grössere Empfänglichkeit der genannten Parzellen gehegt werden konnte. Am 1 August zeigten zwar diese Parzellen kein höheres Rostzeichen als der Elter 0401, aber das kommt nur daher, dass die Blätter überhaupt nicht mehr befallen werden konnten als vorher; sie waren schon ganz zerstört und trockneten ein, während bei 0401 der Rost erst jetzt so weit gekommen war wie bei den betreffenden Kreuzungspartzellen um einen Monat früher. Die Differenz zeigte sich aber jetzt in den Ähren. Während 0401 ebenso wie 0705 fast gar nichts von Rost an den Ähren zeigte, waren bei den Kreuzungspartzellen 2, 5 und 6 die Ähren stark befallen.

Die Parzelle 1 zeigt dasselbe Verhalten wie die Eltern am  $\frac{7}{6}$  und  $\frac{28}{6}$ . Am  $\frac{1}{8}$ , wo 0401 mehr befallen ist als 0705, ist diese Parzelle intermediär.

Die Parzellen 7 und 8 sind weniger rostbefallen als die Eltern. Die Differenz ist jedoch nicht so ausgesprochen wie diejenige zwischen den Eltern und den empfänglicheren Parzellen.

<sup>1</sup> Wo nichts besonderes bemerkt wird, bezeichnet der Rostgrad stets das Auftreten des Rostes an den Blättern. Bei der Rostgradierung wurden die Zeichen 0 bis 6 benutzt. Diese Zeichen entsprechen nicht den oben aufgestellten Klassen. Auch sind die Zeichen verschiedener Jahre selbstverständlich nur einigermaßen vergleichbar. Die Hauptsache ist jedoch hier überall der Vergleich zwischen den Eltern und den Kreuzungspartzellen in demselben Jahre.



Der Umstand, dass Parzellen resistenter als die Eltern und entschieden empfänglicher ganz nebeneinander vorkamen, zeigt deutlich, dass z. B. die höhere Empfänglichkeit nicht durch besonders begünstigende Verhältnisse, wo die betreffenden Parzellen wuchsen, hervorgerufen wurde, sondern in der erblichen Konstitution begründet ist.

0401 und 0705 sind nach sämtlichen Beobachtungen beide der Klasse 2 zuzurechnen. Von Kreuzung zweier Sorten von mittlerer Resistenz sind also Formen mit geringer Resistenz und auch wahrscheinlich solche mit hoher Resistenz entstanden. Die empfänglichsten Parzellen waren mindestens so stark geschädigt wie die der Klasse 4 zugerechnete Sorte 0301, Topp-Squarehead, während die resistantesten mit den Sorten der Klasse 1 ebenbürtig sind.

Schon bei diesem ersten Fall zeigte sich demnach ganz deutlich, dass durch Kreuzung eine gesteigerte Variation der Rostresistenz herbeigeführt werden kann. Es wurde dies aber durch die folgenden Versuche noch sicherer erwiesen.

Bei der Kreuzung 0501  $\times$  0203 war die Differenz zwischen empfänglichen und resistenten Parzellen ebenfalls sehr scharf.

0501	—	—	—	—	—	—	—	—	Rostgrad	$\frac{6}{6}$	1	$\frac{29}{6}$	3	$\frac{29}{7}$	Blätter	3	Ähren	1
0203	—	—	—	—	—	—	—	—	»	»	0	»	0—1	$\frac{28}{7}$	»	2	»	1
»	—	—	—	—	—	—	—	—	»	»	0	»	0	»	»	1	»	0—1
0501 $\times$ 0203.	$F_4$ .	Parzelle	1	}	$F_3$ I	»	$\frac{7}{6}$	2	$\frac{28}{6}$	3	$\frac{1}{8}$	»	4	»	»	4	»	1
»	»	»	2			»	»	2	»	4	»	»	5	»	»	5	»	4
»	»	»	3	}	$F_3$ II	»	»	0	»	0	»	»	1—2	»	»	1—2	»	0
»	»	»	4			»	»	0	»	0	»	»	1	»	»	1	»	0
»	»	»	5	}	$F_3$ III	»	»	0	»	0	»	»	1	»	»	1	»	0
»	»	»	6			»	»	0	»	0	»	»	0—1	»	»	0—1	»	0

Es waren von  $F_2$  (1900) nur 3 Pflanzen ausgenommen und separat gesät. Von jeder der Nachkommenschaften dieser drei Pflanzen,  $F_3$  I, II, III (1902), wurden zwei Pflanzen wieder gesät, deren Nachkommenschaften in allen drei Fällen etwa denselben Rostgrad zeigten. Die von der ersten  $F_2$ -Pflanze stammenden zwei  $F_4$ -Parzellen zeigten beide hohen Rostgrad, sogar höheren als 0501 (besonders die zweite); die aus den beiden übrigen  $F_2$ -Pflanzen stammenden Parzellen waren dagegen resistent wie 0203. Die Spaltung der Rostresistenz war somit auch hier offenbar; ferner schien es nicht ausgeschlossen, dass unter den wenigen  $F_2$ -Pflanzen eine zufällig mitgekommen wäre, die etwas weniger resistent als die Eltern war, da ihre Descendenz höheres Rostzeichen als 0501 erhielt.

Ausser diesen beiden Kreuzungen kamen im Jahre 1904 sieben andere vor, jede aber nur in wenigen (2—4) Parzellen. Die Spaltung war trotzdem auch hier bisweilen deutlich; sonst ist aber über dieselben nichts zu bemerken, zumal die Eltern zum Teil keine reinen Linien waren und dazu nicht auf demselben Felde angebaut wurden.



Im Jahre 1903 wurden 4 neue Winterweizenkreuzungen ausgeführt, deren  $F_1$  1904,  $F_2$  1905 angebaut wurden. Nur eine von diesen,  $0319 \times 0501$ , die unten näher beschrieben wird, wurde in  $F_3$  verfolgt. Zwei von den anderen,  $0206 \times 0716$  (nur in  $F_1$  angebaut) und  $0319 \times 0716$ , bei welchen die Eltern den am meisten resistenten Sorten der Klasse 1 gehören, waren in  $F_1$  ebenso resistent wie die Eltern. Von der Kreuzung  $0319 \times 0716$  war dagegen die  $F_2$  offenbar mehr rostbefallen als die Elternsorten:

1905, 0319	— — — — —	Rostgrad $\frac{7}{7}$	0 $\frac{13}{7}$ 0
» 0716	— — — — —	» »	0 » 0
» $0319 \times 0716$	$F_2$ . Linie a	» »	1 » 1+
» »	» » » b	» »	0—1 » 0+
» »	» » » c	» »	0—1 » 0+
» »	» » » d	» »	1 » 1
» »	» » » e	» »	0 » 0+
» »	» » » f	» »	1 » 2—
» »	» » » g	» »	1 » 2—

Während bei den Eltern keine Spur von Rost entdeckt werden konnte, war die  $F_2$  der Kreuzung dagegen am 13 Juli ziemlich rostig, besonders in gewissen Linien. Es lässt sich dies so erklären, dass durch die Spaltung, ebenso wie bei den vorigen Kreuzungen, eine Zahl von Individuen entstehen, die weniger resistent als die beiden Eltern sind. Infolgedessen muss der Durchschnittsrostgrad der  $F_2$  höher sein als bei den Eltern, wenigstens solange die Eltern selbst nicht angegriffen werden und eine eventuelle Bildung resistenterer Abstufungen demnach überhaupt nicht beurteilt werden kann.

Die vierte Kreuzung,  $0203 \times 0705$ , zeigte in  $F_1$  denselben Rostgrad wie der empfänglichere Elter 0705 (oder etwas höher);  $F_2$  war durchschnittlich intermediär

Das Verhalten der Kreuzung  $0319 \times 0501$  wird aus dem Folgenden ersichtlich.

1904, 0319	— — — — —	Rostgrad $\frac{6}{6}$	0 $\frac{29}{6}$ 0 $\frac{29}{7}$	Blätter 0—1	Ähren 0
» 0501	— — — — —	» »	1 » 3 »	3 »	1
» $0319 \times 0501$	$F_1$ . 8 Pflanzen	» »	0 $\frac{28}{6}$ 0 »	0—1 »	0
1905, 0319	— — — — —	» $\frac{7}{7}$	0 $\frac{13}{7}$ 0		
» 0501	— — — — —	» »	1 » 2		
» $0319 \times 0501$	$F_2$ . Linie a	» »	0—1 » 1		
» »	» » » b	» »	1 » 1+		
» »	» » » c	» »	0—1 » 1		
» »	» » » d	» »	1—2 » 2—		
» »	» » » e	» »	0—1 » 1		
» »	» » » f	» »	0—1 » 0		
» »	» » » g	» »	0—1 » 1—		
» »	» » » h	» »	0—1 » 1—		

Im Jahre 1906 wurden 36  $F_3$ -Parzellen angebaut. Die Mutterpflanzen dieser Parzellen waren aus 6 von den  $F_2$ -Parzellen des Jahres 1905, ohne Rücksicht auf ihr Verhalten gegen den Gelbrost, ausgenommen. Die Gradierung des Gelbrosts am 10 Juli ergab folgendes Resultat:

0319	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	$^{10/7}$ Rostgrad 0
0501	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	» » 2
0319 × 0501.	$F_3$ .	2	Parzellen									» » 0
»	»	»	2	»								» » 0—1
»	»	»	13	»								» » 1
»	»	»	15	»								» » 2
»	»	»	3	»								» » 3
»	»	»	1	»								» » 3—4

Es ergab sich also auch hier 1:0 deutliche Spaltung, 2:0 Bildung neuer Abstufungen ausserhalb der Elterngrenzen. Die vier letzten Parzellen waren auffallend mehr befallen als 0501, und nichts deutet darauf, dass diese stärkere Empfänglichkeit von irgend welchen begünstigenden äusseren Verhältnissen bedingt wäre; Die am stärksten befallene Parzelle hatte als Nachbarparzelle eine mit Grad 1.

Da die Elternsorte 0319 im Jahre 1906 völlig rostfrei war, hätte man auch bei einer grösseren Anzahl von Parzellen nicht sehen können, ob noch mehr resistente Abstufungen als bei 0319 gebildet wurden.

Die deutliche Vererblichkeit des verschiedenen Rostgrads dieser Parzellen konnte folgendes Jahr (1907), trotzdem dass der Rost dieses Jahr nur wenig auftrat, konstatiert werden. Es wurde von einigen der  $F_3$ -Pflanzen wieder eine Anzahl von Pflanzen separat ausgesät, 7—15 Pflanzen von jeder Parzelle. Die Nachkommenchaften dieser Pflanzen zeigten folgendes Verhalten:

$F_3$ -Parzellen 1906	$F_4$ -Parzellen 1907	$F_3$ -Parzellen 1906	$F_4$ -Parzellen 1907
a. Rostgrad 0	1. $^{20/7}$ Rostgrad 0	d. Rostgrad 1	1. $^{20/7}$ Rostgrad 0
	2. » » 0		2. » » 0
	3. » » 0		3. » » 0
	4. » » 0		4. » » 0
	5. » » 0		5. » » 0
	6. » » 0		6. » » 0
	7. » » 0		7. » » 0
	8. » » 0		8. » » 0
	9. » » 0		9. » » 0
			10. » » 0

$F_3$ -Parzellen 1906	$F_4$ -Parzellen 1907	$F_3$ -Parzellen 1906	$F_4$ -Parzellen 1907
b. Rostgrad 2	1. <sup>20/7</sup> Rostgrad 1	e Rostgrad 1	1. <sup>20/7</sup> Rostgrad 0
	2. » » 1		2. » » 0
	3. » » 1		3. » » 0
	4. » » 1		4. » » 0
	5. » » 0		5. » » 0
	6. » » 0		6. » » 0
	7. » » 0		7. » » 0
	8. » » 0		
	9. » » 0		1. » » 1
	10. » » 0		2. » » 0
	11. » » 0		3. » » 0
	12. » » 0		4. » » 1
	13. » » 0		5. » » 1
	14. » » 1		6. » » 1
c. Rostgrad 1	1. » » 0	f. Rostgrad 3	7. » » 1
	2. » » 1		8. » » 0
	3. » » 0		9. » » 1
	4. » » 1		10. » » 1
	5. » » 0		11. » » 1
	6. » » 0		12. » » 0
	7. » » 0		13. » » 0
	8. » » 0		14. » » 1
	9. » » 0		15. » » 1
	10. » » 0		

Obwohl Konstanz bei den  $F_3$ -Parzellen natürlich nicht zu erwarten ist, was von dem wechselnden Verhalten ihrer Nachkommenschaften angedeutet wird, so ist jedoch, trotz des schwächeren Auftretens vom Rost im Jahre 1907, deutlich ersichtbar, dass die empfänglicheren  $F_3$ -Parzellen, vor allem die Parzelle f, durchschnittlich mehr rostbefallene Nachkommenschaften liefern als die resistenteren  $F_3$ -Parzellen. Ein sicherer Vergleich mit den Eltern konnte dieses Jahr nicht gemacht werden, weil dieselben nicht ganz in der Nähe wuchsen.

Noch deutlicher und bestimmter traten im Jahre 1908 durch die Kreuzungsspaltung veranlasste Transgressionen der Rostempfindlichkeit hervor. Es wurde damals die  $F_3$ , 96 Parzellen (Feldnummern 413—508), der Kreuzung 0315  $\times$  Schwed. Sammetweizen angebaut. 1908 war ein ziemlich schwaches Rostjahr: bei Schwed. Sammetweizen wurde gar kein Rost bemerkt; 0315, Pudelweizen, der sonst der Klasse 3 zugerechnet ist, wurde nur wenig befallen (Grad 1). Trotzdem fanden sich unter den 96  $F_3$ -Parzellen zwei mit sehr starkem Rostangriff (Grad 5); bei diesen Parzellen waren die Blätter Mitte Juli ganz voll Rost und trockneten deshalb



schnell ein, während ihre Nachbarparzellen vollständig rostfrei sein konnten. An den Blattscheiden des geernteten Materials konnten bei diesen sehr stark befallenen Parzellen Massen von Teleutosporen konstatiert werden, während bei den Elternsorten gar keine zu finden waren. Die Verschiedenheiten waren somit sehr auffallend, und es konnte gar kein Zweifel bestehen, dass Kombinationen mit viel grösserer Empfänglichkeit als bei den Eltern ausgespaltet worden waren. Der Rostgrad dieser Parzellen war in Wirklichkeit so hoch, dass sie in dieser Hinsicht sicher mit den aller empfänglichsten bei Svalöf beobachteten Sorten gleichzustellen waren. Wir haben somit hier ein Beispiel, wo durch Kreuzung verschiedener Formen von geringer und mittelmässiger Empfänglichkeit Kombinationen mit sogar extrem grosser Empfänglichkeit ausgespaltet werden. Zwei andere Parzellen zeigten auch deutlich grössere Empfänglichkeit als die Eltern, und es wurden auch bei diesen viele Teleutosporen an den Scheiden beobachtet, wenn auch nicht in solchem Masse wie bei den beiden früher erwähnten. Ob auch andere Parzellen grössere Empfänglichkeit zeigten, konnte nicht sicher entschieden werden, zumal die vollständigen Annotationen über sämtliche Parzellen in einem ziemlich späten Stadium, wo die Blätter schon zum grossen Teil eingegangen waren, ausgeführt wurden. Früher im Sommer wurde nur das sehr auffallende Verhalten der extrem empfänglichen Parzellen bemerkt. Ein vollständiges Gradieren sämtlicher Parzellen wurde damals nicht gemacht.

Die extrem rostempfindlichen Parzellen wurden nicht weiter ausgesät. Dagegen wurden von den übrigen Parzellen 30 zur fortgesetzten Züchtung ausgewählt, indem von diesen eine geringere oder grössere Anzahl von Pflanzen, ohne Rücksicht auf ihr Verhalten gegen den Rost, ausgenommen und weiter separat gesät wurden. Die Nachkommenschaften dieser insgesamt 167 Pflanzen 1909 wurden auf den Gelbrostgrad gradiert. Das Resultat wird aus der Tabelle S. 69—70 ersichtlich.

Es ist gleich zu sehen, dass einige von den  $F_3$ -Parzellen, wie 415, 435 und 502 Nachkommenschaften gegeben haben, die durchschnittlich einen entschieden höheren Rostgrad als die Eltern besitzen. Es waren somit im Jahre 1908, ausser den oben angeführten  $F_3$ -Parzellen mit extrem erhöhtem Rostgrad, offenbar auch andere vorhanden, mehr empfänglich als die Eltern, wenn auch die Differenz nicht so gross war, dass sie bei der zu späten Beobachtung bemerkt werden konnte. Die extrem rostbefallenen Parzellen waren m. a. W. von den Eltern in keiner Weise stark diskontinuierlich getrennt, sondern im Gegenteil durch Übergänge mit ihnen verbunden.

Die Bildung transgressiver Abstufungen ist auch im Jahre 1909 sehr auffallend. Während die beiden Eltern den Rostgrad 1 zeigen, variiert der Rostgrad der  $F_4$ -Parzellen zwischen 0 und 6.

Es fällt ferner auf, dass die Nachkommenschaften vieler  $F_3$ -Parzellen sehr deutlich ihre Zusammengehörigkeit, d. h. Abstammung von derselben  $F_3$ -Parzelle, durch übereinstimmenden Rostgrad zeigen. Es fällt z. B. sofort auf, dass die 5 Nachkommenschaften der  $F_3$ -Parzelle 422 sämtlich den Grad 0, die 4 Nachkom-

Feld- nummer 1908	Feld- nummer 1909	Rost- grad 1909	Tag der Beobach- tung	Feld- nummer 1908	Feld- nummer 1909	Rost- grad 1909	Tag der Beobach- tung
0315 Pudelweizen				424	380	1,5	$\frac{9}{8}$
	324	1	$\frac{9}{8}$	»	381	2	»
Schwed. Sammetweizen				»	382	2	»
	325	1	$\frac{9}{8}$	»	383	2	»
	326	1	»	»	384	2	»
0315 X Schwed. Sammetweizen				»	385	2	»
$F_3$	$F_4$			»	386	1	»
413	327	0	$\frac{9}{8}$	»	387	2	»
»	328	1	»	»	388	2	»
415	329	3	»	»	389	3	»
»	330	3	»	431	390	3	»
»	331	3	»	»	391	2	»
»	332	3,5	»	»	392	3	»
»	333	3	»	»	393	2	»
»	334	3	»	»	394	2	»
»	335	3,5	»	433	395	3	»
»	336	2	»	»	396	3	»
»	337	3	»	»	397	1	$\frac{10}{8}$
»	338	1	»	435	398	5	»
»	339	3,5	»	»	399	2	»
»	340	3	»	»	400	4	»
»	341	4	»	»	401	4	»
»	342	3	»	439	402	6	»
»	343	1	»	446	403	1	»
»	344	3	»	»	404	1	»
»	345	2	»	»	405	1	»
»	346	1,5	»	»	406	1	»
»	347	3	»	466	407	1	»
»	348	2	»	»	408	1	»
»	349	2	»	»	409	2	»
»	350	2	»	»	410	1	»
416	351	2	»	»	411	1	»
»	352	2	»	478	412	2	$\frac{10}{8}$
417	353	2	»	»	413	2	»
»	354	2,5	»	»	414	1	»
»	355	2	»	»	415	2	»
421	356	3	»	»	416	0	»
»	357	2	»	»	417	1	»
»	358	2	»	»	418	0	»
»	359	1	»	484	419	4	»
422	360	0	»	»	420	2	»
»	361	0	»	»	421	1	»
»	362	0	»	»	422	2	»
»	363	0	»	»	423	1	»
»	364	0	»	486	424	1	»
423	365	1	»	»	425	1	»
»	366	0	»	»	426	0	»
»	367	1	»	»	427	1	»
»	368	1	»	»	428	0	»
»	369	0	»	»	429	0	»
»	370	1	»	491	430	6	»
»	371	2	»	»	431	3	»
»	372	1	»	»	432	2	»
»	373	2,5	»	»	433	2	»
»	374	1	»	»	434	1	»
»	375	1	»	»	435	1	»
»	376	2	»	492	436	0	»
»	377	1	»	»	437	0	»
»	378	2	»	»	438	0	»
»	379	0	»	494	439	1	»
				»	440	2	»

Feld- nummer 1908	Feld- nummer 1909	Rost- grad 1909	Tag der Beobach- tung	Feld- nummer 1908	Feld- nummer 1909	Rost- grad 1909	Tag der Beobach- tung
494	441	3	$10/8$	502	472	3	$10/8$
»	442	0	»	»	473	4	»
»	443	2	»	»	474	3	»
»	444	4	»	503	475	4	»
»	445	3	»	»	476	3	»
»	446	3	»	»	477	2	»
495	447	2	»	»	478	3	»
»	448	4	»	505	479	1	»
»	449	1	»	»	480	3	»
»	450	3	»	»	481	3	»
»	451	3	»	»	482	1	»
»	452	1	»	»	483	1	»
»	453	2	»	506	484	3	»
496	454	3	»	»	485	3	»
»	455	1	»	»	486	1	»
»	456	1	»	»	487	1	»
»	457	0	»	»	488	2	»
»	458	0	»	507	489	3	»
500	459	0	»	508	490	1	»
»	460	0	»	»	491	2	»
»	461	1	»	»	492	1	»
501	462	2	»	»	493	1	»
»	463	2	»	0315 Pudelweizen			
»	464	3	»	494	1	$10/8$	
»	465	1	»	Schwed. Sammetweizen			
»	466	3	»	495	1	$10/8$	
502	467	3	»	496	1	»	
»	468	4	»				
»	469	3	»				
»	470	3	»				
»	471	6	»				

menschaften der Parzelle 446 sämtlich den Grad 1 zeigen. Umgekehrt finden wir bei den 8 Nachkommenschaften der  $F_3$ -Parzelle 502 überall einen hohen, wenn auch verschieden hohen Rostgrad. Bei mehreren anderen, z. B. 423, 424, 431, 466, 486, schwankt der Rostgrad der Nachkommenschaften etwas, aber jedoch nicht mehr, als dass die Spaltung in  $F_3$  nur verhältnismässig gering gewesen zu sein scheint. Bei wieder anderen ist die Spaltung etwas grösser.

Andere  $F_3$ -Parzellen zeigen dagegen deutlich, sogar bei wenigen Nachkommenschaften, dass eine Spaltung des Rostgrades bei ihnen stattgefunden haben muss, wie 484 (Grad 1—4 bei den Nachkommenschaften), 491 (Grad 1—6), 494 (Grad 0—4), 495 (Grad 1—4) und 496 (Grad 0—3). 491 scheint sogar, schon bei der geringen Zahl von Nachkommenschaften, die  $F_3$ -Spaltung beinahe zu wiederholen, indem schwach rostige — extrem rostige Abstufungen hier vorkommen.

Obwohl natürlich die Zahl der Nachkommenschaften jeder  $F_3$ -Parzelle gar zu gering ist, um ein genaues Bild der Spaltung derselben zu geben, so gibt doch ihr Verhalten eine bestimmte Andeutung davon, dass die Spaltung der  $F_3$ -Parzellen auf eine solche Weise stattgefunden hat, die man für alle quantitativen Eigenschaften als charakteristisch halten kann, nämlich:



a. Konstanz oder sehr geringfügige Spaltung bei manchen Parzellen. Der Rostgrad kann dabei klein oder gross sein.

b. Deutliche Spaltung, aber noch innerhalb ziemlich enger Grenzen, bei anderen.

c. Spaltung innerhalb weiterer Grenzen bei den übrigen, die zum Teil die  $F_2$ -Spaltung wiederholen.

Charakteristisch für diese Kreuzung wie für so viele andere ist auch, dass bei der Spaltung Kombinationen mit entschieden grösserer Empfänglichkeit als bei den Eltern gebildet werden. Eigentümlich für eben diese Kreuzung ist aber dabei, dass diese Transgressionen in so grosser Zahl entstehen, wie es nach der Tabelle der Fall zu sein scheint.

Dass auch Kombinationen mit grösserer Resistenz als bei den Eltern bei dieser Kreuzung entstanden, scheint nicht ganz ausgeschlossen. Im schwachen Rostjahre 1908, wo die Vatersorte, Schwed. Sammetweizen, ganz ohne Rost blieb, konnte dies natürlich nicht bemerkt werden. Im Jahre 1909, wo die beiden Elternsorten etwas Rost besaßen, blieben aber sämtliche Nachkommenschaften der  $F_3$ -Parzelle 422 ganz ohne Rost, und es scheint demnach nicht unwahrscheinlich, dass diese noch resistenter als die Vatersorte sind, wenn auch die Differenz zu gering ist, um als ganz sicher betrachtet werden zu können.

In grösserer Ausdehnung wurden Abstufungen mit erhöhter Resistenz bei einer anderen Kreuzung bemerkt, nämlich bei 0406, *Boreweizen*  $\times$  0728. Das Verhalten von  $F_1$  und  $F_2$  zeigt sich aus dem Folgenden:

1906.	0406	.....	$\frac{9}{7}$	Rostgrad	5
»	0728	.....	»	»	1 +
»	0406 $\times$ 0728.	$F_1$ . 7 Pflanzen	$\frac{10}{7}$	»	3
1907.	0406	.....	$\frac{19}{7}$	»	2
»	0728	.....	»	»	0
»	0406 $\times$ 0728.	$F_2$ . 7 Parzellen	$\frac{20}{7}$	»	1 (bei sämtl. Parzellen).

$F_1$  war somit intermediär. Die  $F_2$ -Parzellen zeigten, als Gruppen betrachtet, auch intermediäres Verhalten. Versuche, die Spaltung in der  $F_2$  zu beurteilen, wurden ebensowenig wie sonst gemacht. Die  $F_3$  wurde erst im Jahre 1909 angebaut. Aus 4 von den  $F_2$ -Parzellen wurden ohne Rücksicht auf ihr Verhalten gegen den Rost eine Anzahl von Pflanzen, bezw. 10, 3, 7 und 7, oder insgesamt 27, ausgenommen und separat gesät. Die  $F_3$ -Parzellen und die Eltern zeigten folgendes Verhalten im Jahre 1909:

0406	.....	$\frac{11}{8}$	Rostgrad	4
0728	.....	»	»	2
0406 $\times$ 0728.	$F_3$ . 6 Parzellen	.....	»	0
»	6	»	»	1

0406 × 0728. $F_3$ . 6 Parzellen	.....	$^{11}/_8$	Rostgrad 2
» 2 »	.....	»	» 3
» 3 »	.....	»	» 4
» 3 »	.....	»	» 5
» 2 »	.....	»	» 6

Es sind somit hier deutliche Überschreitungen in beide Richtungen vorhanden. Aus zwei Sorten mit mittlerer Resistenz (0728 ist nach den Beobachtungen mehrerer Jahre am richtigsten zwischen die Klassen 1 und 2, vgl. oben, zu setzen) entstehen Kombinationen mit hoher und niedriger Resistenz. Die Extreme werden wohl zwar nicht erreicht, aber die Abstufungen umfassen offenbar den grössten Teil der beim Winterweizen bekannten erblichen Variation der Rostresistenz.

Eine Kreuzung 0501, *Grenadier* × 0516, bei welcher die eine Elternsorte, 0516, äusserst resistent, die zweite der Klasse 2 zugerechnet ist, ergab folgendes Resultat.

1906. 0501	.....	$^9/_7$	Rostgrad 2
» 0516	.....	»	» 0
» 0501 × 0516. $F_1$ . 4 Pflanzen	$^{10}/_7$	»	1 +
1907. 0501	.....	$^{19}/_7$	» 1
» 0516	.....	»	» 0
» 0501 × 0516. $F_2$ . 4 Parzellen	»	»	1 (bei sämtl. Parzellen)
1909. 0501	.....	$^{11}/_8$	» 1
» 0516	.....	»	» 0
» 0501 × 0516. $F_3$ . 7 Parzellen	»	»	0
» » » 19 »	»	»	» 1
» » » 1 »	»	»	» 2
» » » 1 »	»	»	» 3

Hier ist nur zu bemerken, dass von den 28  $F_3$ -Parzellen (von denen 7 einer, 21 einer anderen der  $F_2$ -Parzellen entstammen) wieder einzelne mehr empfänglich sind als die Eltern. Bei der geringen Differenz zwischen den Eltern im  $F_3$ -Jahre kann die Gradierung im übrigen über das Verhalten dieser Kreuzung nichts näheres aussagen, als dass Spaltung überhaupt stattgefunden hat.

Auch bei der Kreuzung 0501, *Grenadier* × 0406, *Boreweizen*, sind überschreitende Abstufungen sicher konstatiert worden. Nur scheinen sie seltener als bei den bisher besprochenen Kreuzungen zu sein.

1906. 0501	.....	$^9/_7$	Rostgrad 2
» 0406	.....	»	» 5
» 0501 × 0406. $F_1$ . 5 Pflanzen	$^{10}/_7$	»	4 —
1907. 0501	.....	$^{19}/_7$	» 1
» 0406	.....	»	» 2
» 0501 × 0406. $F_2$ . 5 Parzellen	$^{20}/_7$	»	1 (bei sämtl. Parzellen).

Von einer  $F_2$ -Parzelle wurden sämtliche 74 Pflanzen separat ausgesät, von drei anderen  $F_2$ -Parzellen resp. 2, 5 und 5 Pflanzen.  $F_3$  (1908) bestand also aus 86 Parzellen. Am 27 Juli 1908 wurden Beobachtungen, aber keine Gradierung, über Gelbrost gemacht. Wie gewöhnlich trat die Spaltung deutlich hervor, indem manche Parzellen ziemlich rostig, andere dagegen nur wenig rostig wie 0501 (Grad 1) oder ganz rostfrei waren. Parzellen mehr rostig als 0406 fanden sich aber nicht; im Gegenteil war von den 10 am meisten rostigen Parzellen kaum eine einzige so stark befallen wie 0406 (Grad 4). Von den 86  $F_3$ -Parzellen wurden insgesamt 30 weitergezüchtet, indem von diesen 133 Pflanzen separat vermehrt wurden. Von den Nachkommenschaften dieser Pflanzen zeigten nun manche deutlich höheren Rostgrad (3—4) als der empfänglichere Elter 0406 (Grad 2). Viele dagegen, besonders aus bestimmten  $F_3$ -Parzellen, waren ganz rostfrei, also wahrscheinlich noch resistenter als der Elter 0501, welcher den Grad 1 zeigte. Einige  $F_3$ -Parzellen wurden direkt vermehrt; eine von diesen Linien zeigte sich, trotzdem sie im Jahre 1908 weniger rostbefallen als 0406 war, 1909 empfänglicher als 0406 und behielt sehr deutlich diese grössere Empfänglichkeit bei weiterer Vermehrung im Jahre 1910. Die Beobachtungen des Jahres 1908 dürften demnach unsicher sein; wahrscheinlich hat der eine Elter 0406 infolge zufälliger, den Rost begünstigender Umstände den hohen Rostgrad bekommen. Nach den Versuchen der folgenden Jahre kann kein Zweifel bestehen, dass auch bei dieser Kreuzung transgressive Abstufungen gebildet werden.

*0406 Boreweizen  $\times$  0203 Extra-Squarehead.*

1906.	0406	.....	.....	$\frac{9}{7}$	Rostgrad 5
»	0203	.....	.....	»	» 1 —
»	0406 $\times$ 0203. $F_1$ .	9 Pflanzen	.....	$\frac{10}{7}$	» 2
1907.	0406	.....	.....	$\frac{19}{7}$	» 2
»	0203	.....	.....	»	» 0
»	0406 $\times$ 0203. $F_2$ .	3 Parzellen	.....	$\frac{20}{7}$	» 0
»	»	4	»	»	» 1

Von einer  $F_2$ -Parzelle mit Grad 1 wurden sämtliche 66 Pflanzen separat ausgesät, von zwei anderen mit Grad 0 resp. 3 und 3 Pflanzen.  $F_3$  umfasste somit im Ganzen 72 Parzellen, die folgendes Verhalten im Vergleich mit den Elternsorten zeigten:

1908.	0406	.....	.....	$\frac{30}{7}$	Rostgrad 4
»	0203	.....	.....	»	» 0
»	0406 $\times$ 0203. $F_3$ .	44 Parzellen	.....	»	» 0
»	»	12	»	»	» 1
»	»	7	»	»	» 2
»	»	2	»	»	» 2 +
»	»	5	»	»	» 3
»	»	2	»	»	» 4 —



Das Verhalten dieser Kreuzung ist bemerkenswert. Von den 72 Parzellen zeigen nur 2 einen annähernd so hohen Rostgrad wie 0406, während alle anderen entschieden weniger, meistens gar nicht, rostbefallen sind. Von den mit Grad 3 bezeichneten Parzellen wurde bemerkt, dass die Pflanzen teilweise ebenso rostig wie 0406 waren, aber im Durchschnitt war der Rostgrad zweifellos geringer als bei 0406. Auch für die mit Grad 2 bezeichneten Parzellen wurde notiert, dass es Pflanzen ebenso oder annähernd ebenso stark befallen wie 0406 geben konnte, aber der durchschnittliche Rostgrad jeder Parzelle war viel geringer als bei 0406. Eine noch grössere Differenz von 0406 zeigten die mit Grad 1 bezeichneten Parzellen, bei denen Gelbrost nur sehr spärlich und nur bei einzelnen Blättern beobachtet werden konnte, während bei 0406 jedes Blatt mit mehreren Gelbroststreifen besetzt war. Bei den aller meisten Parzellen konnte, ebenso wie bei der Vatersorte 0203, gar kein Gelbrost konstatiert werden. Es ist jedoch damit nicht gesagt, dass diese letztgenannten Parzellen alle ebenso resistent wie 0203 sein sollten. In einem nur mittelstarken Rostjahre treten die Differenzen zwischen ziemlich resistenten und sehr resistenten Formen selbstverständlich nicht vor, weil beide Kategorien von Rost unbefallen bleiben. Es ist ein starkes Rostjahr, wo auch 0203 ein wenig angegriffen wird, erforderlich um zu zeigen, wie viele Parzellen mehr befallen werden als 0203. Vielleicht sind die meisten Parzellen in Wirklichkeit intermediär zwischen den Eltern, worüber jedoch nur ein starkes Rostjahr hätte entscheiden können.

Wenn nun auch, nach dem bei der vorigen Kreuzung Gesagten, 0406 im Jahre 1908 etwas zu hohes Rostzeichen wahrscheinlich bekommen hat, so steht doch fest, dass die empfänglicheren, mit etwa 0406 vergleichbaren Parzellen sehr viel seltener sind, als sie bei einfacher Spaltung hätten sein sollen.

Infolgedessen steht es fest, dass auch diese Kreuzung nicht der einfachen Spaltung folgt, wenn auch hier keine deutlichen Transgressionen vorkommen, sondern die Spaltung, wenigstens hauptsächlich, innerhalb der Grenzen der Eltern erfolgt.

*0234 × 0203 Extra-Squarehead.*

1906. 0234 .....	$\frac{9}{7}$	Rostgrad 2 +
» 0203 .....	»	» 1 —
» 0234 × 0203. $F_1$ . 3 Pflanzen .....	$\frac{10}{7}$	» 1 —
1907. 0234 .....	$\frac{19}{7}$	» 1
» 0203 .....	»	» 0
» 0234 × 0203. $F_2$ . 2 Parzellen .....	$\frac{20}{7}$	» 1

Von der einen  $F_2$ -Parzelle wurden sämtliche 41 Pflanzen, von der zweiten 2 Pflanzen ausgesät.  $F_3$  (1908) bestand somit aus 43 Parzellen. Es wurde an diesen nur sehr wenig Rost überhaupt ersichtlich und eine Gradierung nicht unternommen. Keine Parzelle besass jedenfalls mehr Rost als 0234 (Grad 2 +). Es scheint, als ob diese Kreuzung sich auf ähnliche Weise verhalten habe wie die vorige, obwohl das geringe Vorkommen von Rost auch an der empfänglicheren Elternsorte die Spaltung hier nicht so deutlich hervortreten liess.

Ausser den jetzt beschriebenen Kreuzungen wurden im Jahre 1905 25 andere ausgeführt, und der Rostgrad der  $F_1$  im folgenden Jahre bestimmt. Von den 12 Fällen, wo der Rostgrad der Eltern nennenswert verschieden war, ergaben 6 intermediären Rostgrad in  $F_1$ ; 3 zeigten etwa denselben Rostgrad wie der empfänglichere Elter (Empfänglichkeit dominierend), während 2 (mit 0203 als der eine Elter; vgl. die beiden letzterwähnten Kreuzungen) dem resistenteren Elter (0203) glichen.

Das Verhalten der  $F_1$  ist somit ziemlich wechselnd; es scheint nicht ganz ausgeschlossen, dass, wenn die  $F_1$  dem resistenteren Elter gleicht oder sich nähert, dies auch bei der folgenden Spaltung durch Bildung relativ weniger empfänglicheren Individuen sich bemerkbar mache (vgl. die beiden Kreuzungen  $0406 \times 0203$  und  $0234 \times 0203$  oben).

Von den letzterwähnten 25 Kreuzungen wurden nur 7 in  $F_2$  (1907) geprüft, und ist über ihr Verhalten dort nichts besonderes zu sagen, zumal der Rost 1907 wenig hervortrat.

Von **Sommerweizenkreuzungen**, im Jahre 1899 ausgeführt, gab es im starken Rostjahr 1903 eine Reihe  $F_4$ -Parzellen, deren Rostgrad gradiert wurde. Über diese Kreuzungen ist hauptsächlich nur zu bemerken, dass wie sonst deutliche Spaltung der Rostresistenz vorkam. Bei der Kreuzung  $0601 \times 0729$  variierte der Rostgrad bei 33 Parzellen von 0 bis 5; Rostgrad von  $0601 = 4$ ,  $0729 = 0$ . Bei  $0729 \times 0503$ , 9 Parzellen, Rostgrad 0—5; Rostgrad von  $0729 = 0$ , von  $0503 = 3$ . Von den übrigen Kreuzungen waren nur wenige Parzellen vorhanden. Da nicht alle, sondern meistens nur wenige der  $F_2$ -Individuen bei diesen Kreuzungen ausgesät wurden, und ausserdem Gelbrost an den  $F_3$ -Parzellen nicht vorkam, hat eine ausführliche Beschreibung des Verhaltens dieser Kreuzungen wenig Interesse. Es kamen auch hier deutliche Verstärkungen der Empfänglichkeit vor, doch waren die Differenzen im allgemeinen nicht so gross, dass man mit Sicherheit von der Bildung von Formen empfänglicher als die Eltern sprechen darf, zumal Observationen über Gelbrost nur einmal im Laufe der Vegetationszeit gemacht wurden.

Es ist jetzt das Verhalten der Gelbrostresistenz bei allen meinen weiter als in  $F_2$  bis 1909 untersuchten Kreuzungen beschrieben worden. 1907 und 1908 sind wieder eine Anzahl von Weizenkreuzungen ausgeführt, die in  $F_3$  nur zum Teil untersucht worden sind und hier nicht aufgenommen werden können.

#### 4. Diskussion der Ergebnisse der Kreuzungsuntersuchungen.

Wie BIFFEN hervorhebt und wie auch meine Kreuzungen deutlich zeigen, muss die verschiedene Resistenz gegen Gelbrost, wodurch verschiedene Sorten in so charakteristischer Weise von einander abweichen, in der erblichen Konstitution derselben begründet sein. Die Kreuzungen lehren nämlich, dass diese Eigenschaft



ebenso wie alle anderen mendelnden Eigenschaften auf die Descendenz in derselben Weise übertragen wird, ob die Mutter oder der Vater den empfänglichen bzw. resistenten Elter darstellt, was nicht der Fall hätte sein können, wenn die Empfänglichkeit nur von mechanischem Mitschleppen der Krankheit mit den Samen bedingt wäre. Das Übertragen dieser Krankheit geschieht m. a. W. in gewöhnlicher Weise durch die Gameten, was auch die Spaltung in  $F_2$  und den folgenden Generationen ganz offenbar beweist.

Dass die Krankheit mit dem erblichen Charakter, der Konstitution der Sorte, zusammenhängt, ist somit ganz zweifellos. Dass die Ursache der Resistenz nicht in äusseren Eigenschaften wie der äusseren Eigenschaft der Blätter zu suchen ist, darüber besteht wohl heutzutage nur mehr eine Meinung. In erster Linie ist wohl sicherlich die Beschaffenheit des Zellinhaltes, des Substrats des Pilzes, entscheidend. Sehr wichtig ist dabei der Nachweis MARRYATS<sup>1</sup>, dass die Uredssporen auf resistenten Sorten zwar keimen, aber ihre Entwicklung bald einbüßen, was deutlich zeigt, dass die Beschaffenheit des Substrats für die Entwicklung des Rostes ungünstig ist.

Eine Tatsache ist es ferner, dass die Spaltung der Rostresistenz bei Kreuzungen stets sehr deutlich hervortritt. Bei meinen Kreuzungen, ebenso wie bei denjenigen BIFFENS, ist kein Fall eingetroffen, wo die Spaltung nicht ganz unverkennbar ist.

Wie aber die Spaltung erfolgt, ob die Unterschiede an Rostresistenz von der Anwesenheit und Abwesenheit eines Faktors oder mehrerer Faktoren bedingt werden, ist eine andere Frage.

Die Schwierigkeit, das Verlaufen der Spaltung sicher zu beurteilen und Spaltungszahlen zu erhalten, besteht hier vor allem darin, dass man nicht sicher entscheiden kann, ob die ausgespalteten Individuen der  $F_2$  ganz denselben Rostgrad wie die Eltern besitzen oder nicht. Es besteht hier nicht dasselbe Verhältnis wie bei den alternativen Unterschieden, wo man immer feststellen kann, ob die eine oder die andere Alternative vorhanden ist. Wie schon oben gesagt, lässt sich aber bei dieser Eigenschaft niemals die Alternativen resistent — nicht resistent aufstellen, denn eine absolut resistente Sorte gibt es überhaupt nicht. Betreffend die rostbefallenen ausgespalteten Individuen wird sich stets die Frage aufstellen, ob ihre Empfänglichkeit ebenso gross wie bei dem einen oder anderen Elter, oder vielleicht grösser oder geringer ist. Dies an den einzelnen Individuen zu entscheiden, ist wegen der Modifikationsfluktuation unmöglich.

Aber auch wenn man, wie bei meinen Untersuchungen konsequent durchgeführt worden ist, die Nachkommenschaften der  $F_2$ -Individuen beurteilt, wobei man den Durchschnittsgrad einer Anzahl von Individuen bekommt und dadurch die Modifikationsfluktuation grösstenteils beseitigt, bestehen die Schwierigkeiten, wenn auch in vermindertem Massstabe. Der Gelbrost tritt niemals vollständig gleichförmig

<sup>1</sup> Journ. agricult. sc, II, 1907, S. 129—137.



in verschiedenen Teilen des Feldes auf — verschieden starke Infektion, Differenzen an Bodenbeschaffenheit usw. mögen dabei einwirken —, in bezug auf kleinere Unterschiede verhalten sich die Linien aus schon oben angeführten Gründen nicht ganz parallel in verschiedenen Jahren usw. Auch wenn man Parzellen mit einander vergleicht, wird es somit immer schwierig zu entscheiden sein, ob sie ganz denselben Rostgrad wie die Eltern besitzen oder nicht. Die Spaltung wie bei Farbenmerkmalen zahlenmässig auszudrücken, hat sich deshalb auch bei dieser Methode als undurchführbar erwiesen, und der Nachweis einer bestimmten Zahl von Einheiten lässt sich infolgedessen gegenwärtig auch nicht bringen.

Gewisse nicht unwichtige Schlüsse lassen sich jedoch aus dem vorhandenen Materiale ziehen.

Dass die Spaltung in den von mir untersuchten Fällen nicht in der einfachen Weise verläuft, wie BIFFEN für seine Kreuzungen angibt, d. h. nach dem einfachen mendelschen Schema 1 : 2 : 1 oder 3 : 1 mit Bildung  $\frac{1}{4}$  homozygoter Individuen jeder Elternabstufung, geht erstens aus dem fast regelmässigen Entstehen von Abstufungen, welche die Grenzen der Eltern überschreiten, hervor. Besonders gross sind die Transgressionen der Rostempfindlichkeit bei den Kreuzungen 0401  $\times$  0705 (S. 63) und 0315  $\times$  Schwed. Sammetweizen (S. 67); aus mässig empfänglichen bis relativ resistenten Elternsorten sind Linien entstanden, die sich den sehr empfänglichen, sogar den aller empfänglichsten mir bekannten Sorten anreihen. Aber auch bei den meisten anderen Kreuzungen, vgl. 0406  $\times$  0728 (S. 71), 0501  $\times$  0516 (S. 72), treten deutliche und, wie es nach der untersuchten Parzellenzahl scheint, nicht gerade seltene Transgressionen hervor. Auffallend werden die Transgressionen, auch bei geringerem Rostgrade, wenn die Eltern sehr resistent sind und keine Spur von Rost zeigen, während die Nachkommenschaft der Kreuzung in demselben Jahre mehr oder weniger rostbefallen ist (vgl. 0319  $\times$  0716, S. 65).

Weniger deutlich treten bei dem von mir untersuchten Materiale Transgressionen in der entgegengesetzten Richtung hervor, d. h. Bildung von Abstufungen, resistenter als bei den Eltern. Es ist dies aber schon aus dem Grunde selbstverständlich, dass meine Kreuzungen hauptsächlich zwischen resistenten Elternsorten ausgeführt worden sind; es ist einleuchtend, dass eventuell gebildete, in dieser Richtung gehende Transgressionen nicht hervortreten können, sobald der eine Elter vom Rost nicht angegriffen wird. Trotzdem sind in einzelnen Fällen, wo keiner der Eltern den resistentesten Sorten gehören, Linien resistenter als die beiden Eltern beobachtet, so bei der Kreuzung 0406  $\times$  0728 (S. 71), möglicherweise auch bei 0401  $\times$  0705 (S. 63) und 0315  $\times$  Schwed. Sammetweizen (S. 67). Der Unterschied ist jedoch nicht so sicher wie bei den Transgressionen gegen geringere Rostresistenz; starke Rostjahre sind auch erforderlich, um die Erhöhungen der Rostresistenz sicher zu zeigen, sofern die Eltern selbst einigermassen resistent sind. Leichter wäre es, solche Erhöhungen der Rostresistenz nach Kreuzungen zwischen sehr empfänglichen Elternsorten zu konstatieren; solche Kreuzungen sind aber von mir vorläufig nicht ausgeführt worden.

Im allgemeinen finden wir die transgressiven Abstufungen beiderlei Art am deutlichsten ausgeprägt, wo die Eltern alle beide mittelmässig resistent, d. h. von derselben oder von wenig verschiedener Rostresistenz sind ( $0401 \times 0705$ ,  $0315 \times$  Schwed. Sammetweizen,  $0406 \times 0728$ ). Weniger ausgeprägt sind sie nach Kreuzungen zwischen Sorten von hoher und mittlerer Resistenz ( $0319 \times 0501$ ,  $0501 \times 0516$ ,  $0501 \times 0406$ ), kaum oder nicht konstatierbar bei Kreuzungen zwischen Sorten von hoher und niedriger Resistenz ( $0203 \times 0406$ ,  $0203 \times 0234$ ).

Es ist ferner besonders zu bemerken, dass die Transgressionen, z. B. die Linien mit extrem erhöhter Rostempfänglichkeit, gar nicht eine scharf getrennte Gruppe bilden, sondern mit den Eltern durch Übergänge, wo die Empfänglichkeit weniger erhöht ist, verbunden werden, was z. B. die Kreuzung  $0315 \times$  Schwed. Sammetweizen deutlich zeigt.

Infolge dieses Mangels an Diskontinuität lässt es sich nicht durchführen, die Anzahl der  $F_2$ -Individuen mit (nach dem Verhalten ihrer Nachkommenschaft) transgressiver Rostresistenz festzustellen, denn von den Parzellen, die an Resistenz den Eltern am nächsten stehen, lässt es sich, wie schon oben ausgeführt ist, nicht sicher behaupten, ob sie Transgressionen bezeichnen oder nicht, und es muss daher ziemlich willkürlich sein, was man der einen oder der anderen Seite zurechnen soll. Dass die stark überschreitenden Abstufungen bei mehreren von den hier beschriebenen Kreuzungen keineswegs selten sind, ist jedoch offenbar.

Schon diese relative Häufigkeit der Transgressionen und die Verbindung derselben mit den Elternsorten durch Übergänge zeigen, dass die Transgressionen der regelmässigen Spaltung gehören, nicht aber regellos, spontan auftretende Neuheiten bezeichnen, auch wenn es nicht angegeben werden kann, in welchem Zahlenverhältnisse sie gebildet werden.

Dafür, dass die Transgressionen der regelmässigen Spaltung gehören, spricht aber auch vor allem die Tatsache, dass die Abspaltung von Transgressionen bei gewissen  $F_3$ -Parzellen in derselben Weise fortsetzt wie in der  $F_2$ , was sich besonders bei der Kreuzung  $0315 \times$  Schwed. Sammetweizen (vgl. die Tabelle S. 69—70) deutlich herausgestellt hat. Wie aus den Nachkommenschaften einzelner  $F_3$ -Parzellen dieser Kreuzung, wie 484 und 496, ersichtlich ist, spalten diese wieder in Elternabstufungen und weit empfänglichere Abstufungen auf, was deutlich angibt, dass die Bildung der letzteren immer fortwährend stattfindet. Dass die transgressiven Abstufungen der regelmässigen Spaltung gehören, bedeutet, dass diese eine komplizierte ist.

Vielleicht möchte Jemand die Einwendung machen wollen, dass die Transgressionen nur daher rühren, dass die Elternsorten nicht einheitlich und konstant seien, und dass folglich ihre Gameten zum Teil schon an sich die bezügliche hohe, bzw. niedrige, Rostempfänglichkeit tragen können. Es ist jedoch erstens daran zu erinnern, dass die sämtlichen Kreuzungen zwischen reinen Linien, nicht zwischen mehr oder weniger gemischten alten Sorten, ausgeführt worden sind. Bezüglich der Konstanz der reinen Linien, ist es zwar nicht sichergestellt, dass diese eine absolute



ist (vgl. S. 61), aber dass die Variation (erblicher Art) bei den Linien, wenn sie überhaupt vorkommt, nur innerhalb sehr enger Grenzen sich bewegen muss, ist auch schon hervorgehoben worden, und die stark überschreitenden Abstufungen der Kreuzungen können daher in dieser Weise nicht erklärt werden. Zweitens ist hervorzuheben, dass bei meinen Kreuzungen stets die Descendenz jedes  $F_1$ -Individuums für sich verfolgt werden kann, weil die  $F_1$ -Individuen niemals gemischt, sondern stets getrennt vermehrt worden sind; aus einer einzelnen Gametenverbindung entsteht, wie es mehrere von meinen Kreuzungen zeigen, die sehr starke Spaltung, die die Grenzen der Eltern oft weit überschreitet. Wenn man nun auch, trotz des früher Gesagten, annähme, dass die zur Befruchtung gelangenden Gameten der Elternsorten anderen Rostcharakter als im Durchschnitt die Eltern selbst trügen, die eine Gamete z. B. extreme Rostempfänglichkeit, dann wäre die Frage doch nicht gelöst. Wenn einfache Spaltung vorliegen sollte, hätte man dann zu erwarten, dass ein Viertel der  $F_2$ -Individuen den extremen Rostcharakter tragen sollte, aber so verläuft in den näher untersuchten Fällen die Spaltung nicht. Auch unter dieser Voraussetzung müsste man zu der Annahme einer komplizierten Spaltung gelangen.

Wenn die Gameten der gekreuzten Linien einen wesentlich verschiedenen Rostcharakter trügen, dann wäre ferner zu erwarten, dass schon die  $F_1$ -Pflanzen erhebliche Unterschiede an Resistenz zeigten, was aber in keinem Falle hat konstatiert werden können.

Die Unterschiede, die die  $F_2$ -Parzellen in gewissen Fällen unter sich zeigen (vgl.  $0319 \times 0716$ , S. 65;  $0319 \times 0501$ , S. 66), sind leicht daraus zu erklären, dass bei komplizierter Spaltung und geringer Individuenzahl die möglichen Kombinationen infolge des reinen Zufalles in verschiedenem Verhältnisse bei verschiedenen Parzellen gebildet werden. Auch aus diesem Umstande ergibt sich also keineswegs eine Verschiedenheit der gekreuzten Gameten einer Linie.

Es muss also daran festgehalten werden, dass aus derselben Gametenverbindung neue Abstufungen der Rostresistenz entstehen können, ganz verschieden von denjenigen, die die gekreuzten Gameten kennzeichnen.

In den Fällen, wo keine deutlichen Transgressionen vorkommen, zeigt sich die Kompliziertheit der Spaltung darin, dass die Elternabstufungen selten sind und die Intermediären überwiegen. Es ist dies der Fall bei den Kreuzungen, wo die Eltern sehr verschieden rostresistent sind, wie bei  $0406 \times 0203$ ; Parzellen mit derselben hohen Empfänglichkeit wie bei 0406 sind selten. Wahrscheinlich sind die Parzellen hier grösstenteils intermediär; es sind dann auch intermediär-konstante Abstufungen zu erwarten, deren Nachweis jedoch schwierig zu bringen ist, weil auch die spaltenden Parzellen einen intermediären Durchschnittsgrad zeigen müssen. Bei der Kreuzung  $0319 \times 0501$  ist zu bemerken, dass die Parzellen, ebenso resistent wie 0319, selten sind, was auch auf die Bildung einer Mehrzahl intermediärer Abstufungen hindeutet. Die komplizierte Natur der Spaltung auch dieser Kreuzungen kann jedenfalls nicht bezweifelt werden.



Wenn somit bei allen meinen Kreuzungen die Spaltung der Rostresistenz eine komplizierte ist, so soll jedoch damit nicht gesagt werden, dass einfache Spaltung nicht vorkommen kann. Aber dass sie Regel sein sollte, das trifft nicht zu und wäre übrigens auch nicht zu erwarten bei einer Eigenschaft, die durch eine Reihe von Abstufungen repräsentiert ist. Zwar ist es leicht denkbar, dass zwei Abstufungen  $a$  und  $b$  ein einfaches mendelsches Paar mit einander bilden können, wenn sie nur in einem den Rost beeinflussenden Faktor verschieden sind, aber wie eine ganz andere Abstufung  $c$  mit sowohl  $a$  wie  $b$  einfache mendelsche Paare bilden könnte, das bliebe ohne theoretische Deduktionen ganz neuer Art unerklärlich. Es scheint mir aber ganz unnötig, solche zuzugreifen, denn die komplizierte Spaltung kann in ganz derselben Weise wie bei Farbenmerkmalen dadurch erklärt werden, dass es mehrere den Rostgrad beeinflussende Faktoren gibt, von denen jeder mit seinem Fehlen in gewöhnlicher Weise ein Merkmalspaar bildet. Mit dieser Annahme stehen alle Tatsachen in Übereinstimmung. Die Transgressionen sowohl gegen höhere als gegen niedrigere Rostresistenz werden ebenso leicht erklärlich wie z. B. Transgressionen des Rispenotypus beim Hafer<sup>1</sup> oder neue Abstufungen bei Farbenmerkmalen, Verstärkungen und Abschwächungen, die ja in der Tat sehr häufig sind. Das ganze Verlaufen der Spaltung steht mit dieser Annahme mehrerer selbständig spaltenden, den Rost beeinflussenden Faktoren in Übereinstimmung: in  $F_2$  weite Spaltung, ein  $F_3$  dagegen bei einigen der spaltenden Parzellen weite Spaltung, bei anderen geringe Spaltung usw.

Wie viel die den Rostgrad beeinflussenden Faktoren eigentlich sind, darüber lässt sich jedoch gegenwärtig nichts aussagen. Das Entstehen extremer Transgressionen aus Kreuzungen zwischen Sorten von mittlerer Resistenz, scheint gewissermassen dafür zu sprechen, dass es solcher Faktoren, welche grössere Unterschiede an Rostresistenz verursachen, nur wenige gibt, denn unter dieser Voraussetzung müssen eben solche extreme Transgressionen leicht entstehen. Damit ist es aber nicht ausgeschlossen, dass der Rostgrad ausserdem durch viele andere Faktoren in geringerem Masse modifiziert werde.

Die hier dargelegten Untersuchungen können natürlich nur beanspruchen, eine erste Orientierung in der Frage zu leisten. Eine nähere wissenschaftliche Untersuchung dieses Gegenstandes hätte sich in besondere Richtungen zu vertiefen, z. B. die gewonnenen neuen extremen Abstufungen weiter zu prüfen und zu kreuzen usw. Da aber das im Laufe der Jahre erhaltene Material jetzt ziemlich umfangreich geworden ist und die Resultate verschiedener Kreuzungen ganz offenbar in derselben Richtung gehen, scheint eine Beschreibung der nur langsam, durch vieljährige Beobachtungen und sehr ausgedehnte Versuche zu erhaltenden Tatsachen berechtigt.

Obwohl somit die Anzahl und die Wirkung der einzelnen Faktoren noch unbekannt sind, so darf durch die schon gewonnenen Tatsachen jedoch als sichergestellt angesehen werden, dass mehrere Faktoren die Rostresistenz eigenschaft beein-

<sup>1</sup> Vgl. Kreuzungsuntersuchungen Teil I, S. 97—99.

flussen und durch verschiedene Kombination die vielen erblichen Abstufungen, welche verschiedene Sorten, Linien kennzeichnen, zu stande bringen. Die erblichen Abstufungen bezeichnen Kombinationen einer Anzahl von mendelnden Faktoren, nicht aber ebenso viele selbständig entstandene Variationen. Es ist dann selbstverständlich, dass auch aus einer Gametenvereinigung eine weite Spaltung mit transgressiven Abstufungen hervorgehen kann. Die Gameten enthalten Kombinationen von Faktoren, welche bei der Spaltung in neue Kombinationen mit einander treten können und in der Weise die neuen, transgressiven oder intermediären Abstufungen zu stande bringen. Etwa dieselbe äussere Abstufung kann verschiedene Kombinationen bezeichnen, und es lässt sich daraus erklären, dass sogar aus Kreuzung von Linien mit etwa derselben erblichen Rostresistenz starke Transgressionen, wie weit mehr empfängliche Linien, hervorgehen können (vgl. 0401  $\times$  0705, S. 63, 0319  $\times$  0716, S. 65).

In bezug auf die Natur der Faktoren, die die Rostresistenz bestimmen, wurde schon oben darauf hingewiesen, dass diese wohl in erster Linie in dem Zellinhalt zu suchen sind. Die äusseren Verschiedenheiten an Rostresistenz wären also gewissermassen ein Indikator darauf, dass es viele innerliche Verschiedenheiten gibt, in der Konstitution des Plasmas wohl vor allem, die von mendelnden Faktoren berühren. Die spezifische Rostresistenz wäre dann eher als eine Folge der allgemeinen Konstitution der betreffenden Linie zu betrachten als aus dem Vorhandensein ganz besonderer Stoffe herzuleiten. Gewisse Konstitutionen böten ein für das Gedeihen des Pilzes mehr geeignetes Substrat als andere. Gerade aus diesem Gesichtspunkte liesse sich auch am besten verstehen, dass unter verschiedenen äusseren Verhältnissen dieselben Linien in bezug auf ihre relative Rostresistenz sehr verschiedenes Verhalten zeigen können.

Die bei den Kreuzungen gewonnenen Erfahrungen geben auch einen Beitrag zur Deutung gewisser anderer Tatsachen. Aus manchen reinen Linien sind abweichende Linien mit entschieden höherer oder niedrigerer Empfänglichkeit isoliert worden. In dem Falle, wo keine empfänglichen Sorten auf dem Versuchsfelde wachsen, mit denen natürliche Kreuzungen eintreffen können, würde man ohne Kenntnis der hier besprochenen Tatsachen leicht zu dem Schluss gelangen müssen, dass die abweichenden Linien mit höherer Empfänglichkeit spontan, durch Mutation, entstanden wären. Nach diesen Kreuzungsversuchen werden aber solche Abweichungen sehr leicht durch natürliche Kreuzungen mit anderen Linien von derselben oder sogar von geringerer Rostempfänglichkeit entstehen können. Die Frage, inwieweit spontane Veränderungen vorkommen, ist also durch das Konstatieren des Neuauftretens abweichender Linien in vorher konstanten Linien gar nicht auseinandergesetzt.

Ausgeprägte Dominanz der Rostempfänglichkeit hat sich bei meinen Kreuzungen selten gezeigt. Gewöhnlicherweise ist  $F_1$  deutlich intermediär; zuweilen scheint die Übereinstimmung mit dem resistenteren Elter sogar grösser zu sein.



### 5. Zusammenfassung.

1. Spaltung der Rostresistenz nach Kreuzungen ist immer deutlich vorhanden.
  2. Die Spaltung ist bei diesen Versuchen immer eine komplizierte; es resultieren durch die Spaltung stets neue Abstufungen der Rostresistenz neben den Elternabstufungen, wobei vor allem Transgressionen, Linien mehr empfänglich oder mehr resistent als die Eltern, an den  $F_3$ -Parzellen leicht zu konstatieren sind. Auch Kreuzungen zwischen Linien von etwa derselben oder von wenig verschiedener Rostresistenz ergeben in der Nachkommenschaft Spaltung mit Transgressionen.
  3. Die komplizierte Spaltung und das Vorkommen von Spaltung nach der Kreuzung etwa gleich resistenter Linien ist aus dem Vorhandensein mehrerer selbständiger, den Rost beeinflussender mendelnder Faktoren zu erklären. Mit dieser Annahme stehen sämtliche gefundene Tatsachen in Übereinstimmung.
  4. Die erblichen Abstufungen der Rostresistenz, welche verschiedene Sorten, Linien, kennzeichnen, bezeichnen demnach keine selbständig entstandenen Variationen, sondern verschiedene Kombinationen einer Anzahl von Faktoren, wobei verschiedene Kombinationen von Faktoren etwa dieselbe äussere Rostresistenz zur Folge haben können. Durch verschiedene Neukombinationen der Faktoren entstehen die neuen Abstufungen, die nach Kreuzung von Linien mit verschiedener oder etwa gleicher Rostresistenz hervortreten.
-



## Verzeichnis der gekreuzten Pedigreesorten.

### 1. Winterweizen.

- 0203, Extra-Squarehead } rotkörnige Formen mit Ähren von Squareheadtypus, aus  
0234 } alten Squareheadrassen getrennt.
- 0290, Extra-Squarehead II, rotkörnig, aus Kreuzung 0203  $\times$  0501 gezüchtet.
- 0301, Topp-Squarehead, aus Squarehead getrennt.
- 0307, Reisweizen, weisskörnige Form aus Squarehead. Ähren mitteldicht wie beim Squarehead, aber nicht kolbig.
- 0315, Pudelweizen, weisskörnige Form aus Squarehead. Ähren mitteldicht wie beim Squarehead, aber nicht kolbig.
- 0319, Kottweizen, rotkörnige Form aus 0516. Ähren mitteldicht wie beim Squarehead, aber nicht kolbig.
- 0401, rotkörnige Form aus Squarehead. Ähren mitteldicht wie beim Squarehead, aber nicht kolbig.
- 0406, Boreweizen, rotkörnige Form aus Propsteierweizen. Ähren mitteldicht wie beim Squarehead, aber nicht kolbig.
- 0411, rotkörnige Form aus Squarehead. Ähren mitteldicht wie beim Squarehead, aber nicht kolbig.
- 0501, Grenadier, rotkörnige Form aus Squarehead. Ähren mitteldicht wie beim Squarehead, aber nicht kolbig.
- 0516, rotkörnige Form aus Schonisch. Landweizen. Ähren von relativ dichtem Landweizentypus.
- 0601, rotkörnige, lang-, lockerährige Form aus Propsteierweizen.
- 0705, weisskörnige, lang-, lockerährige Form aus Schwed. Sammetweizen. Ähren glatt, braun.
- 0716, rotkörnige lang-, lockerährige Form aus Schwed. Sammetweizen. Ähren behaart, weiss.
- 0728, rotkörnige lang-, lockerährige Form aus Schwed. Sammetweizen. Ähren glatt, braun.

### 2. Sommerweizen.

- 0503, braunährige, spätreifende Form aus einem amerikanischen Weizen.
- 0601, weissährige Form aus Emmaweizen.
- 0729, braunährige, begrannte, frühreifende Form aus Vilmorin's »de Suède«.
-

## Inhaltsverzeichnis.

Einleitung .....	3
Literaturverzeichnis zu der Einleitung .....	20
Kap. I. Kornfarbe des Weizens .....	21
Zusammenfassung .....	25
Kap. II. Ähreninternodienlänge des Weizens .....	26
A. Compactum $\times$ andere Weizen .....	27
1. In den Jahren 1900—1904, hauptsächlich nur in $F_1$ und $F_2$ , untersuchte Kreuzungen .....	29
2. In den Jahren 1908—1910, in $F_1$ — $F_3$ vollständig untersuchte Kreuzungen .....	34
3. Die Faktoren des Schwed. Binkelweizens .....	39
4. Der Compactumfaktor verwandelt eine diskontinuierliche Variation in eine kontinuierliche .....	50
5. Über die Bildung von Längeabstufungen, die die Grenzen der Eltern in beiden Richtungen überschreiten .....	54
B. Landweizen $\times$ Squarehead und andere mitteldichte Formen .....	56
C. Zusammenfassung .....	56
Kap. III. Resistenz gegen Gelbrost beim Weizen .....	57
1. Allgemeines .....	57
2. Die verschiedene erbliche Rostempfänglichkeit verschiedener Sorten und Linien .....	58
3. Resultate von Kreuzungen zwischen Sorten mit verschiedener oder etwa gleicher Rostresistenz .....	61
4. Diskussion der Ergebnisse der Kreuzungsuntersuchungen .....	75
5. Zusammenfassung .....	82
Verzeichnis der gekreuzten Pedigreesorten .....	83

STUDIEN  
IN  
DER VON DEN NN. TRIGEMINUS  
UND FACIALIS INNERVIERTEN MUSKULATUR  
DER KNOCHENFISCHE

VON  
OTTO HOLMQVIST

- I. DIE TRIGEMINO-FACIALIS-MUSKULATUR BEI GADUS CALLARIAS LINNÉ
- II. ZUR VERGLEICHENDEN MORPHOLOGIE DER MM. INTERMANDIBULARIS,  
PROTRACTOR HYOIDEI UND HYOHYOIDEUS

Aus dem zoologischen Institut der Universität Lund

MIT DREI TAFELN UND EIN UND VIERZIG FIGUREN IM TEXTE

Vorgelegt den 11. Oktober 1911



LUND 1911  
HÅKAN OHLSSONS BUCHDRUCKEREI •





Die Kopfmuskulatur der Fische hat sich erst spät und in verhältnismässig geringem Grade das Interesse der Anatomen erworben: als VETTER im Jahre 1874 den ersten Teil seiner ausgezeichneten, den Stoff aus vergleichend-anatomischen Gesichtspunkten behandelnden Untersuchungen veröffentlichte, war das Feld noch so gut wie un bebaut, und er hat nicht allzu viele Nachfolger bekommen. Es sind vorzugsweise die niederen Fischordnungen, welche Gegenstand dieser späteren Forschungen gewesen; so hat neuerdings LUTHER in Bezug auf die Selachier vieles und treffliches geleistet.

Anders mit den Knochenfischen; die Kopfmuskulatur derselben ist bis jetzt nur bei sieben Formen einigermaßen vollständig bekannt gemacht worden. Die Ursache ist unschwer zu ermitteln: waren ja bei den Knochenfischen als einem verhältnismässig spät hervorgesprossenen und stark spezialisierten Zweig des Wirbeltierstammes gute Anhaltspunkte für die Beurteilung der Zustände bei den höheren Vertebraten nicht besonders zu vermuten. Die hergehörige Litteratur beschränkt sich auf folgendes <sup>1</sup>.

In einer sehr umfangreichen Arbeit über »Fiskenes Ansigt« (das Gesicht der Fische) beschrieb der Däne G. WINTHER in den Jahren 1876—78 unter anderem recht vollständig die von den Nn. Trigemini und Facialis innervierte Muskulatur (mit Ausnahme der Gruppe des ventralen Constrictors) bei einer Anzahl Fische und zwar unter den Teleostiern folgenden: *Salmo trutta*, *Cottus scorpius*, *Liparis montagui*, *Cyclopterus lumpus*, *Acanthurus chirurgus*, *Balistes vetula*, *Monacanthus pardalis*, *Ostracion triqueter*, *Tetodon heraldi*, *Diodon hystrix*, *Orthogoriscus mola* <sup>2</sup>. Die wertvollen, den morphologischen Zweck niemals ausser Acht lassenden Untersuchungen WINTHER's scheinen betreffs der Muskulatur allen nachfolgenden Verfassern unbekannt gewesen zu sein. Auf der anderen Seite kannte WINTHER die Abhandlung VETTER's aus dem Jahre 1874 offenbar nicht.

Im zweiten Teil seiner »Untersuchungen zur vergleichenden Anatomie der Kiemen- und Kiefermuskulatur der Fische« beschrieb VETTER 1878 die Befunde bei *Barbus vulgaris*, *Cyprinus carpio*, *Lucius (Esox) lucius* und *Perca fluviatilis*.

---

<sup>1</sup> Die Angaben in den Handbüchern von MECKEL, CUVIER und STANNIUS haben für unsere Zwecke keinen Belang.

<sup>2</sup> Reihenfolge und Nomenklatur sind WINTHER's.

Gleichzeitig erschien ein kleiner Aufsatz von JOURDAIN, »Des muscles de l'appareil maxillo mandibulaire de quelques poissons osseux«, der eine oberflächliche, nach bewegungsmechanischen Gesichtspunkten gegebene Beschreibung der Kiefermuskulatur bei vier marinen Knochenfischen (*Gadus*, *Molva*, *Esox* [*Belone*] und *Zeus*) enthält.

Im Jahre 1883 veröffentlichte W. SÖRENSEN eine Abhandlung über »Oppustningssækken hos Tetrodon og Aandedrættet hos Clarias« (Der Luftsack bei *Tetrodon* und die Atmung bei *Clarias*), die auch gewisse Kopfmuskeln bei *Tetrodon fahaka* berücksichtigt.

Aus dem Jahre 1884 finden wir in einer anatomischen Monographie über *Amiurus Catus* unter anderem eine die Kopfmuskeln betreffende Untersuchung von MC MURRICH.

Im Jahre 1899 wurde eine Inaugural-dissertation, »Recherches sur les nerfs cerebraux et la musculature céphalique du Silurus glanis L.«, von JUGE veröffentlicht.

Im Jahre 1903 lieferte ALLIS eine mit der diesem Verfasser eigenen Gründlichkeit durchgeführte Beschreibung der Kopfmuskeln und Gehirnnerven bei *Scomber scomber*.

BORCEA publizierte im Jahre 1907 viele Beschreibungen über die Hyohyoidmuskeln der Knochenfische und wies nach, dass die Ausbildung jener Muskeln in umgekehrten Verhältnis zur Ausbildung der Opercularmuskeln stehen.

Im Jahre 1908 beschrieb HÄMPFEL die Schlundknochenmuskulatur der Cyprinoiden und ihre Funktion.

Im letztvergangenen Jahre (1910) habe ich in einer Studie über den *M. protractor hyoidei* und den Senkungsmechanismus des Unterkiefers bei den Knochenfischen die Abkömmlinge des ventralen Constrictors von biologisch-morphologischem Standpunkt aus besprochen.

Unter den andere Fischordnungen betreffenden Schriften erwähne ich in diesem Zusammenhang nur das schöne Werk ALLIS' über »The cranial muscles and cranial and first spinal nerves in *Amia calva*«. Es erschien 1897.

Was schon nach Kenntnisnahme der Litteratur in die Augen fällt, ist einerseits die verhältnismässig grosse Einförmigkeit der Kiemenbogen- und Suspensorialmuskeln, die bei jedem beschriebenen Teleostier mit ganz unbedeutenden Modifikationen wiederkehren, und andererseits die ausserordentlich wechselnde Gestaltung und Zusammensetzung der Kiefermuskulatur, in geringerem Masse auch der Muskulatur des Zungenbeinbogens. Schon VETTER versuchte es, auch betreffs der beiden letzteren Muskelkomplexe seine vier Typen sowohl unter einander als mit den Selachiern im Einklang zu bringen, aber mit wenig Erfolg, und die von späteren Forschern hinzugefügten Tatsachen, wie wertvoll sie an sich selbst auch sind, reichen nicht aus, um die Lage der Sache zu ändern. Von der Myologie des Teleostierkopfes bietet somit die Trigemino-facialis-muskulatur schon unmittelbar das grösste Interesse dar; sie besitzt auch in weiterem vergleichend-anatomischen Sinne viel mehr Bedeutung als die Muskeln der Kiemenbogen.



Die Aufgabe, die ich mir stellte, war also diese: durch eingehende Untersuchung einer grösseren Zahl Familien und durch Vergleichung der ermittelten Befunde mit den Zuständen der anderen Fischordnungen, insbesondere der Selachier, ein morphologisches Bild der Kiefer- und Zungenbein-muskulatur bei den Knochenfischen zu gewinnen suchen. Als orientierendes Vorstudium unternahm ich viele Sectionen einer harmonisch ausgebildeten Form, des gemeinen Dorsches (*Gadus callarias* L.). Ursprünglich war es meine Absicht, die dabei gewonnenen Ergebnisse nur bei einer vergleichenden Zusammenstellung verschiedener Familien je nach Bedarf zu verwerten; da aber einerseits so gut wie gar keine Beschreibung der Myologie dieser Gattung existiert, andererseits die Nervenbefunde einige, wie es mir scheint, bemerkenswerte Tatsachen darboten, habe ich es für angemessen gehalten, die fragliche Untersuchung als erste Abteilung vorliegender Schrift durch und durch zu referieren. Im zweiten Kapitel werde ich die Morphologie der *Mm. intermandibularis*, *protractor hyoidei* und *hyohyoideus* festzustellen versuchen, und ein dritter, baldigst zu erscheinender Teil ist der Kiefermuskulatur, dem s. g. *M. adductor mandibulae*, gewidmet worden.

Die Untersuchungen, deren Ergebnisse hier dargelegt werden, sind hauptsächlich im hiesigen zoologischen Institut, übrigens in der biologischen Meeresstation der Königl. Akademie der Wissenschaften mit Genehmigung des Direktors, Herrn Prof. Dr Hj. Théel, ausgeführt worden. Vieles und gutes Material habe ich in unserer Station durch die freundliche Fürsorge des Vorstandes, Herrn Dr Hj. Östergren, bekommen; aus dem zoologischen Institut zu Upsala stellte mir der Direktor, Herr Prof. Dr A. Wirén, zwei Individuen von *Gymnarchus niloticus* gütig zur Verfügung, und durch eine besondere Freundlichkeit des Herrn Prof. Dr H Jungersen in Kopenhagen bin ich in der Lage gewesen, im dortigen zoologischen Museum die Zungenbeinmuskulatur mehrerer niederen Teleostier zu untersuchen. Alle diese Herren bitte ich, meinen besten Dank entgegenzunehmen; besonders dem Director des hiesigen Institutes, Herrn Professor Dr Hans Wallengren, dessen liebenswürdiges Entgegenkommen die Durchführung meiner Arbeit in absehbarer Zeit überhaupt ermöglichte, bin ich zur herzlichsten Dankbarkeit verpflichtet.

*Der Verfasser.*



I

DIE TRIGEMINO-FACIALIS-MUSKULATUR BEI  
GADUS CALLARIAS LINNÉ





## 1. Beschreibung der Muskulatur.

### M. adductor mandibulæ.

(VETTER und Auctt.).

Mit diesem Namen bezeichne ich wenigstens vorläufig jenen Muskelkomplex, der den wirksamen Faktor beim Schliessen des Mundes darstellt. Er besteht beim Dorsche wie bei den früher untersuchten Teleostiern aus zwei Hauptteilen: einem, der hauptsächlich vom Suspensorium ausgehend seine Befestigung am Ober- und Unterkiefer findet, und einem anderen, der die Innenseite des Unterkiefers einnimmt.

Erstgenannte Muskelpartie teilt sich in vier wohl markierte Portionen, die ich provisorisch als  $A_1$ — $A_4$  aufführe, ohne damit irgendwelche morphologische Beziehungen zu den von früheren Autoren in derselben Weise bezeichneten Muskeln anzudeuten.

Die erste Portion ( $A_1$ , Fig. 1<sup>1</sup>) ist ein recht eigentümlicher Muskel. Er bildet den äussersten Bauch des Adductors, der zweiten Portion ( $A_2$ ) unmittelbar anliegend, und nimmt als eine dünne, durchsichtige, ausgedehnte Fascie seinen Ursprung am Hinterrande des äusseren Blattes des *Præoperculum*. Diese Ursprungslinie fällt so ziemlich mit dem Ursprunge des  $A_2$  zusammen (Fig. A); die Fascie setzt jedoch nach hinten in die derbe, weissliche Bindegewebsschicht auf der Aussenseite des hinteren inneren Blattes des *Præoperculum* fort. Faserbildung kommt in der Fascie kaum vor, bisweilen aber zeigt diese einige kurze, schwache Muskelbündel an der Grenze gegen den *M. levator arcus palatini*, der übrigens mit seinen oberflächlichsten Bündeln längs der ganzen Grenze mit Ausnahme der Vorderecke des Muskels auf jene Fascie hinübergreift.

Etwa auf der Höhe der hinteren Orbitalgrenze wird die Fascie plötzlich muskulös. Der Übergang markiert sich wie eine etwas vertiefte, schwach bogenförmige Linie, deren Krümmung nach hinten geht; der so entstandene Muskelbauch ist dreieckig, flach und verhältnismässig klein. Seine hintere obere Ecke reicht etwa bis an die Orbita hinauf und bekommt zuweilen von der 4:ten Portion ( $A_4$ ) ein winziges Bündel, das wie eine Brücke die 2:te Portion ( $A_2$ ) überquert. Die Bündel des Muskels laufen nach vorn zusammen, und an der Grenze gegen dessen vorderen Drittel und zwar an der Aussenseite kommen eine Menge getrennter Sehnenfasern zum Vorschein; sie treten bald zur Bildung einer kurzen, breiten und ziemlich dünnen Sehne ( $A_1t$ ,

<sup>1</sup> Die Ziffer beziehen sich auf die Figuren der Tafeln.

Fig. 1) zusammen, und diese inseriert auf das bedeutende Ligament (*lmm*, Fig. 1), das die Aussenseite des *Articulare* mit der oberen Hälfte des Oberkiefers, und zwar mit dessen Hinterrande, verbindet.

So viel ich weiss, wird dieses Ligament zum ersten mal von JOURDAIN (N:o 17, S. 38), jedoch ohne nähere Beschreibung, erwähnt; seine Figur ist ebenfalls unzulänglich. Etwas später (1885) wird dasselbe von BROOKS (N:o 6, S. 179) als »a band of white, fibrous tissue, into which a smale muscle is inserted«, ebenso kurz wie richtig beschrieben sowie mit einem Namen, »the posterior maxillo-mandibular ligament,« belegt. Im nachstehenden werde ich vorläufig diese Benennung beibehalten. Die Abbildung BROOK's ist nichtssagend.

Die Sehne des  $A_1$  (Fig. 1,  $A_1t$ ) inseriert am zweituntersten Viertel des Ligamentes und zwar derart, dass sie mit diesem in einen spitzen, aufwärts und vorwärts gerichteten Winkel zusammenläuft; ihre Fasern treten in das Ligament hinein und laufen neben den Fasern desselben nach oben, grösstenteils bis an den Oberkiefer, hinauf. Nur sehr wenige der untersten Sehnenfasern gehen bisweilen in die entgegengesetzte Richtung, verlieren sich aber recht bald im Ligamente.

Das *ligamentum maxillo-mandibulare posterius* (*lmm*, Fig. 1) hat einen ziemlich breiten Ursprung nahe der Gelenkgrube des Unterkiefers und zwar an der oberen Fläche des langen niedrigen Kammes an der Aussenseite des *Articulare*. In der dünnen Hautverbindung zwischen Ober- und Unterkiefer eingebettet, nimmt das Ligament nach innen vom Oberkiefer einen aufwärts gerichteten Verlauf und befestigt sich fast knorpelig dem Kamme entlang, der sich von der Gelenkfläche des Oberkiefers für das *Palatinum* fast bis an die Mitte des Knochens nach unten erstreckt.

Wird das Ligament in die Breite gezogen, ersieht man deutlich, dass jenes aus einer Menge getrennter, gröberer und feinerer Faserbündel zusammengesetzt worden ist. Am Vorder- und Hinterrande des Ligamentes verdichten sich diese Bündel zur Bildung zweier gröberer Stränge, von denen jener, der den Hinterrand markiert, meistens etwas stärker als der vordere Strang erscheint. Er nimmt von unten nach oben an Mächtigkeit zu und giebt scheinbar allein die Maxillarinserion des Ligamentes ab, während der vordere Strang sich gewöhnlich nach oben allmählich verliert. Das ganze Ligament ist nicht allzu scharf von der Umgebung abgesetzt worden, erscheint vielmehr wie eine Verdichtung der in der zwischen den Kiefern ausgespannten Bindehaut laufenden Faserstriche.

Die erste Portion des Adductors bei *Gadus* ist von JOURDAIN (N:o 17, S. 38) und von BROOKS (N:o 6, S. 179) in Kürze erwähnt worden; ersterer führt sie unter dem Namen *rétracteur commun de l'arc maxillo-mandibulaire* als einen selbständigen Muskel auf.

Die zweite Portion ( $A_2$ ; Figg. A—D und 1—4) ist eine etwas längliche und abgeflachte, bedeutende Muskelmasse. Auf deren Oberfläche zieht sich vom Vorderende mehr oder weniger weit nach hinten eine Linie (*s*, Fig. 1), längs der der Muskel sich mehr oder weniger weit und tief in zwei Hauptteile, einen grösseren



oberen und einen kleineren unteren, spalten lässt. Die Bündel des oberen Teiles konvergieren vorn gegen diese Linie zu; im unteren Teile ziehen fast alle Bündel unter spitzem Winkel dahin. Von den Fascien, die die gegen einander laufenden Wände der Spalte auskleiden, ist jene, die der unteren Abteilung angehört, am stärksten; beide Fascien aber verlieren sich allmählich nach hinten in dem Masse

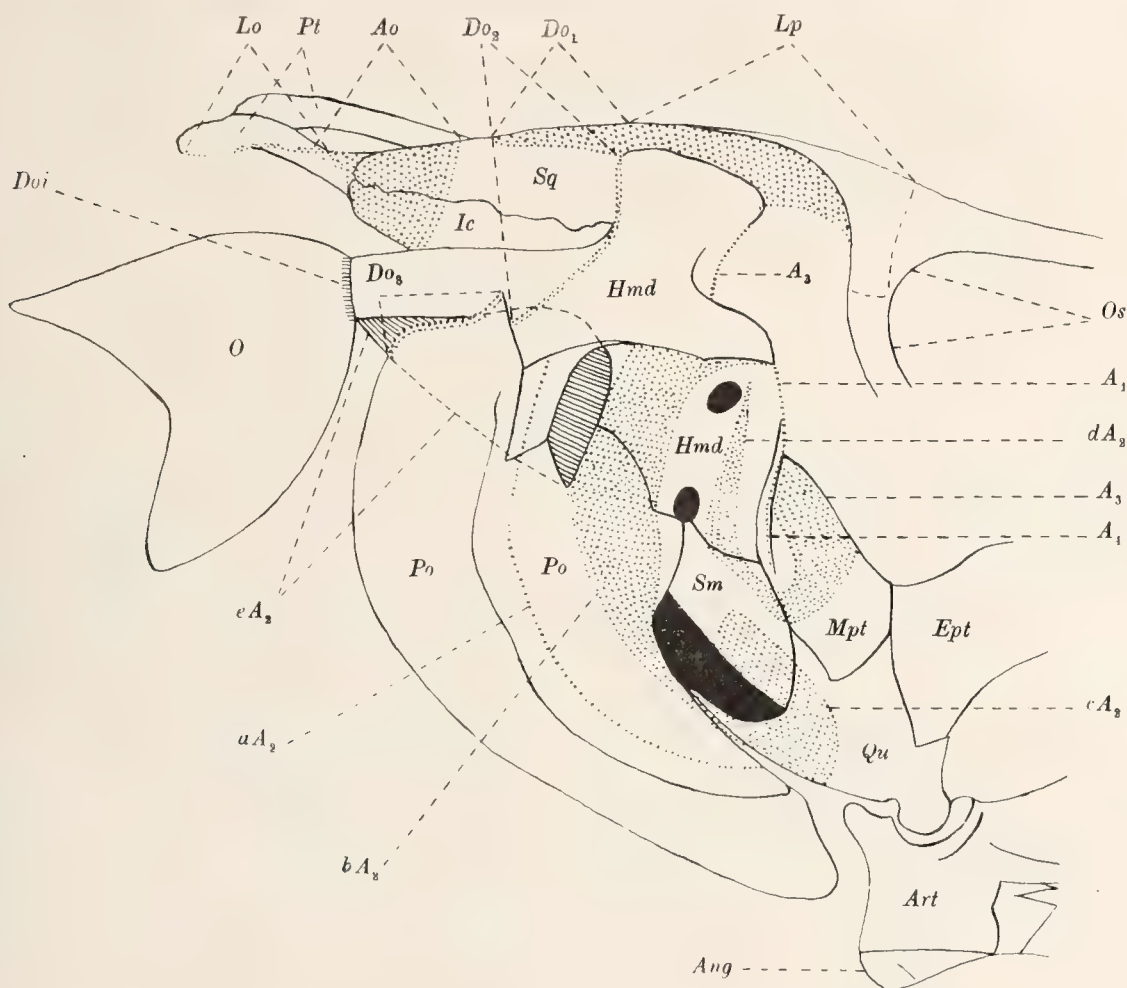


Fig. A.

Ursprünge der zweiten — vierten Portionen des *M. adductor mandibulae* sowie der *Mm. Levator arcus palatini*, *Dilatator*, *Adductor* und *Levator operculi*.

$aA_2$ — $eA_2$  zweite,  $A_3$  dritte,  $A_4$  vierte Portion des Adduct. mand.; *Lp* — Levat. arc. pal.;  $Do_1$ — $Do_8$  — Dilator, *Ao* — Adductor, *Lo* — Levator op.; *Doi* — Insertion des Dilat. op.; alle Ursprünge mit Ausnahme des Feldes  $eA_2$  sind punktiert, das letztere sowie die Insertion *Doi* sind schraffiert. *Sq* — Squamosum, *Ic* — Intercalare, *Pt* — Posttemporale, *Os* — Suborbitalknochen, *Hmd* — Hyomandibulare, *Sm* — Symplecticum, *Qu* — Quadratum, *Mpt* — Metapterygoid, *Ept* — Ektopterygoid, *O* — Operculum, *Po* — Präoperculum, *Art* — Articulare, *Ang* — Angulare.

wie sich die beiden Muskelpartien dem Punkte, wo die Spalte aufhört, nahen. Die obere Abteilung hängt in ihrem Vorderende mit der Mandibularportion des Adductors,  $A\omega$ , zusammen. Diese oberflächliche Spaltung des Muskels hat mit seiner Teilung in die unten zu beschreibenden Bäuche nichts zu thun.

Die Portion nimmt an sämtlichen Knochen des Suspensorium sowie am Präoperculum ihren Ursprung, dieser aber stellt sich nicht wie eine ununterbrochene

Fläche heraus sondern erscheint in vier oder fünf getrennte Felder, zwischen denen die Knochen völlig frei von anhaftender Muskelsubstanz daliegen, aufgeteilt. Diese Ursprungsfelder, die auch entsprechende wenigstens anfangs getrennte Muskelbäuche bezeichnen, werden in den Figuren A—D veranschaulicht.

Der oberflächlichste und zugleich hinterste Ursprung ( $aA_2$ ; Figg. A—C) bildet eine mit dem Hinterrande des äusseren Blattes des *Præoperculum* parallele Linie, die sich von da an auf den nach unten gerichteten Prozess des *Hyomandibulare*, der die Lücke zwischen diesem Knochen und dem *Præoperculum* nach hinten abgrenzt, bis an den horizontalen Muskelkamm des *Hyomandibulare* fortsetzt. Längs dieser Linie befestigt sich jedoch der Muskel nicht überall an Knochen; seine untere Ecke, oft seine ganze untere Hälfte, nimmt ihren Ursprung an der *Ausgangsfascie* des  $A_1$ . Wenn man diese Fascie vom  $A_2$  hinweg und von da an bis über den Hinterrand des äusseren Blattes des *Præoperculum* vorsichtig abzieht, wird das fragliche Verhältnis recht augenfällig: an der betreffenden Stelle liegt der Muskel dem Knochen ohne jegliche Verbindung ganz los an, und der Knochen selbst zeigt bis zum nächsten Ausgangsfeld eine völlig glatte Oberfläche, während abgerissene Muskelfasern auf der Unterseite der Fascie  $A_1$  den wahren Ursprung des hergehörigen  $A_2$ -teiles bekundigen. Nächstes Ursprungsfeld ( $bA_2$ , Figg. A—C) giebt die Hauptmasse des  $A_2$  ab. Es dehnt sich über die Aussenseite des *Hyomandibulare* nach unten vom quergestellten Muskelkamme sowie zwischen den beiden kleinen Löchern und der grossen Lücke zwischen dem *Hyomandibulare* und dem *Præoperculum* aus, setzt von da an nach unten über das letztere fort, dessen Oberfläche zwischen der eben erwähnten Lücke und der Lücke zwischen *Præoperculum*, *Symplecticum* und *Quadratum* beinahe völlig einnehmend, und endet schmal spitzig unmittelbar nach unten von dieser Lücke. Das Feld hängt hier sehr oft mit dem Felde  $cA_2$  (Fig. A) zusammen. Dieses ist oft recht ansehnlich und erstreckt sich über das *Quadratum* und das *Symplecticum* rings um die vordere Hälfte der Lücke zwischen diesen Knochen und dem *Præoperculum*.

Die hintere Grenze dieser beiden Felder ( $b$  und  $c$ ) wird in der Regel durch die niedrige, abgerundete Erhebung des *Præoperculum*, die sich zwischen den beiden grossen Lücken hinziehend, am Unterrande der unteren Lücke auf den Hinterrand des *Quadratum* hinüber fortsetzt, gebildet.

Das vierte Ursprungsfeld ( $dA_2$ , Figg. A—C) ist meist wenig ansehnlich. Es ist lang und schmal und befindet sich auf dem Gebiete, das oben durch den queren Muskelkamm des *Hyomandibulare*, hinten durch die beiden kleinen Löcher und vorn durch die vordere Grenzlinie des *Hyomandibulare* eingeschlossen wird, erreicht jedoch nach oben nicht immer jenen Muskelkamm; unten streckt sich das Feld auf die vordere obere Ecke des *Symplecticum* hinüber und endet, mit dem Ursprungsfelde des  $A_3$  gewöhnlich zusammenhängend, etwa an der mittleren oberen Ecke des *Quadratum*. Der dünne, platte Bauch, der vom Felde  $d$  ausgeht, zeichnet sich durch dunklere Farbe als die übrige Adductormuskulatur (mit Ausnahme der unteren Abteilung des  $A_3$ ) aus.



Ein kurzer, kräftiger Muskelbauch kommt aus der Lücke zwischen *Hyomandibulare* und *Præoperculum* hervor. Er hat an der Innenseite dieser Knochen hinter der Lücke einen dreieckigen Ursprung, und dieser, der *fünfte* des  $A_2$ , wird oben durch den Opercularprozess des *Hyomandibulare*, unten durch einen quergestellten Grat am *Præoperculum* und vorn durch jene Lücke eingeschlossen ( $eA_2$ , Figg. 5, A und D). Der Muskel fließt fast gleich nach seinem Hervortreten auf die Aussen-seite mit den Muskelpartien der voraus und hinten an liegenden Felder zusammen.

Die jetzt geschilderten Verhältnisse finden sich im wesentlichen bei allen von mir untersuchten Individuen vor; bezüglich der Gestaltung der *vorderen* Felder jedoch waltet eine gewisse, nicht allzu unbedeutende Veränderlichkeit, die so weit geht, dass man kaum zwei Individuen, wo die fraglichen Felder in jeder Hinsicht

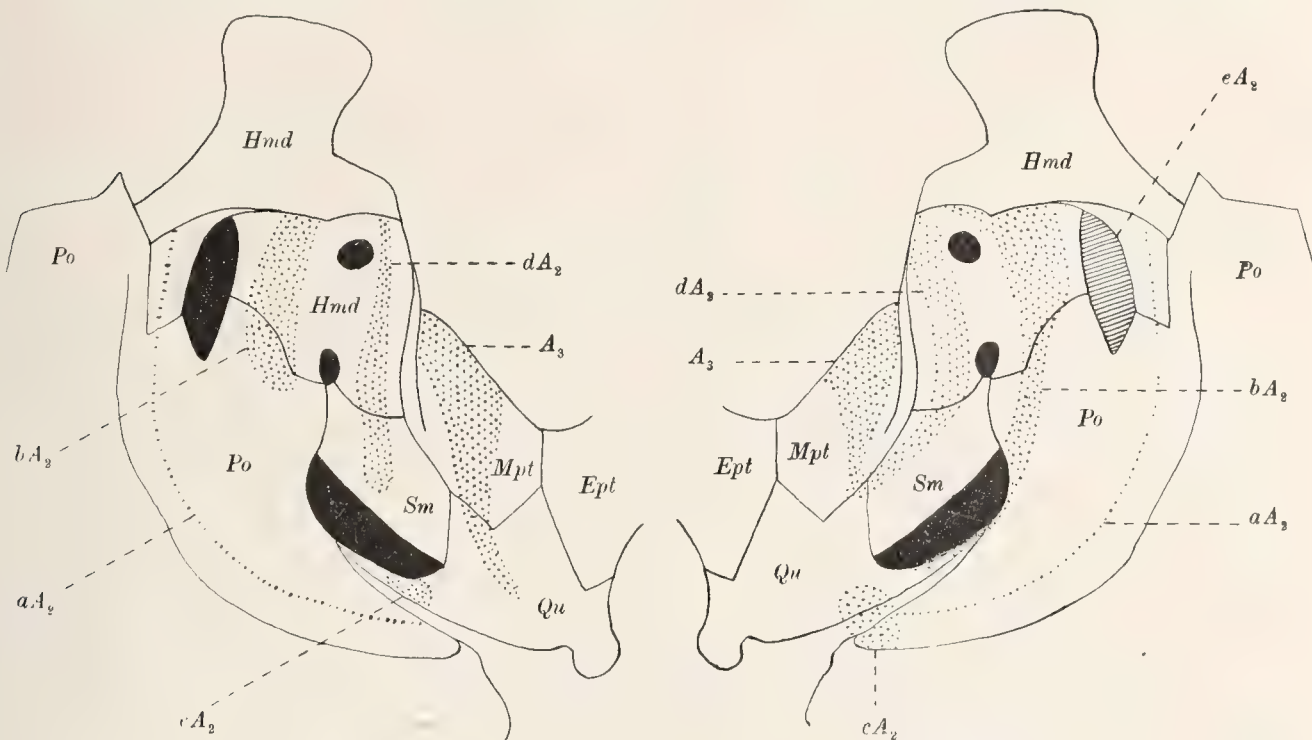


Fig. B.

Fig. C.

B rechte, C linke Seite eines und desselben Individuums. Bezeichnung wie in der Fig. A.

übereinstimmen, herausfinden kann. Man vergleiche die Fig. A mit den Figuren B und C, oder noch besser die beiden letzteren, welche die rechte und die linke Seite eines und desselben Individuums darstellen, untereinander. Die Felder  $aA_2$  und  $eA_2$  sind keiner Variation unterworfen, und jenes Gebiet des *Hyomandibulare* und des *Symplecticum*, wo der *Nervus mandibularis externus facialis* vom Loche im *Hyomandibulare* nach der Lücke zwischen *Præoperculum*, *Symplecticum* und *Quadratum* hervorzieht, ist immer völlig muskelfrei.

Die dritte Portion ( $A_3$ , Figg. 1—4) ist die tiefste Abteilung des Adductors. Sie liegt nach innen vom  $A_2$  und wird oben durch die eingeschobene vierte Portion von ihm getrennt. Ihre Form ist unregelmässig dreieckig; die dorsale Hälfte ist kräftig angeschwollen, der untere Teil dünn und flach. Vielleicht hängt in der Regel



diese Ventralpartie mit dem oberen vorderen Bauche des  $A_2$ , genau wie die resp. Ursprungsfelder, unten zusammen und zeigt dieselbe dunkle Farbe wie dieser Bauch (s. oben). Die hintere Begrenzung der Orbita wird hauptsächlich durch den oberen, voluminösen Teil des  $A_3$  gebildet.

Der Ursprung der Portion nimmt oben die Innenseite der vorderen Hälfte des Gelenkkopfes am *Hyomandibulare* (Fig. D), sowie ein dem entsprechendes Gebiet am *Prooticum* ein; dehnt sich von da an nach unten über den Vorderrand des Hyomandibularhalses (Fig. A) und über die lateralwärts von den beiden Löchern für die Facialisstämme sowie zwischen diesen Löchern (Fig. D) befindliche Partie jenes Knochens aus; breitet sich ferner unterhalb des unteren Loches in der Grube zwischen dem oberen lateralen und dem unteren medianen Flügel des *Metapterygoids* (Fig. D) aus und setzt, sich mehr oder weniger schmalernd, über den grössten Teil

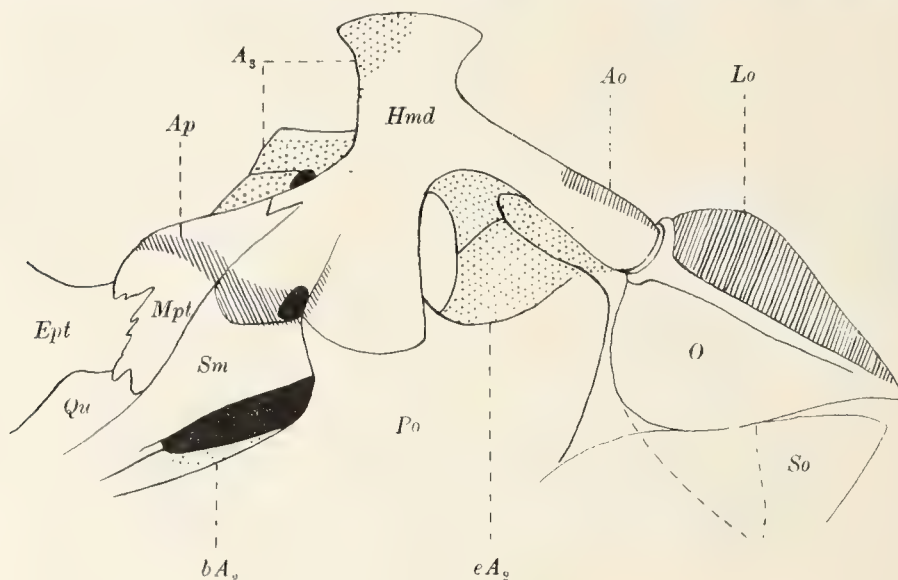


Fig. D.

Innenseite, rechts. *Schraffiert*: Die Insertionen der Mm. Adductor arcus palatini ( $Ap$ ), Adductor ( $Ao$ ) und Levator operculi ( $Lo$ ); *punktiert*: die Ursprünge  $bA_2$ ,  $cA_2$  und  $A_3$ .  $So$  — Suboperculum; sonst wie in den vorigen Figuren.

der Aussenseite dieses Knochens herunter fort (Figg. A, B, C), um bisweilen auf der mittleren oberen Ecke des *Quadratum* zu enden (Figg. C und D). Hier fließt der Ursprung, wie oben nachgewiesen, mit dem Ursprungsfeld  $dA_2$  häufig zusammen (Figg. A u. C).

Die Sehne des  $A_3$  ( $tA_3$ , Fig. 3) ist kurz und breit; sie läuft an der Aussenseite und dem Vorderrande des Muskels, besonders dick am Vorderrande, recht weit nach oben hinauf. Die Sehne *inseriert* an der Sehne des  $A_2$ ; ihr Vorderrand hängt unten mit der Mandibularportion des Adductors,  $A\omega$ , zusammen.

Die Sehnenbildung des  $A_2$  wird übersichtlich, wenn man den Muskel vom Suspensorium ablöst, den  $A_3$  überschneidet und die gegen einander laufenden Flächen der beiden (durch die Sehnen verbundenen) Portionen, nachdem der Bauch  $dA_2$  und der überschchnittene  $A_3$  nach unten hinüber gelegt worden sind, betrachtet (Fig. 2). Man findet dann, dass sich sämtliche Bündel des  $A_2$  auf einer längs der

horizontalen Mittellinie des Muskels liegenden Sehnenausbreitung befestigen. Diese bezeichnet die ungefähre Lage der obengenannten Spalte auf der Aussenseite und empfängt sehnartige Faserstriche sowohl von der Innenseite der oberen Hälfte des  $A_2$  als von der entsprechenden Aussenseite des Bauches  $dA_2$ . Wenn man den letzteren wieder in seine natürliche Lage bringt (Fig. 3), liegt folglich die fragliche Sehnenausbreitung sowie die von derselben ausgehende, kurze Sehne *der Länge nach zusammengefaltet*. Der innere Sehnenteil, die dem  $dA_2$  hauptsächlich zugehört, ist dick und rundlich; das äussere Sehnenblatt, an dem die übrige Masse des  $A_2$  inseriert, ist dünn und breit. Die Sehne  $tA_3$  fliesst eben mit dem inneren, angeschwollenen Teil der Sehne des  $A_2$  zusammen (Fig. 3).

Nach unten vom  $dA_2$  kommt ebenfalls an der Innenseite des  $A_2$  eine Sehnenausbreitung (Fig. 3), die mit den oben besprochenen zusammenhängt, zum Vorschein. Wenn man auf der Aussenseite des  $A_3$  die obere und die untere Partie auseinander bringt, ersieht man, dass die Sehnenausbreitung der Innenseite eine horizontale Schicht durch den Muskel nach aussen hin sendet, und diese Schicht kleidet wie eine Fascie die untere Wand der Spalte aus (vergl. oben).

Die gemeinsame Insertionssehne der *Mm.*  $A_2$  und  $A_3$  ( $tA_2 + A_3$ , Fig. 4) wird also unmittelbar nach aussen vom Suspensorium bez. vom *Quadratum* abgegeben. Sie ist kurz, kräftig und lateralwärts etwas abgeplattet; ihre Aussenseite heftet dem  $A\omega$  an. Bisweilen bleibt die Sehne bis an den Insertionspunkt ungeteilt, gewöhnlich aber teilt sie sich sofort in einen vorderen schwachen und einen hinteren gröberen Ast. Dieser befestigt sich an der Innenseite des *Articulare* und zwar am Grate, der die Forsetzung des *Meckelschen* Knorpels nach hinten ausmacht; die vordere Sehne spaltet sich wieder in eine vordere breite, die mit der starken Fascie an der medianen Seite des  $A\omega$  zusammenfliesst, und eine hintere schmale, die schief nach unten und hinten unmittelbar nach aussen von der eben erwähnten Insertionssehne  $tA_2 + A_3$  geht, um an dem Befestigungspunkte derselben zu inserieren.

Die Beziehungen zwischen Muskelbäuche und Sehnenbildungen sowie zwischen den letzteren unter einander sind indessen derart verwickelt und unbestimmt, dass sie wörtlich wie bildlich kaum völlig klar zu veranschaulichen sind.

$A_4$  ist eine ganz selbständige Portion des *Adductor mandibulae*; er steht mit den übrigen Abteilungen des letzteren in keinerlei Verbindung. Der lange, spulförmige Muskel (Figg. 1 u. 3) hat einen linienschmalen, senkrechten Ursprung längs dem Rande derjenigen Crista, die den Vorderrand des *Hyomandibulare* bildet. Diese Crista, welche die resp. Ursprünge des  $dA_2$  und des  $A_3$  trennt, stösst oben mit dem queren Muskelkammer des *Hyomandibulare* zusammen und dehnt sich nach unten über das Metapterygoid und zwar längs dessen Mittellinie aus, um etwa an der halben Höhe dieses Knochens aufzuhören (Fig. A). Dem Ursprung entsprechend ist der hintere, zwischen  $A_2$  und  $A_3$  eingeklemmte Teil des Muskels sehr dünn und senkrecht gestellt worden. Darauf schwillt der Muskel an, wird rundlich und recht voluminös, dem Gaumenbogen unmittelbar anliegend, verjüngt sich in der Nähe des Oberkiefers ziemlich schnell und geht endlich am Gelenkteil desselben in eine kurze,



runde Sehne über. Diese läuft *unter* dem Oberkiefer, um sich an dessen oberen Ende und zwar am Vorderrande seines vorwärts gerichteten Prozesses zu befestigen.

Die Aussenseite des dem Ursprunge nächstliegenden, dünnen Teiles der Portion ist sehnenartig (Fig. 3), und das Sehnengewebe reicht vom unteren Rande ein wenig auf die Innenseite hinüber. Etwas weiter nach vorn, jedoch durch eine sehnensfreie Muskelpartie vom Ursprungssteile getrennt, fängt am Dorsalrande des Muskels eine Sehnenausbreitung an, die sich allmählich vorwärts ausbreitet, um an der Grenze zwischen dem mittleren und dem vorderen Drittel des Muskels fächerförmig zu enden. Eine ganz ähnliche Sehnenausbreitung befindet sich auf der Unterseite; sie streckt sich von der Insertionssehne nach hinten und endet an der Grenze zwischen dem *hinteren* und dem mittleren Drittel des Muskels.

Die IV:te Portion des Adductors bei *Gadus* ist früher von JOURDAIN (N:o 17) unter dem Namen *M. pterygo-maxillaris* flüchtig erwähnt worden. Ihr Ursprung wird

von diesem Verfasser recht unbestimmt nach dem Hinterteil des »arcade ptérygo-palatine» und dem Suspensorium verlegt (S. 37).

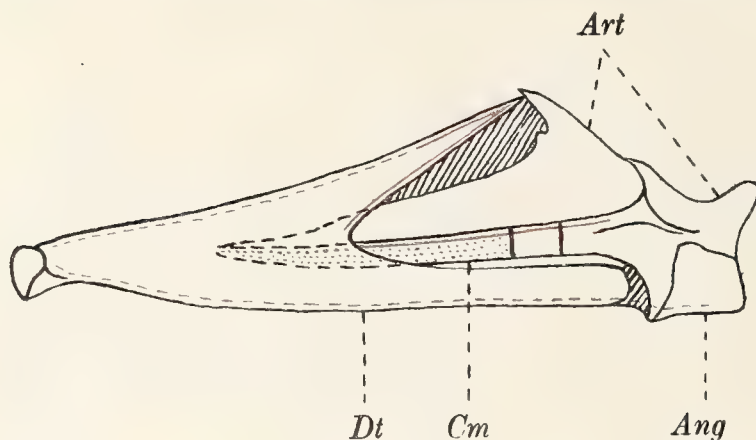


Fig. E.

Insertion (mit Rot bezeichnet) des *M. Aω* am Unterkiefer. *Art* — Articulare, *Ang* — Angulare, *Dt* — Dentale, *Cm* — Meckelscher Knorpel; die ununterbrochene rote Linie giebt die Stellen an, wo der Muskel sich unmittelbar am Knochen oder Knorpel befestigt.

Die *Mandibularportion* des Adductors ist bei *Gadus* kräftig entwickelt worden und nimmt die ganze Innenseite des Unterkiefers in Anspruch (*Aω*, Figg. 4 u. E). Die mediane Fläche des Muskels wird von einer starken Fascie ausgekleidet; gegen die Kiefernänder zu jedoch verdünnt sich diese allmählich und geht in eine gewöhnliche, durchsichtige Mu-

skelfascie über, die an den Kiefernändern mit Schleimhaut und Haut zusammenhängt. Am stärksten erscheint die Fascie in der Nähe des Kiefergelenkes; sie hebt sich hier vom Muskel ab und befestigt sich wie eine breite, dünne aber feste Sehne am freien Vorderrande des *Quadratum* oberhalb des Gelenkkopfes sowie am angrenzenden Teil des *Ektopterygoids*, nachdem sie einen schmalen, kurzen Ast nach oben zum vordersten Ast der Sehne  $tA_2 + A_3$  abgegeben hat. Der hintere Teil der Fascie lässt sich nämlich mehr oder weniger leicht in zwei Schichten zerspalten; die oberflächliche Schicht liefert die Insertion am *Quadratum* und *Ektopterygoid*, die tiefe dagegen schiesst sehnenförmig nach oben und hinten hervor, um die erwähnte Verbindung mit der Sehne  $tA_2 + A_3$  zu bilden. Die Sehne für das *Quadratum* et cet. geht in die Gelenkkapsel über.



Ein grosser Teil der Muskelbündel heftet der Fascie sehr fest an. Übrigens befestigt sich der *A<sub>0</sub>* längs dem oberen und unteren Rande des *Dentale*, am unteren Rande der oberen Ecke dieses Knochens sowie an der Oberseite des *Meckelschen* Knorpels (Fig. E). Zwischen diesen Linien liegt die Oberfläche des Kiefers völlig glatt und muskelfrei da. Das allerhinterste Stück der oberen Ecke des *Dentale* ausgenommen, heftet der Muskel längs den mit den *Kiefferrändern* zusammenfallenden Befestigungslinien jedoch nicht dem *Knochen* sondern der Fascie oder der Schleimhaut resp. Haut an. Die Insertionen am *Meckelschen* Knorpel und am Unterrande der oberen Ecke des *Dentale* sind besonders kräftig, sogar sehnenartig. Die Insertionslinie längs dem unteren Kiefferrande dehnt sich vom *Dentale* auf das *Articulare* und das *Angulare* hinüber, und die Insertion am *Meckelschen* Knorpel breitet sich nach hinten über dessen knöchernen Verlängerung am *Articulare* aus.

Die Bündel des Muskels konvergieren gegen das Kiefergelenk zu. Seine Beziehungen zur übrigen Kiefermuskulatur sind oben auseinandergesetzt worden.

### Wirkung der Kiefermuskulatur.

Die kombinierte Wirkung der verschiedenen Portionen ist das Zuschliessen des Mundes.

Die Portion *A<sub>1</sub>* wurde von JOURDAIN (l. c.) »le rétracteur commun de l'arc maxillo-mandibulaire« genannt; die Insertion am *lig. max.-mand. post.*, das ja Unter- und Oberkiefer mit einander verbindet, lag ohne Zweifel diesem in Bezug auf eine vermutete Funktion gegebenen Namen zu Grunde. Keine solche Aufgabe kommt indes dem Muskel zu; er ist, praktisch genommen, ein Einzieher des Oberkiefers allein. Bei der Adduction des Unterkiefers beteiligt sich der Muskel nur da, wenn das hintere Maxillo-mandibularligament völlig gestrammt worden ist, also nur im Momente, wo der Unterkiefer, nachdem er seine äusserste Retraktionslage erreicht hat, sich zu heben *anfängt*. Unmittelbar danach erschlafft der unterhalb der Insertion des *A<sub>1</sub>* befindliche Teil des Ligamentes, und die Wirkung des Muskels auf den Unterkiefer, auch bei voller Kontraktion, ist damit aufgehoben worden. Gehen ja die Fasern der *A<sub>1</sub>*-sehne grösstenteils bis an den Oberkiefer hinauf; die Zugrichtung des Muskels bildet übrigens mit dem Ligamente einen je nach dem Kontraktionsgrade des Muskels mehr oder weniger spitzen, gegen den Oberkiefer zu gerichteten Winkel.

Das Ligament an und für sich hat eine doppelte Aufgabe: beim Aufsperrn des Mundes setzt es der Unterkiefersenkung eine gehörige Grenze und trägt zugleich sehr viel dazu bei, die Ober- und damit die Zwischenkiefer bei Retraktion des Unterkiefers hervorzuschieben. Dieses letztere Resultat wird schon dadurch teilweise erreicht, dass die elastische Haut zwischen Ober- und Unterkiefer bei Senkung des letzteren gestrammt wird und die Ober- und Zwischenkiefer in gleicher Weise, wie das Ligament es tut, beeinflusst.

Die eigentliche Bedeutung des Muskelbauches *A<sub>1</sub>* liegt vielleicht eben darin, bei einer Unterkiefersenkung die auf den Oberkiefer gerichtete Wirkung des sich stram-

menden Ligamentes zu regeln. Solches aber setzt *gleichzeitige* Funktion des  $A_1$  und der Retraktoren des Unterkiefers voraus. Ob  $A_1$  unabhängig von den übrigen Adductorportionen zu wirken vermag, ist jedoch unsicher. Dass übrigens die Lage und somit auch die Wirkung des Muskels durch den Kontraktionsgrad des  $A_2$  beeinflusst werden müssen, leuchtet ohne weiteres ein.

$A_2$  und  $A_3$  adducieren den Unterkiefer kräftig, und diese Wirkung wird durch den Muskel  $A_4$  verstärkt.

$A_4$  ist ausschliesslich ein Einzieher des Ober- und folglich auch des Zwischenkiefers. Inwiefern dieser Bauch gelegentlich von den übrigen Teilen des Adductors unabhängig fungiert, darüber lassen meine Beobachtungen nicht entscheiden.

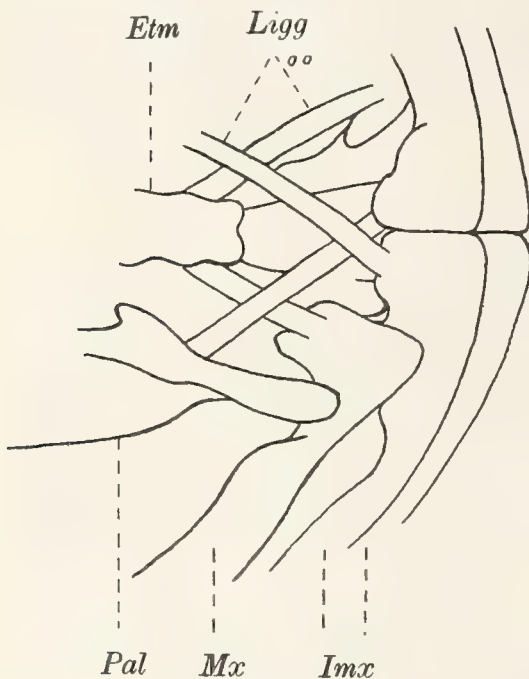


Fig. F.

Ligamente der Ober- und Zwischenkiefer, von oben.  $Mx$  — Ober-,  $Imx$  — Zwischenkiefer,  $Pal$  — Palatinum,  $Etm$  — Ethmoidale med.

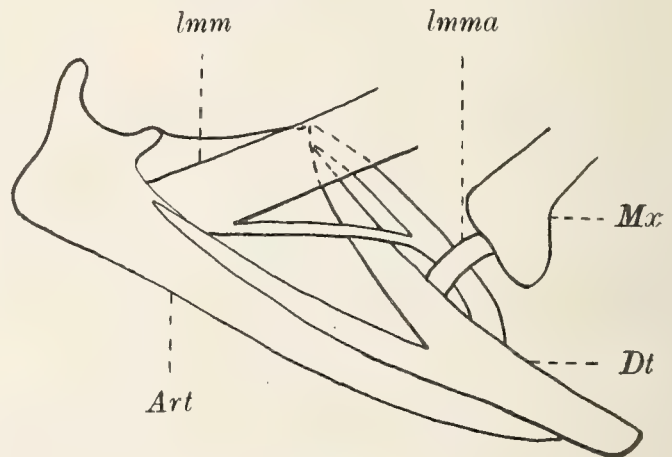


Fig. G.

Ligamentgebilde am Unterkiefer, aussen.  $lmm$  — Ligamentum mandibulo-maxillare posterius,  $lmma$  — Ligam. mand.-maxill. anterius;  $Mx$  — Oberkiefer;  $Art$  — Articulare,  $Dt$  — Dentale des Unterkiefers.

### Die Ligamentgebilde der Kiefer

sind von BROOKS (N:o 6, l. c.) in Bezug auf *G. æglefinus* genau beschrieben worden. Unter diesen Ligamenten weise ich auf jene hin, die sich oben an der Schnauze vom medianen Endprozesse des Oberkiefers nach dem *Ethmoid. med.* hinziehen, sowie auf diejenige, welche die Innenseite des Gaumenbeinprozesses mit dem Zwischenkiefer der entgegengesetzten Seite verbinden. Diese letztere Ligamente überqueren die erstgenannten, kreuzen sich vorn und befestigen sich am aufwärts gerichteten Prozesse des Zwischenkiefers nahe der Symfyse (Fig. F). Sämtliche Bänder dienen zur Stütze der betreffenden Gelenke und begrenzen die durch  $A_1$  und  $A_4$  bewirkten Retraktionen der Ober- und Zwischenkiefer. ALLIS hat in



seiner Abhandlung über SCOMBER (N:o 2, S. 195—96) diese Ligamente als Homologa gewisser Teile der Selachiermuskulatur (»*Levator maxillæ superioris*») angegeben; die nähere Erörterung dieser Frage hebe ich vorläufig auf.

Noch ein Ligament soll hier erwähnt werden. Es verbindet das untere Ende des Oberkiefers mit dem oberen Rande des *Dentale* (Fig. G). Bei aufgesperrtem Maule bleibt das Ligament schlaff; ist der Mund geschlossen, befindet es sich in Spannung. Die Aufgabe des Ligamentes ist also, den Oberkiefer unten dicht am Kopfe zu halten, wenn der Kieferapparat sich im Ruhezustand befindet. BROOKS (l. c) nennt die fragliche Bildung, die ganz anderer Natur ist als die früher besprochenen, das *Ligamentum maxillo-mandibulare anterius*.

### M. levator arcus palatini.

(VETTER 1878).

Dieser Muskel (Fig. 1) erscheint bei *Gadus* kräftig entwickelt; er ist viereckig, kurz und breit. Sein Ursprung befindet sich am Rande des *Squamosum* und des *Sphenoticum* (*Postfrontale*) sowie an der Unterseite des letztgenannten Knochens und des hintersten Suborbitalknochens (Fig. A). Am weitesten nach hinten geht der Ursprung ohne Grenze in den Ursprung des *M. dilatator operculi* und zwar in dessen oberste Partie über; die Bündel der beiden Muskeln mischen sich hier. Nach unten von diesem Punkte deckt der Hinterrand des Muskels den Ursprung der zweiten Portion des *Dilatator operculi*. Mit seiner vorderen Fläche bildet der Muskel den äusseren Teil des hinteren Orbitalrandes. Sein vorderer, nach vorn vom *Hyomandibulare* befindlicher Teil liegt unmittelbar nach aussen von der obersten Partie des  $A_3$ , jedoch von ihm wohl getrennt, und ist an der Innenseite mit einer starken Fascie ausgekleidet; die vordere untere Ecke des Muskels geht mit dem  $A_2$  zusammen, lässt sich aber von diesem ohne Läsionen trennen; eine dünne Schicht am weitesten nach innen geht häufig bis an den  $A_4$  herunter und hängt mit dessen oberem Rande am Ursprunge zusammen. Die Grenze zwischen dem *Levator arcus palatini* und dem  $A_2$  wird an der Wange wie eine quere Vertiefung (Fig. 1) markiert. Diese befindet sich ein wenig *unterhalb* des grossen Muskelkammes des *Hyomandibulare*, weil die oberflächlichsten Bündel des Muskels auf die Ursprungsfascie des  $A_1$  hinüberspringen (siehe oben). An der hinteren unteren Ecke gehen ausserdem in der Regel einige wenige, tiefer liegende Bündel auf den  $A_2$  über.

Die Bündel des Muskels richten sich im vordersten Teil gerade nach unten, übrigens etwas nach hinten. Die untere hintere Ecke inseriert am Vorderrande der obersten Ecke des *Præoperculum* zwischen dem oberflächlichen Ursprunge des  $A_2$  und dem untersten Ursprunge des *Dilatator operculi*. Sonst befestigt sich der Muskel an der ganzen lateralen Oberfläche des *Hyomandibulare* bis an den Rand des queren Muskelkammes herab.



**M. dilatator operculi.**

(VETTER 1878).

Der Aufsperrer des Kiemendeckels (Figg. 1 und A) erscheint beim Dorsche in drei, jedoch nicht völlig getrennte Portionen zerlegt.

Die *erste* und zugleich oberste Portion ( $Do_1$ ) geht vom *Squamosum* unmittelbar nach hinten vom Ursprung des *M. levator arc. palat.* (s. oben) aus. Die Portion ist ziemlich schmal, in ihrer oberen Hälfte etwas dicker, in der unteren Hälfte sehnig. Der Ursprung der *zweiten* und mittleren Portion ( $Do_2$ ) befindet sich am Hinterrande des Gelenkkopfes am *Hyomandibulare* und setzt, durch einen rauen Absatz markiert, schräg nach unten und hinten über den Basalteil des Opercularprozesses dieses Knochens bis an die oberste Ecke des *Præoperculum* fort. Diese Ecke bedeckt den Unterrand des Muskelbauches. Die Portion bildet die Hauptmasse des Dilatators und ist wie die Portion 1 in der distalen Hälfte sehnig; ihr Hinterrand liegt nach innen vom Vorderrande der ersten Portion, und die Sehnenbildungen beider Portionen fließen unten zusammen. *Insertion* am Aussenrande des Gelenkteiles des Kiemendeckels. (Fig. A).

Die *dritte* Portion ( $Do_3$ ) nimmt am Hinterrande der obersten Ecke des *Præoperculum* ihren Ursprung. Sie ist durchweg muskulös; ihre Bündel sind mit einander gleichlaufend und treffen in recht grossem Winkel mit der Sehne der zweiten Portion, wo sie sich auch befestigen, zusammen. Oben geht die dritte Portion ohne Grenze in den muskulösen Teil der zweiten Portion über.

**M. adductor operculi.**

(VETTER 1878).

Kurzer und dicker, gleich breiter, kräftiger Muskel ( $Ao$ , Figg. 1, A und D), dessen dreieckiger Ursprung (Fig. A) die hintersten Spitzen des *Squamosum* und des *Intercalare* sowie den angrenzenden Teil des unteren Astes des *Posttemporale* einnimmt. Dieses letztere Ursprungsgebiet grenzt unmittelbar an den Ursprung des *Levators*. Ein kleiner, dreieckiger Zwischenraum trennt den Muskel oben vom *Dilatator operculi* und diese Lücke wird durch eine nach innen vom *Dilatator* liegende, zwischen dem Rande des *Squamosum* und dem *Hyomandibulare* ausgespannte Fascie (Fig. 1) ausgefüllt. Am *Hyomandibulare* befestigt sich diese Fascie teils auf dem Hinterrand des Gelenkkopfes, teils auf dem ganzen oberen Rand des Opercularprozesses; ihre hintere untere Ecke liegt nach aussen vom *Adductor*, diesen vom *Dilatator* trennend. Der von aussen sichtbare Teil *f.* der Fascie ist dick und undurchsichtig; übrigens ist sie durchsichtig dünn und bekleidet die Aussenseiten der *Mm. levatores arcuum branchialium* I und II.

Der Muskel inseriert am Opercularprozeß des *Hyomandibulare* und zwar in der rinnenförmigen Vertiefung am oberen Rand der distalen Hälfte jenes Prozesses

(Fig. D). Sehr häufig aber befestigen sich die hintersten Bündel am Gelenkteil des Kiemendeckels bez. an dessen Innenseite. Nur diese Bündel fungieren als ein, allerdings sehr schwacher, *Adductor operculi*; der Muskel ist sonst ein Adductor und zugleich Levator des *Hyomandibulare*. *Lucius* bietet ähnliche Verhältnisse dar (VETTER N:o 31. S. 504).

### M. levator operculi.

(VETTER 1878).

Dünn ausgeflachter, schwacher Muskel (*Lo*, Figg. 1 und 5, A und D), dessen Ursprung den unteren Ast des *Posttemporale* vom distalen Ende bis an das *Squamosum* einnimmt; von da an biegt sich der Ursprung nach oben um und geht an der Oberseite des Astes, nach oben vom Ursprung des *Adductor operculi*, noch ein wenig weiter vorwärts. Der Muskel nimmt unten an Breite zu und *inseriert* an der Innenseite des Kiemendeckels vom oberen Rande bis an den querlaufenden Muskelkamm in dessen ganzer Ausdehnung (Figg. 5 und D).

### M. Hyohyoideus.

(VETTER 1878).

#### 1) *Superior* (*Hyhs*, Fig. 5).

Vom unteren Rande der Hinterhälfte des Kiemendeckels und von da an in geradliniger Fortsetzung längs dem Grate an der Innenseite des *Suboperculum* springt eine nach unten gehende, dünne, breite, aus einer Menge getrennter, jedoch dicht an einander liegender Bündel zusammengesetzte Muskelmasse hervor. Der Ursprung am *Suboperculum* nimmt in der Tat die ganze Innenseite dieses Knochens nach unten und hinten vom Grat in Anspruch. Mit Ausnahme einiger tiefliegenden, vom *Kiemendeckel* ausgehenden Bündel, welche sich am *Suboperculum* ansetzen, inserieren sämtliche Bündel am oberen Rande des hintersten Kiemenhautstrahles.

Zwischen allen Strahlen laufen unregelmässig gestaltete, durch grössere oder kleinere Lücken von einander getrennte Muskelbündel. Die Bündel, welche den hintersten und zweithintersten Strahl vereinigen, gehen vom Hinterrande des ersteren aus, überqueren seine Innenseite und befestigen sich am Hinterrande des zweiten Strahles. Die zwischen den zweit- und dritt-hintersten Strahl ziehende Bündel verhalten sich auf genau dieselbe Weise. Sonst laufen die Bündel fast immer vom Vorderrand eines hinteren Strahles zum Hinterrand eines vorderen; einige wenige Bäuche jedoch gehen an der Innenseite ihres hinteren Strahles etwas hinauf. Andere Bündel verbinden sich nur mit einem einzigen Strahl; ihr entgegengesetztes Ende befestigt sich, in der Regel stumpf oder quer abgeschnitten, an der Haut.

Am zweiten bis sechsten Strahl gehen ein oder mehrere der proximalen Bündel nicht wie gewöhnlich von Strahl zu Strahl sondern befestigen ihr Vorderende am *Zungenbein* (»les muscles abducteurs proximaux«, BORCEA, N:o 5, S. 204); *abp*,



Fig. 5. Der Stamm des *N. hyoideus facialis* liegt zwischen diesen Bündeln und den Strahlen. Am abgebildeten Individuum gingen vom zweithintersten Strahl drei schwache Bündelchen, von den dritt- und viert-hintersten Strahlen je ein kräftiges Bündel, das sich über die Innenseite des zweitvordersten Strahles vorwärts erstreckte, und zwei kurze, die die Aussenseite des letzteren Strahles überquerten, aus; von diesem Strahl liefen ein gröberes längeres, und ein kurzes, schwaches Bündel über die Innenseite des vordersten Strahles nach vorn. Mit Ausnahme des langen Bündels des zweitvordersten Strahles, das am *Hypohyale inf.* inserierte, gingen alle diese Muskelchen nach dem *Ceratomyale*.

An den distalen Enden der Strahlen sammeln sich die Bündel meistens zu einer mehr einheitlichen Muskelschicht, die aber nach aussen von den Enden allmählich degeneriert. Die Muskelemente lassen sich jedoch bis in den Rand der Kiemenhautbräme spüren. Diese Bräme ist am breitesten an den drei hintersten Strahlen, schmälert sich allmählich nach vorn und hört zuweilen am dritt- oder zweithintersten Strahl völlig auf.

## 2) *Inferior* (*Hyhi*, Figg. 5 und 7).

Nach vorn und innen vom vordersten Kiemenhautstrahl streckt sich eine recht kräftige, in mehrere mehr oder weniger getrennte Bäuche aufgeteilte Muskelschicht. In der Medianlinie stösst sie mit dem entsprechenden Muskel der anderen Seite ohne deutliche, zwischenlagernde Sehnenbildung oder Fascie zusammen. Der Muskel steht mit dem Zungenbeinbogen in keiner unmittelbaren Verbindung.

*Wirkung.* Durch den *M. hyohyoideus* werden alle Bewegungen der Kiemenhaut vollführt. Wenn der Muskel sich von hinten nach vorn zusammenzieht, werden die Strahlen gehoben, und die Kiemenhaut faltet sich; geht die Kontraktion in die entgegengesetzte Richtung, senken sich die Strahlen und spannen so die Membran aus. Kontraktion des *Hyohyoid. inf.* sowie der *Mm. abduct. prox.* führt nur diese letztere Wirkung mit. Der *Hyohyoideus* erreicht grösstmögliche Wirkung nur bei fixiertem Kiemendeckel.

## **M. protractor hyoidei** HOLMQVIST 1910.

(*Geniohyoideus auctt.*).

Der Muskel (*Ph*, Fig. 6) erscheint bei den *Gadus*-arten als ein paariger, spulförmiger, fast gleich dick bleibender und im Querschnitt rundlicher Bauch. Sein Hinterende ist am unteren hinteren Rande des *Ceratomyale* und zwar hauptsächlich zwischen dem dritt- und dem viertvordersten Kiemenhautstrahl befestigt worden. Von da an streckt sich die Insertion vorwärts bis an den zweitvordersten Strahl; einige wenige Bündel setzen sich am Basalteil des dritt- und zweit-hintersten Strahles fest. Eine gewisse Veränderlichkeit giebt sich hier kund, insofern der eine oder



beide der letztgenannten Strahlen bisweilen keine muskulöse Verbindung mit dem Muskel aufweisen. Dieser nimmt an Mächtigkeit rasch zu und stösst an der Grenze zwischen seinem mittleren und distalen Drittel mit dem Protractor der entgegengesetzten Seite zusammen, wonach beide Muskeln für eine Weile erscheinen mit einander verwachsen zu sein. Bald trennen sie sich wieder, und in der Nähe der Unterkiefersymphyse gehen die Bäuche jeder nach seiner Kieferhälfte. Unmittelbar vor dem Trennungspunkte gewahrt man eine schwach markierte, querlaufende *linea alba*. Am Ende schmälert sich der Muskel etwas und löst sich an der Oberfläche in mehr oder weniger getrennte, sehnige Bündelchen auf. Die abgeflachte Insertion befindet sich an der Innenseite des Unterkiefers sehr nahe der Symphyse. An der dorsalen Seite der unpaarigen Muskelpartie setzt die Fascie in der Medianlinie als eine freie, fast sehnige Schicht die sich an der Symphyse befestigt, fort. Zwischen diesem Fortsatz und den beiden *Mm. protractores hyoidei* liegt eine quer gestellte, sehr schmale und degenerierte Muskelpartie, deren hinterste Bündel sich rechts und links nach hinten umbiegen und in den Protractor einsetzen: *M. intermandibularis*.

Die Fascie des Protractors ist stellenweise, besonders an der Ventralseite, fibrös und von weisslicher Farbe; so unter anderem nahe dem Ursprung des Muskels am *Ceratomyale*, wo sie sich ausserdem vom Muskel abhebt und in zwei schmale aber feste sehnienartige Fortsätze, die sich an der Aussenseite des zweit-, resp. drittvordersten Strahles befestigen, spaltet. Siehe übrigens HOLMQVIST, N:o 16, S. 8 und 16. Zwischen den beiden vorderen Schenkeln des Protractors ist die Hautverbindung recht fest und reich an fibrösem Bindegewebe.

Betreffs der von mir früher beschriebenen, in der Mundbodenhaut lagernden komplizierten Ligamentgebilde: das *Lig. hyoideum proprium*, welches den oberen Teil des *Ceratomyale* mit der Mittelpartie des Protractors verbindet, und das *Lig. hyoideomandibulare*, dem die Aufgabe zukommt, die Rückwärtsbewegung des Hyoidbogens auf den Unterkiefer zu übermitteln, verweise ich auf meine oben erwähnte Schrift.

*Wirkung.* Wie ich in der eben zitierten Abhandlung hervorgehoben habe, richtet sich die Funktion des Muskels ausschliesslich auf die expiratorische Zungenbewegung, nicht wie früher angenommen alternierend auf die Zungenprotraktion und die Unterkieferretraktion. Der Muskel ist ein Expirations- und Schluckmuskel; er wirkt niemals in derartigen Kombinationen mit, dass er eine Senkung des Unterkiefers herbeiführen könnte. Die Unterkiefersenkung wird durch ganz andere Einrichtungen zu stande gebracht (l. c. S. 15—21). Die Kontraktionen des Zungenprotractors wiederholen sich rhythmisch bei jeder Expiration, und da einerseits der Zungenbeinbogen eine Kurve bildet, andererseits die Protractorinsertion am unteren Rande des Zungenbeinbogens und ziemlich weit nach hinten gelegen ist, wird die in eine kreisförmige Bewegung des Hyoidbogens um seinen Drehpunkt (das Gelenk zwischen *Stylo-* und *Epihyale*) umgesetzte, vorwärtsziehende Wirkung des Muskels sich teilweise als eine Hebung der Zunge in der Vertikalrichtung kund geben. Bei der Adduction des Zungenbeinbogens beteiligen sich freilich auch und vielleicht noch

mehr gewisse andere Faktoren, deren Erörterung ich in diesem Zusammenhang unterlasse.

Wenn es feststeht, dass der *M. protractor hyoidei* die erwähnte Wirkung, und nur diese, ausübt, müssen wir auch erwarten, dass da, wo die zugehörige Bewegung mangelt, entsprechende Veränderungen des Muskels festzustellen sind. So ist es in der Tat auch. Bei *Callionymus* z. B. ist der Zungenbeinbogen so gut wie gar nicht protractil; der *M. protractor hyoidei* ist in starker Degeneration, fast in Auflösung begriffen (Fig. XV, s. Abteilung II) und erscheint als eine sehr dünne, unregelmässig abgebrochene Schicht, die jegliche Verbindung mit dem *Intermandibularis* aufgegeben hat.

### **M. adductor hyomandibularis et arcus palatini.**

(VETTER 1878).

Der Ursprung des Muskels nimmt den grössten Teil des *Parasphenoids* sowie das *Prooticum* nach unten vom Ausschnitte für den Trigemino-facialis-komplex ein; nach vorn reicht er bis an den Vorderrand des *Foramen interorbitale*. Nach oben wird der Ursprung von der Crista, die sich vom *Prooticum* bis zum Vorderrand jenes *Foramen* erstreckt, begrenzt; nach unten bildet die etwas aufgetriebene Linie, die die Seitenfläche des *Parasphenoids* von dessen planer Ventralfläche trennt die Grenze des Ursprunges. Das ganze Gebiet ist mit Ausnahme seines am *Prooticum* gelegenen, hintersten Teiles, der ein Dreieck bildet, schmal und etwa gleich breit; die vordere Hälfte ist rinnenförmig. Dem entsprechend ist der Muskel gleichmässig abgeflacht und verhältnismässig dünn mit Ausnahme seines hintersten Teiles, der in Übereinstimmung mit dem Ursprung am *Prooticum* bedeutend anschwillt. Die Bündel laufen transversell und befestigen sich an einer Linea, die hinten an der Innenseite des *Hyomandibulare* an der Grenze zwischen diesem Knochen und dem *Quadratum* beginnt (Fig. D), von da an quer über die Innenfläche des *Metapterygoids* fortsetzt, und sodann sich längs dem freien Rande des letzteren nach unten umbiegt um bald dem oberen Rande des *Ektopterygoids* vorwärts zu folgen; an das *Entopterygoid* gelangt, breitet sich die Insertion über die ganze Aussenfläche desselben aus und endet am angrenzenden Teil des *Palatinum*. Am freien Rande des *Metapterygoids* und am oberen Rande des *Ektopterygoids* wird die Insertion durch eine dicke Fascie derart vermittelt, dass der Distalrand der muskulösen Partie vom *Metapterygoid* geradlinig nach *Entopterygoid* hinüberspringt; diese Linie schliesst mit den Rändern des *Metapterygoids* und des *Ektopterygoids* einen dreieckigen Raum ein, der eben von der genannten Fascie ausgefüllt wird.

Eine Scheidung in zwei Muskeln für das *Hyomandibulare* und den *Arcus palatini* resp. ist bei *Gadus* nicht vorhanden, obwohl der kräftige, hauptsächlich am *Hyomandibulare* inserierende Hinterteil des Muskels dem Adductor des *Hyomandibulare* z. B. bei *Perca* sicher entspricht.

Die Facialisstämme laufen zwischen diesem Muskel und dem *A<sub>3</sub>* ehe sie in ihren am *Hyomandibulare* befindlichen Löchern verschwinden.



Der *Adductor Arcus palatini* (*Ap*, Fig. 1) bildet den grössten Teil des Daches der Mundhöhle und trennt somit diese von der Orbita. Der Muskel wird an seiner dorsalen Fläche von der Orbitalfascie, deren Faserstriche hier kräftig hervortreten und sich vorn in eine starke Sehnenbildung mit Befestigung am *Ethmoid. laterale* nach unten und innen von der Gelenkfläche für das *Palatinum* sammeln, bekleidet. Alle am Boden der Orbita befindlichen Nervenstämme liegen zwischen der Orbitalfascie und dem Muskel eingebettet. Die Unterseite des letzteren wird von der viel schwächeren Fascie, die den Knochen des Gaumenbogens unmittelbar anliegt und ebenfalls rostro-caudal verlaufende aber recht feine Fasern aufweist, bekleidet.

*Wirkung.* Inwiefern der Adductor des Gaumenbogens sich nur gelegentlich, z. B. bei verstärkten Expirationen, kontrahiert, oder rhythmische, bei jeder Expiration wiederholte Zusammenziehungen ausführt, darüber liegen keine Beobachtungen vor. Meistens wird behauptet, dass die ruhigen, respiratorischen Adductionen der Suspensoren passiv, d. h. durch die Elasticität und die Schwere der betreffenden Teile, hervorgebracht werden. Die Frage lässt sich experimentell nur schwer entscheiden.

## 2. Innervierung der Muskulatur.

Das periphere Nervensystem bei *Gadus* ist Gegenstand spezieller Untersuchungen von STANNIUS 1842 (N:o 28, S. 338—366), FRIANT 1879 (N:o 10) und COLE 1898 (N:o 8, S. 115—221) gewesen.

STANNIUS giebt eine zu der Zeit ausgezeichnete Beschreibung über das Nervensystem beim Dorsche (*Gadus callarias* L.); in einer späteren, vergleichend-anatomischen Arbeit, »Das periphere Nervensystem der Fische« (N:o 29, 1849), revidiert er die Resultate jener Untersuchung. Die fundamentale Bedeutung dieser beiden Abhandlungen ist nicht durch die seitdem mit Notwendigkeit stattgefundene Umwerfung mehrerer der STANNIUS'schen, die Nervenmorphologie betreffenden Ansichten vermindert worden. Figuren über die motorischen Kopfnerven bei *Gadus* finden sich weder in der ersteren noch in der letztgenannten Arbeit; die Beschreibung der *Gadus*-nerven ist ausserdem betreffs vieler wichtigen Einzelheiten derart summarisch, bisweilen auch unvollständig, dass sie sich nicht immer auf die tatsächlichen Befunde anwenden lässt.

FRIANT hat eine Übersicht des *Trigeminus*- und *Facialis*-systems bei den Knochenfischen zusammengebracht. Seine Darstellung bezieht sich vorwiegend auf eine Anzahl Süsswasserfische, schliesst aber auch einige wenige Meeresfische, darunter *Gadus »carbonarius»* (= *virens* L.) ein. Die Beschreibung des letzteren nicht minder als die begleitende Figur weichen von den Verhältnissen bei *Gadus callarias*, wie ich sie gefunden habe, so erheblich ab, dass ich viele der Angaben FRIANT's nicht anders als wie reine Fantasiegebilde auffassen muss.



COLE beschäftigt sich hauptsächlich mit dem Ganglienkomplex der *Nn. Trigemini* und *Facialis* sowie mit der Innervierung des Seitenliniensystemes. Die sehr wichtige Untersuchung bezieht sich in erster Linie auf *Gadus virens*. —

In der nachfolgenden Darstellung habe ich vielfach auch das sensorische Nervensystem berücksichtigt. Dies geschah teils um der topographischen Beziehungen willen, teils überall da, wo die Untersuchung eine neue Tatsache so zu sagen umsonst gegeben hatte.

Als Material benutzte ich einige zwanzig frisch bezogene, oft soeben getötete Dorsche. Die Sectionen wurden meistens bei 8- bis 12-maliger Lupenvergrößerung, zweifelhaften Falles unter gleichzeitiger Verwendung einer schwachen Osmiumsäurelösung ausgeführt. Die Innervierung der Kiemenhaut ist mittels Essigsäure — Osmium nach MÜLLER festgestellt worden.

### Sensorischer Plexus der Wangenhaut (Fig. H).

Wenn man einem Dorsche die Wangenhaut vorsichtig abzieht, etwa als einleitende Manipulation beim Studium des *M. adductor mandibulae*, erblickt man auf der Aussenseite des letzteren unterhalb des Auges zwei dorso-ventral verlaufende, von Blutgefäßen und lockerem Bindegewebe umspinnene, feine Nervengeflechte. Entfernt man sodann, um seine Vorbereitungen für die Muskelsection zu vollführen, die Suborbitalknochen — man lasse die Schneide eines scharfen Messers der Innenfläche dieser Knochen möglichst genau folgen, — den Augapfel und die Orbitalfascie, lösen sich jene Nervengebilde unter der Lupe in ein reich verzweigtes System feiner und feinsten Fäden auf. Häufig bekommt man den Eindruck, als ob das eine oder das andere Ästchen in den Kiefermuskel direkt hineinsetze; die fast mikroskopischen Zweige haften bisweilen der Muskulatur so fest an, dass es mir in der That erst nach Osmiumfärbung gelang, der Täuschung los zu werden. Denn alle diesen Fäden sind Hautnerven; sie stammen von den *Nn. maxillaris inferior trigemini*, *buccalis externus*, *bucc. internus* und *mandibularis externus facialis* ab; mitunter kommt ein Ast vom *Truncus trigemini* noch dazu. In seiner *Gadus*-abhandlung aus 1842 erwähnt STANNIUS jenen Plexus gar nicht, in der späteren Arbeit (N:o 29) nur folgendermassen: »Gewöhnlich gehen Zweige dieses Astes (n. bucc. ext.) schlingenförmige Verbindungen ein mit Zweigen benachbarter Nerven, z. B. mit solchen des R. ophthalmicus bei *Cottus*, *Cyclopterus*, *Gadus* u. A.; mit solchen des R. maxillaris superior bei *Cottus*, *Gadus*, *Lepidoleprus*, *Salmo*, *Coregonus* u. A.» (S. 44). COLE dagegen berücksichtigt von diesen Bildungen nur den vom *N. mandib. ext.* kommenden Faden (S. 162), was etwas befremden muss, denn die von COLE aufs genaueste geschilderten Nervenäste für die Seitenlinienorgane der Suborbitalknochen gehen, insofern sie dem *Buccalis externus* entstammen, eben von einem in den Plexus eingezogenen Nerven aus. Eine kurze Beschreibung dieser Gebilde, die sich bei den meisten Teleostiern

in geringerer oder reicherer Ausbildung vorfinden, bis jetzt aber fast unbeachtet blieben<sup>1</sup> und niemals abgebildet worden sind, dürfte somit in der Ordnung sein.

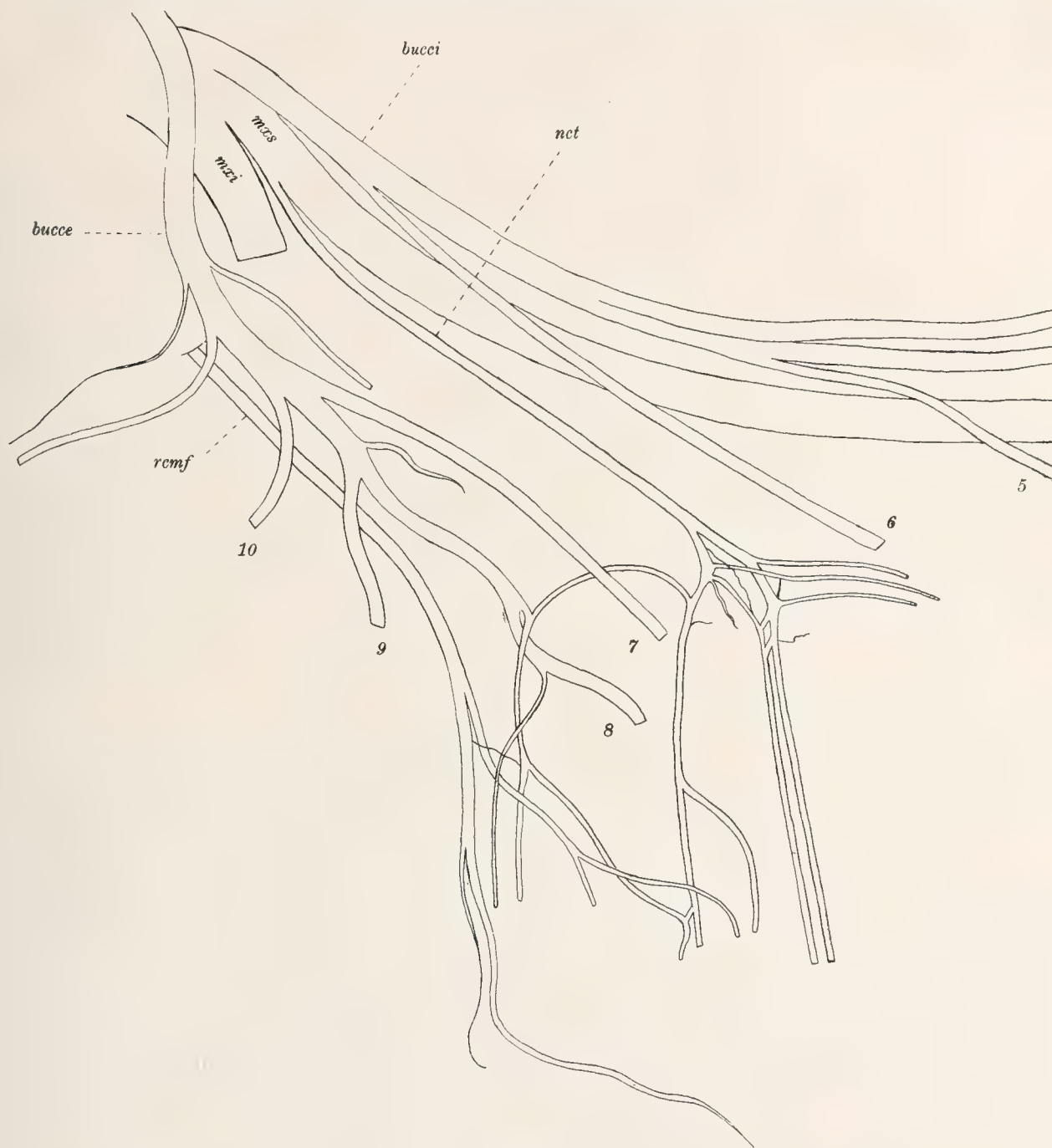


Fig. H.

Sensorisches Nervengeflecht der Wange, rechts. *rms* — N. maxillaris superior, *mxi* — N. maxill.<sup>s</sup> inferior, *bucci* — N. buccalis internus, *bucce* — N. buccalis externus, *nct* — N. cutaneus trigemini, *rcmf* — N. cutaneus rami mandibularis externi facialis. Die Ziffern 5—10 bezeichnen die Nervenästchen für die Seitenlinienorgane 5—10 der Suborbitalknochen. 8-fache Vergr.

Vom Winkel zwischen den *Nn. maxill. superior* und *inferior trigem.* oder vielleicht meistens vom erstgenannten Nerven (in einem Falle sogar vom *Maxill. inf.*:

<sup>1</sup> Nur ALLIS hat sie (bei *Scomber scomber*) näher berücksichtigt (N:o 2. S. 254).



Fig. I, *nct*) geht ein langer, feiner Ast aus (Fig. H, *nct*). Er läuft im Orbitalboden zwischen Fascie und Muskulatur vorwärts und nach unten; an den Orbitalrand gelangt, teilt er sich in viele, teilweise vorwärts, teilweise nach unten sich wendende, mit einander reichlich anastomosierende Zweige. Der hinterste dieser Zweige sendet in der Nähe des Orbitalrandes einen verhältnismässig starken, nach oben gerichteten, schlingenförmigen Ast aus, der mit dem Ende des *N. buccalis externus* ebenda, wo der Ast für das Organ 8 der Infraorbitallinie abgeht, zusammenläuft. Danach biegt sich der Nerv nach unten um und teilt sich bald in zwei Äste, einen hinteren und einen vorderen; im Bifurkationspunkte empfängt er einen sehr feinen Faden vom oben erwähnten, dem *Mand. ext. facialis* zugehörigen Ast (Figg. H und K 4, 9, *remf*). Dieser ist recht ansehnlich und tritt fast unmittelbar nach unten vom queren Muskelkamm des *Hyomandibulare* aus der Masse des *M. adductor mandibulae* hervor. COLE hat (S. 162) das Verhalten dieses Nerven eingehend beschrieben. Der vordere, dem vom hintersten Zweig des *N. nct* abstammenden Ast zugehörige Faden richtet sich nach vorn bis in die Nähe jenes Zweiges und anastomosiert endlich mit ihm. Hierdurch entsteht eine geschlossene Öse. Die Nerven, welche mit einander anastomosieren, sind also (von hinten vorwärts gerechnet) folgende: *Cutaneus mandib. ext. facialis*, *Buccalis ext.* und *Maxill. sup. trigemini*. Selbstverständlich beziehen sich die geschilderten Verhältnisse in jeder Einzelheit nur auf das abgebildete Individuum.

Die von STANNIUS erwähnten Verbindungen zwischen den *Nn. buccalis ext.* und *ophthalmicus* habe ich nicht beobachtet.

#### **Nervus ad Mm. levator. arcus palatini et dilatator operculi** (Fig. I, *rlap*).

Feiner Nerv, der vom »Trigeminusganglion« ziemlich weit nach hinten, nahe dem *Truncus hyomandibularis* ausgeht. Läuft anfangs unmittelbar am Schädel, sodann zwischen dem *A<sub>3</sub>* und den Facialisstämmen nach oben bis an den Gelenkkopf des *Hyomandibulare* hinauf; dort angelangt sendet der Nerv einen vorwärtsgerichteten Hauptast in den nach vorn vom *Hmd* befindlichen Teil des *M. Levator. arc. pal.* hinein, biegt sich nach unten um, der Aussenseite des *Hyomandibulare* anliegend, und geht nach oben vom grossen Muskelkamm, schräg über den Knochen nach unten und hinten, inzwischen Äste für den Levator abgebend. Der Nerv wird die ganze Zeit von einem kleinen Gefäss begleitet. Zuletzt verliert er sich im *M. dilatator operculi*.

#### **Innervierung der Kiefermuskulatur; Nervus maxillaris inferior trigemini.**

Die Kiefermuskulatur bei *Gadus* wird durch nicht weniger als drei, mitunter vier vom *Maxillaris inf.* getrennt ausgehenden Zweigen versorgt. Der erste Ast (Fig. I, *ram*) ist ziemlich kräftig; er geht in seltenen Fällen schon vom *Truncus trig.*, in der Regel aber vom *Maxillaris inf.* unweit der Bifurkation ab. Nach kur-



zum Verlauf dringt er in die dritte Portion des Adductors ( $A_3$ ) bez. deren Innenseite nahe dem Dorsalrand und dem Ursprung des Muskels ein, geht, einige wenige

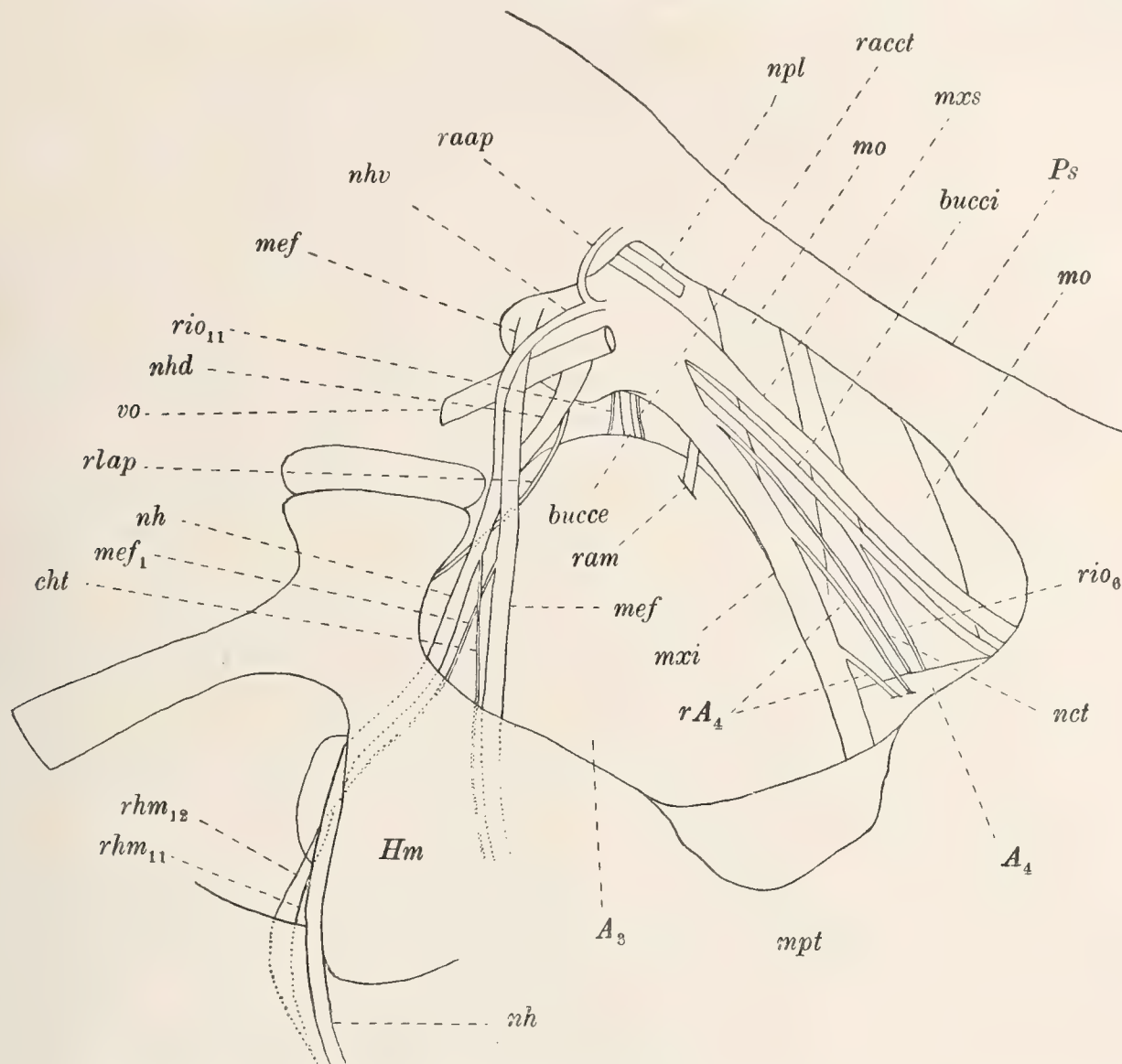


Fig. I.

Hauptstämme des *Trigeminus-* und *Facialis*-systemes von unten und innen, links. Suspen-  
sorium und Gaumenbogen sind um ein Viertel des Kreises nach aussen und oben umgebogen worden.  
*mxs* — N. maxillaris superior, *mxl* — N. maxill. inferior trigemini, *racct* — Ramus accessorius  
trigemini, *ram* — Ramus ad musc. adduct. mand. (Portt. III und II), *rA<sub>4</sub>* — Äste des Maxill. inf.  
für die vierte Portion des Adduct. mand., *nct* — N. cutaneus trig., *bucci* — N. buccalis internus,  
*rio<sub>6</sub>* — Ast des vorigen Nerven für das Organ 6 der Suborbitallinie, *bucce* — N. buccalis externus,  
*rio<sub>11</sub>* — Ast des vorigen Nerven für das Organ 11 der Suborbitallinie, *mef* — N. mandibularis externus  
facialis, *nh* — N. hyoideus facialis, *nhv* — ventraler, *nhd* — dorsaler Schenkel des vorigen Nerven,  
*raap* — Ramus ad musc. adduct. arc. pal., *rlap* — Ramus ad musc. levat. arc. pal., *cht* — Chorda  
tympani, *mef<sub>1</sub>* — Ast, der sich später in die Nerven *rh<sub>m11</sub>* und *rh<sub>m12</sub>* für die Organe 11 und 12  
der Hyomandibularlinie teilt, *npl* — N. palatinus, *A<sub>3</sub>* — dritte, *A<sub>4</sub>* — vierte Portion des M. adduct.  
mand., *mo* — Augenmuskeln, *vo* — Vena orbitalis, *Hm* — Hyomandibulare, *Ps* — Parasphenoid,  
*mpt* — Metapterygoid.

Äste abgebend, durch die Masse des Muskels abwärts und kommt wieder zum vorschein an dessen Aussenseite mehr oder minder nahe dem Unterrand desselben und

dessen Verbindung mit der zweiten Portion ( $A_2$ , Fig. 3). Das zwischen beiden Portionen befindliche, freie Stück des Nerven giebt wenige nach hinten gerichtete Zweige für den *M. A<sub>3</sub>* sowie mehrere vorwärtslaufende Zweige für den *M. A<sub>2</sub>* ab. Die letztere nebst dem Hauptstamm des Nerven dringen in die Innenseite des *M. A<sub>2</sub>* und zwar in den Winkel zwischen der Hauptmasse des Muskels und dessen kleinen, dem Ursprungsfeld *d* (Fig. A) entstammenden Bauch ein. Im Inneren des *M. A<sub>2</sub>* nimmt der Nerv einen nach hinten gerichteten Verlauf an und verzweigt sich endlich, am deutlichsten in der hinteren Hälfte des Muskels.

Unweit des vorigen Nerven, jedoch von einer anderen Seite des *Maxillaris inf.*, geht der *Ramus ad port. IV m. adduct. mand.* ab (Fig. I,  $rA_4$ ). Er ist viel schwächer als jener und hat einen viel längeren Weg zurückzulegen, ehe er sein Ziel erreicht. Der Nerv geht, in einige kurze und ausserordentlich feine Äste geteilt, in die Dorsal-seite des Muskels unfern dessen Ursprung hinein. Zuweilen empfängt der Muskel vom *Maxillaris inf.* zwei Äste, einen hinteren, längeren und schwächeren und einen vorderen, viel kürzeren (Fig. I); beide sind schwächer als der sonst einzige Nerv.

Das Verhalten der Nerven für die Portionen  $A_2$ ,  $A_3$  und  $A_4$  ist somit nicht unerheblichen Schwankungen unterworfen; kaum finden sich zwei Individuen, welche einigermaßen gut übereinstimmen; sogar die rechte und die linke Seite eines und desselben Tieres bieten nur selten völlig einartige Befunde dar; bei einem Dorsche z. B. ging an der linken Seite der Zweig für den *M. A<sub>3</sub>* vom *Truncus trig.*, der Zweig für den *M. A<sub>4</sub>* aber von eben dem Punkte am *Maxillaris inf.*, wo an der rechten Seite der Nerv für den *M. A<sub>3</sub>* abzweigte, aus; an der letzteren Seite waren die Verhältnisse etwa normal.

Die erste Portion des Adductors ( $A_1$ ) wird durch zwei mit dem blossen Auge kaum zu entdeckenden Ästchen innerviert. Das eine kommt von der Aussenseite der 4:ten Portion hervor, stammt also vom Nerven für diese Portion ab; das andere wird vom Hauptstamm des *Maxillaris inf.* abgegeben. Das erstere Ästchen läuft nach oben vom  $A_2$  und teilt sich in zwei, ehe es in den  $A_1$  eindringt; der unmittelbar vom *Maxillaris inf.* kommende Faden geht anfangs an der Innenseite des  $A_4$  abwärts, biegt sich danach um den unteren Rand desselben nach aussen um und dringt in der Nähe der beiden erwähnten Zweige in die Innenseite des  $A_1$  ein. Die Äste für den *M. A<sub>1</sub>* sind derart winzig, dass es mir nur mittels Osmiumfärbung gelang, die Innervierung dieser Portion unter der Lupe festzustellen.

Nach Abgabe des *N. ad port. IV* geht der *Maxillaris inf.* zwischen den *Mm. adduct. arc. pal.* und  $A_4$  längs dem Vorderrand des  $A_3$  nach aussen, vorwärts und abwärts und giebt auf einer langen Strecke keine Zweige ab. An der Innenseite des  $A_4$  sendet er den eben erwähnten Zweig für die erste Portion aus; nach unten vom  $A_4$  liegt er der Innenseite des  $A_1$  unmittelbar an. Nach unten vom  $A_1$  tritt der Nerv nach aussen bis an die Oberfläche der Wange hervor (Fig. 1) und wird hier nur von Haut und Bindegewebe bedeckt. Aber nur für eine kleine Weile, denn bald darauf stösst er an das *Articulare* des Unterkiefers, biegt sich nach innen vorwärts um und setzt nach Abgabe eines gröberen Zweiges (*nct.*, Fig. 7) seinen



Lauf an der Innenseite des Unterkiefers fort. Diesen Zweig lassen wir vorläufig unbeachtet.

Im Moment, wo der *Maxillaris inf.* an den Unterkiefer gelangt, giebt er zwei bis drei kurze, verhältnismässig kräftige Äste für den *M. Aω* ab; sie dringen zwischen Knochen und Muskulatur ein und verzweigen sich mehrfach unmittelbar vor dem Eintritt in die Aussenseite des Muskels (Fig. 7, *rAω*). Zugleich oder unmittelbar danach teilt sich der *Maxillaris inf.* in seine beiden Terminalzweige. Der obere richtet sich gerade vorwärts und verschwindet bald im oberen Unterkieferkanal; der untere, gröbere Zweig nimmt einen schrägen Verlauf nach unten und vorwärts. Beide liegen dem *Articulare* unmittelbar an (*mx<sub>i1</sub>* und *mx<sub>i2</sub>*). Der obere Ast ist rein sensorisch, und sein weiteres Schicksal kümmert uns hier nicht. An den *Meckelschen* Knorpel gelangt, keilt sich der untere Ast (etwa an der Spitze des im Hinterrand des *Dentale* befindlichen Winkels) zwischen den Knorpel und den *Articulare*, taucht nach unten vom Knorpel wieder hervor und biegt sich sodann in den unteren Unterkieferkanal hinein. Während der Nerv sich noch zwischen Knorpel und Knochen befindet, giebt er einen feineren Ast ab, der nebst seinem Mutterstamm nach unten vom Knorpel zum Vorschein kommt. Dieser Ast, der den *N. ad musculus protract. hyoidei* darstellt, ist sehr lang und richtet sich gerade vorwärts (Fig. 7, *rpht*). Anfangs wird er von zwei anderen Nerven und zwar einem feinen, dorsal gelegenen und einem etwas gröberen, ventralen begleitet; der erstere (*nct<sub>3</sub>*) stammt vom *Maxillaris inf. trig.* ab, der letztere (*mef*) bildet den Endzweig des *N. mandibularis externus facialis*. Mit diesem erscheint der *N. protract. hyoid.* für eine Weile sehr fest verbunden<sup>1</sup> jedoch ohne Anastomosen oder Faseraustausch; beide Nerven liegen dabei dem *Meckelschen* Knorpel eng an. An der Spitze des erwähnten Winkels des *Dentale* trennen sie sich: der *Facialiszweig* verschwindet mit dem unteren Terminalzweig des *Maxillaris inf.* im unteren Unterkieferkanal, während der *N. protract. hyoid.* seinen weiteren Verlauf an der medianen Fläche des *Dentale* nimmt. Von jetzt an wird der letztere Nerv vom oben erwähnten *Trigeminuszweig* (*nct<sub>3</sub>*) allein begleitet; auf den Ursprungsort dieses Astes kommen wir später zurück. Beide Nerven liegen einander derart fest an, dass sie nur mittels der Messerschneide zu trennen sind, tauschen aber keinen einzigen Faser aus. Etwa in der Mitte zwischen der Unterkiefersymphyse und der Spitze des Winkels am *Dentale* verlassen die Nerven den Knochen, nähern sich, die Masse des Muskels *Aω* durchquerend, allmählich der Medianlinie und erreichen an der halben Höhe dieses Muskels und in der Nähe der Unterkiefersymphyse die Wand der Mundhöhle (Fig. 4). Jetzt trennen sie sich und laufen in der zwischen dem Unterkiefer und dem *M. protract. hyoid.* ausgespannten Haut, die hier den Boden der Mundhöhle darstellt; den begleitenden *Trigeminusast nct<sub>3</sub>*, der sensorischer Natur ist, verlassen wir nunmehr, um das weitere Verhalten des *N. protract. hyoid.* zu untersuchen.

<sup>1</sup> Um eine deutliche Übersicht der Nerven zu gewinnen, sind diese in der Figur 7 aus ihrer natürlichen Lage auseinandergezogen, und der *Meckelsche* Knorpel ist aus demselben Grund fast völlig weggelassen worden.



Der letztere Nerv geht nach kurzem Verlauf in der Mundbodenhaut auf die laterale Fläche des *M. protract. hyoid.* über (Fig. 6), taucht fast sogleich in den Muskel hinein und verläuft im Inneren desselben auf einer kleinen Strecke. Darunter giebt er einen unansehnlichen, rostralwärts sich wendenden Zweig ab und biegt sich zugleich nach hinten scharf um, kommt wieder zum Vorschein auf der ventralen Oberfläche des Muskels, einen gewundenen Verlauf nach hinten und gegen die Medianlinie zu einnehmend und vereinigt sich endlich an der letzteren mit dem anderseitigen *N. protract. hyoid.* Dies geschieht auf eben dem kleinen Gebiete, wo beide *Mm. protract. hyoid.* mit einander verwachsen sind; der Berührungspunkt der Nerven hat fast das Aussehen eines Ganglions. Vom Wiederaustreten auf die Ventralfläche des Muskels an bis zum Punkte, wo der Nerv mit seinesgleichen der anderen Seite verschmilzt, giebt er rechts und links mehrere kurze Zweige ab, die sich teils in der Masse des Muskels einsenken, teils auf dessen Oberfläche verbreiten. Darauf geht er auf den hinteren Schenkel des Protractors über; anfangs liegt er auf der Oberfläche desselben, nach beiden Seiten mehrere Äste aussendend, tritt aber bald in den Muskel hinein, verzweigt sich und anastomosiert endlich auf etwa der halben Länge des Protractors mehrfach mit dem von hinten kommenden, für den Muskel bestimmten *Facialisast* (*rphf*), der vom *N. hyoideus* abstammt.

Wie oben erwähnt wurde, sendet der *N. maxillaris inf.*, ehe er sich an die Innenseite des Unterkiefers begiebt, einen kurzen, gröberen Zweig aus. Dieser (*nct*<sub>1</sub>, Fig. 7) spaltet sich fast unmittelbar in zwei, von denen der eine (*nct*<sub>3</sub>) nach der Innenseite, der andere (*nct*<sub>2</sub>) nach der Aussenseite des Kiefers geht; beide sind sensorisch. Die Angaben STANNIUS' kann ich hier nicht bestätigen. Nachdem er die Zweige für die *Mm. levator arc. pal.*, *A*<sub>3</sub> und *A*<sub>4</sub> erwähnt und den *N. maxillaris inf.* bis an den Unterkiefer gefolgt hat, sagt er (N:o 28, S. 344): »Er (der *Maxillaris inf.*) giebt einen oberen Zweig ab, der über dem Unterkiefermuskel zur Haut der Mundhöhle, welche zwischen Oberkiefer und Unterkiefer liegt, gelangt». Kein solcher Ast existiert. Und ferner: Ein abwärts verlaufender Zweig teilt sich mehrfach». Dieser Zweig ist offenbar identisch mit meinem Zweig *nct*<sub>1</sub>, der sich unmittelbar vor der Abgabe der Äste für den *M. Aω* vom Hauptstamm des *Maxillaris inf.* اسپaltet; ich habe ihn, wie schon erwähnt wurde, immer nur 2-ästig gefunden. »Zwei seiner Zweige verlaufen in der Nähe des Unterkiefergelenkes nach aussen». In keinem Fall habe ich mehr als einen einzigen nach aussen gehenden Zweig und zwar den vorgenannten *nct*<sub>2</sub> beobachtet. Dieser richtet sich gerade abwärts, winkeltrecht zur Längsachse des Unterkiefers; etwa in der Mitte zwischen der obersten Ecke des *Articulare* und dem langen, horizontalen Grate, der an der Grenze zwischen *Articulare* und *Dentale* von beiden gebildet wird, sendet er einen Ast vorwärts; an den Grat gelangt, biegt sich der Nerv selbst im rechten Winkel vorwärts um.

FRIANT wiederum schildert (N:o 10, S. 51) bei *Gadus virens* diese Verhältnisse in hauptsächlichster Übereinstimmung mit meinen Beobachtungen an *G. callarias*.

Der andere, nach der Innenseite des Unterkiefers gehende Zweig (*net<sub>3</sub>*) richtet sich zuerst gerade abwärts, stösst aber am Unterkieferrande an den *N. mandibularis ext. facialis*, für den er sich winkelrecht vorwärts umbiegt, und den er nachher für eine Weile begleitet; beide Nerven liegen einander eng an jedoch ohne irgendwelche unmittelbare Verbindungen. Bei *Gadus virens* erwähnt FRIANT (l. c.) eine kurze Anastomose zwischen den fraglichen Nerven eben da, wo sich der Ast *net<sub>3</sub>* nach vorn umbiegt, und bildet ihn auch ab (19, Taf. 5); COLE dagegen verneint (N:o 8, S. 163) betreffend dieselbe Art das Vorhandensein einer jeden Verbindung zwischen diesen Nerven. Ich habe indessen bei *G. callarias* immer einen verhältnismässig kräftigen Faden, der an der Biegung des *Trigeminus*-astes vom letzteren abgeht, gefunden, und jener Faden, der sich abwärts richtet, den *Mand. ext. fac.* an dessen Innen oder Aussen-seite kreuzend, nimmt nach unten von diesem Nerven einen feineren Ast auf, der von der Unterseite des *Mand. ext.* eben da, wo der letztere sich über den Kieferrand hineinschlägt, abgeht (Fig. 7). Es handelt sich somit um eine Art Plexusbildung. Die zu einem vereinigten Ästchen verschwinden im Kiefer an der Grenze zwischen *Articulare* und *Dentale*; zuweilen treten sie jedoch gesondert in den Kiefer, der *Facialis*ast unmittelbar hinter dem *Trigeminus*ast. Der erstere geht nach einem der Sinnesorgane der Hyomandibularlinie (vergl. COLE S. 163). Bei einem Individuum ging vom Zweige *net<sub>3</sub>* in der Nähe des Kiefergelenkes ausserdem ein langer, feiner Faden nach unten und vorwärts aus, der sich an den Hauptstamm des *Mand. ext.* legte und mit dem oberen Terminalast des letzteren im unteren Unterkieferkanal verlief, bis beide Nerven verschmolzen.

Nach Abgabe des erwähnten, kleinen Astes setzt der Zweig *net<sub>3</sub>* seinen weiteren Lauf vorwärts und ein wenig abwärts fort und liegt dabei dem Dorsalrand des *Mand. ext.*, später dem Dorsalrand dessen oberen Terminalzweiges unmittelbar an; beide (*net<sub>3</sub>* und *mand. ext.*) befinden sich nach innen und dorsal vom *Meckelschen* Knorpel. Etwa gegenüber dem Punkte, wo der untere Terminalast des *Maxillaris inf.* zwischen den Knorpel und das *Articulare* hinabdringt, wendet sich der Zweig *net<sub>3</sub>* nebst dem begleitenden *Facialis*zweig schief abwärts und vorwärts, die mediane Fläche des Knorpels überquerend; am unteren Rande des letzteren werden die Nerven von dem unterhalb des Knorpels hervortauchenden *N. protract. hyoid.* auseinandergeschoben. Der *Trigeminus*zweig *net<sub>3</sub>* legt sich in schon beschriebener Weise dem *N. protract. hyoid.* dorsalwärts fest an und setzt nach seinem uns hier nicht angehenden Bestimmungsort fort. Der *Facialis*zweig schliesst sich dem unteren Terminalast des *Maxillaris inf.* an und geht mit ihm in den unteren Mandibularkanal hinein; am distalen Ende des Unterkiefers verzweigen sich beide. Inwiefern ihre Ästchen, wie STANNIUS (N:o 28, S. 345) behauptet, unter sich anastomosieren oder sich nur um einander winden, muss ich dahingestellt sein lassen, halte jedoch das letztere für wahrscheinlich (vergl. COLE S. 164). Mit dem Verhalten dieser Nerven haben wir übrigens hier nichts zu thun.

Sämtliche oben geschilderte Nervenstämme (mit Ausnahme der Enden des *N. protract. hyoid.* und des Zweiges *net<sub>3</sub>*) liegen dem Knochen unmittelbar an.



Die Angaben von STANNIUS und FRIANT in Bezug auf diese Nerven sind fast durchweg irrtümlich. Die Äste für den *M. A* nicht minder als den *N. protract. hyoid.* lässt STANNIUS (l. c.) vom oberen Terminalzweig des *Maxillaris inf.* ausgehen; der den ersteren begleitende, sensorische *Trigeminuszweig* (*nct<sub>3</sub>*) wird gar nicht erwähnt. FRIANT hat die Äste für den *M. A* ganz übersehen; als unteren Terminalzweig des *Maxillaris inf.* führt er bei *Gadus virens* den *N. protract. hyoid.* auf und beschreibt eine kurze Anastomose zwischen dem letzteren und dem *N. mand. ext. fac.* COLE (l. c.) giebt hinsichtlich derselben Art ganz bestimmt an, dass keinerlei Verbindung zwischen diesen beiden Nerven existiert, was auch mit meinen Beobachtungen an *G. callarias* (s. oben) übereinstimmt. Die Anastomose FRIANT's nebst seinem »Terminalzweig des *N. mand. ext. fac.*« dürfte nichts anderes als das unterhalb des Abgangspunktes des *N. protract. hyoid.* befindliche Stück des unteren Terminalzweiges des *Maxillaris inf.* sein; den in Rede stehenden Zweig des *Mand. ext. fac.* hat er offenbar nicht gesehen. Es ist freilich nicht zu leugnen, dass das Verhalten dieser Nerven da, wo sie in näherer Beziehung zu einander treten, ausserordentlich schwierig zu entziffern ist; die zahlreichen, begleitenden Blutgefässe, die häufig den feineren Nerven täuschend ähneln, tragen überdies dazu bei, das Bild zu verwirren.

Indes ist zu bemerken, dass ALLIS den *N. protract. hyoid.* bei *Scomber* zuweilen mehr oder weniger »gemischt« mit dem *N. mand. ext.* gefunden hat (N:o 2, S. 263). Bei *Amia* hat derselbe Verfasser ausserdem Anastomosen sowohl zwischen dem *N. »geniohyidens inferior«* (einem Ast des *N. protract. hyoid.*) und dem »*Mandibularis internus facialis*« (= *Mand. ext.*) als auch zwischen dem letzteren und dem *N. Maxillaris inf. trigemini* beschrieben (N:o 1, Fig. 44, Taf. XXXI).

Von *Perca* und *Lucius* (Esox) giebt VETTER an, dass die Zweige für den *M. A* vom oberen Terminalast des *Maxillaris inf.* abgegeben werden, und fügt hinzu, dass bei *Perca* derselbe Terminalast mit Fäden des »*Mand. facialis*« (= *Mand. ext. fac.*) in Verbindung steht. Vom unteren Terminalast bei *Lucius* heisst es, dass er sich zuletzt mit dem *Mand. fac.* verbindet, wonach die vereinigten Nerven sich überwiegend in der Unterkieferhaut verteilen, »versorgen aber mit zwei feinen Zweigen auch den queren Unterkiefermuskel (*M. intermandibularis*) und mit einem stärkeren, nach unten und hinten sich wendenden Aestchen den *M. geniohyoideus*« (N:o 31, S. 496). FRIANT beschreibt derartige Verbindungen zwischen dem *Maxillaris inf.* und dem *Facialis* bei allen von ihm untersuchten Formen, *Lucius* jedoch ausgenommen. JUGE (N:o 18, S. 78) hat bei *Silurus glanis* die fraglichen Anastomosen nicht gefunden.

Hinsichtlich dieser Verhältnisse dürften erneuerte, umfassende Prüfungen unter Kautelen, die eine Verwechselung mit Gefässen u. drgl. ausschliessen können, unbedingt von nöten sein.



### Truncus hyomandibularis. Chorda tympani.

Der Truncus wird von COLE (l. c. S. 161) bei *Gadus virens* folgendermassen beschrieben:

»This large nerve, just at its origin from the trigemino-facial ganglion, is divided by the orbital vein into two portions. The anterior ventral portion consists of two parts representing the morphological palatine and pre- and post-spiracular nerves or the »facial proper«, whilst the posterior dorsal portion constitutes the »lateral line root of the facial«. These constituents run alongside one another external to the vein, but are soon quite separable by the microscope into an anterior bundle, composed of the pre-spiracular and main trunk of the external mandibular branch, and a posterior bundle, which is mostly formed by the post-spiracular nerve, but also includes a branch of the external mandibular. In dissections it was noticed that the pre-spiracular separated off before the hyomandibular trunk divided into the two preceding bundles».

Obgleich nicht ausdrücklich gesagt, geht aus dem obenstehenden hervor, dass die *Nn. mandibularis externus* und *hyoideus* sich kreuzen; die Wurzel des ersteren wird als die hintere, die Wurzel des letzteren als die vordere angegeben, während die beiden Nerven nach unten vom Punkte, wo sie sich trennen, sich in umgekehrter Lage befinden.

Die zugehörige Figur (2, Taf. 22) ist nicht ganz geeignet, die Schilderung zu beleuchten.

Die Verhältnisse bei *G. callarias* erscheinen nun etwas anders und zwar in sehr eigentümlicher Weise. Die *Mandibularis-externuswurzel* durchbohrt fast immer die Wurzel des *N. facialis* s. s. (Figg. I, K 1—3, 6—7); nur bei zwei Individuen waren die Befunde auf der einen Seite mit der Beschreibung COLE's so ziemlich im Einklang (Fig. K 8), die *Facialis*-wurzel aber war hier dorsal, nicht wie COLE angiebt ventral; er überquerte die *Mandibularis-externus*-wurzel auf ihre Aussen-seite und war ihr nur los angehaftet worden. Übergänge zwischen beiden Zuständen finden sich nicht gar zu selten (Fig. K 5). Die Spaltung der *Facialis*-wurzel erscheint entweder sogleich beim Austreten vom Ganglion ausgeprägt, in welchem Falle der *N. facialis* zwei getrennte Wurzeln, eine äussere oder dorsale und eine innere oder ventrale, aufweist (Figg. I, K 7); oder der Nerv ist anfangs ungeteilt, bildet aber sehr bald eine Öse, die den Seitenliniennerven, den *Mandibularis externus* umschliesst (Figg. K 1 und 3). Das Verhalten der *Facialis*-schenkel zu den dem Nerven zugehörigen Hauptzweigen ist folgende: der innere oder ventrale Schenkel bildet den Ursprung für die *Chorda tympani* (ich folge hier wie überall der Auffassung und Nomenklatur COLE's), obschon wenigstens in einem Falle (Fig. K 3) mit Sicherheit beobachtet wurde, dass die Chorda ventral vom *Mandibularis ext.* auch ein paar Fibrillen vom äusseren Schenkel empfing; ausserdem geht der *N. ad m. adduct. arcus palatini* vom inneren Schenkel aus (Fig. K 7); der äussere

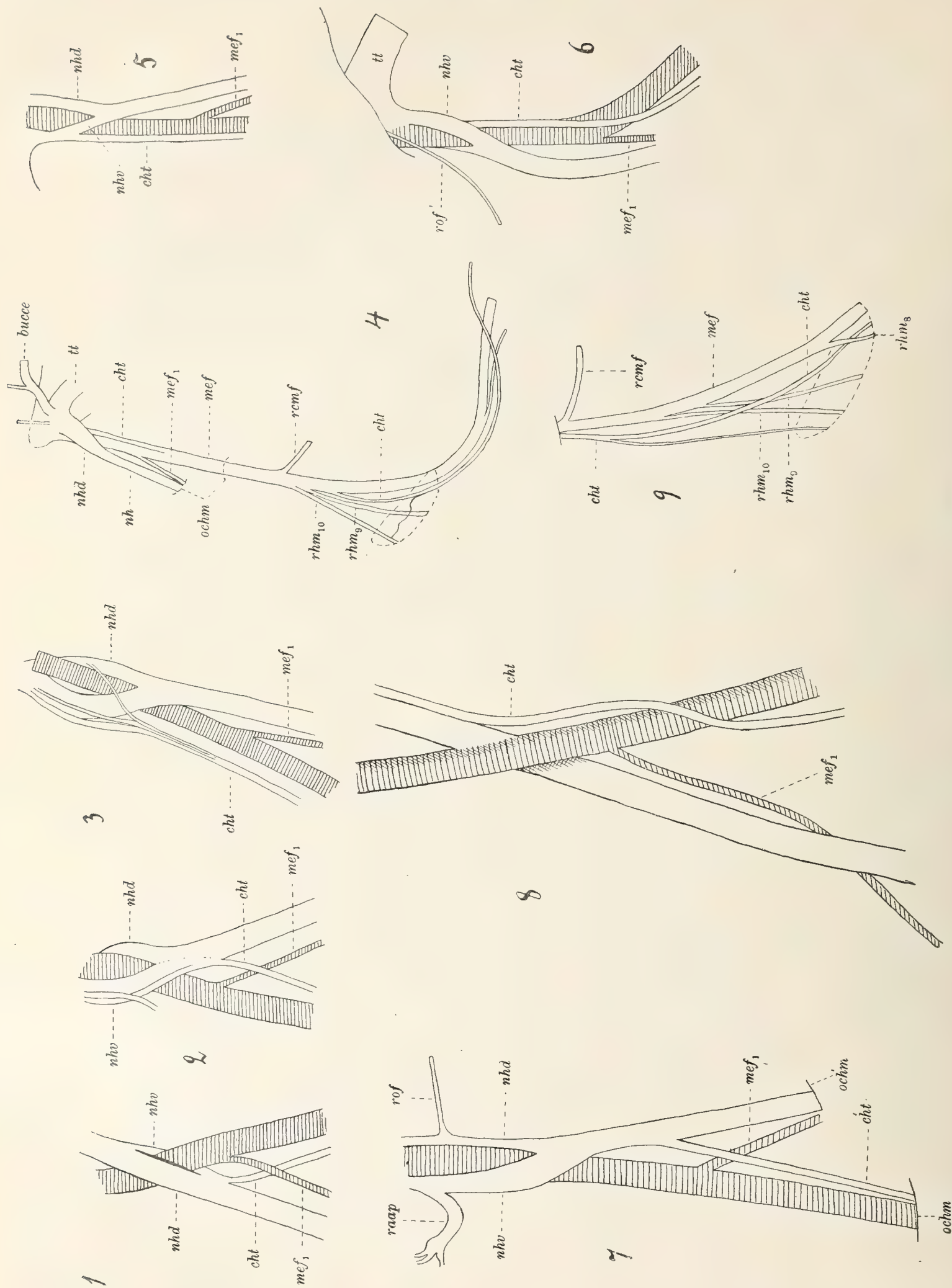


Fig. K 1—9. Erklärung s. nächste Seite.



Schenkel giebt den *N. opercularis* (*N. ad mm. levat. et adduct. operculi*) *facialis* Tab (Fig. K 7). Beide Schenkel schliessen sich ventral vom *Mandib. ext.* zur Bildung des *N. hyoideus facialis* zusammen.

Diese Spaltung des *N. facialis* prägt sich so deutlich aus, dass es nur einer ganz leichten Sektion bedarf, um das Verhältnis ersichtlich zu machen; der *N. mandibularis externus* liegt frei innerhalb der vom *Facialis* gebildeten Öse, und ein Austausch von Fibrillen zwischen diesen beiden verschiedenartigen Komponenten habe ich niemals beobachtet. Die Öse umschliesst auch die Orbitalvene und zwar derart, dass diese sich an der *Aussenseite* des *Mandibularis externus* befindet (Fig. I). Bei *Gadus virens* geht nach COLE (l. c.) die Vene zwischen *Mand. ext.* und *Facialis* an der *Innenseite* des ersteren.

Die seltenen Ausnahmefälle, wo der *N. facialis* nicht vom *Mandibularis ext.* nebst der Vene durchbohrt wurde, haben den Anschein, als ob der innere Schenkel verschwunden wäre; bei den Individuen, die Übergänge zwischen diesem und dem normalen Zustand aufwiesen, war es immer der innere Schenkel, der von der Reduktion betroffen wurde. Die letztere mag aber nur eine scheinbare sein; die einfache *Facialis*-wurzel dürfte wohl ebenso viel wie die geteilte einschliessen. Beispiel einer solchen Zwischenstufe finden wir in der Figur K 5; der innere *Facialis*-schenkel bildete bei diesem Individuum nur ein sehr dünnes und lockeres, von einschichtig gelagerten Fibrillen zusammengesetztes Band.

Das Verhalten der *Chorda tympani* ist ein sehr mannigfaltiges. In der Regel wird sie erst mehr oder weniger weit nach unten vom Punkte, wo die *Nn. hyoideus* und *mandibularis externus* auseinandergehen, frei (Figg. I; K 1, 2 und 7); sie verlässt den *N. hyoideus* und zwar seinen Vorderrand gegenüber der Ausgangsstelle des diesem Nerven begleitenden *Mandibularis ext.*-fadens. In solchem Falle legt sich die Chorda gleich anfangs an den Hinterrand des *Mand. ext.*, eine Lage, die sie fast immer fortwährend behält. Immer aber lässt sie sich vom *N. hyoideus* mit Leichtigkeit trennen und am ventralen *Facialis*-schenkel mehr oder minder weit nach oben, sogar bis an das Ganglion, verfolgen. In anderen, erheblich selteneren Fällen geht die Chorda direkt vom ventralen Schenkel aus (Fig. K 3); sie folgt dann anfangs dem Vorderrand des *Mand. ext.*, überquert ihn aber früher oder später um sich dem Hinterrand desselben in gewöhnlicher Weise anzulegen. In dem Masse wie der ventrale Schenkel schwindet, wandert der Ausgangspunkt der Chorda nach

---

*Truncus hyomandibularis, Nn. hyoideus und mandibularis externus* von sechs Individuen. 1 rechts von aussen, 2 rechts von innen eines und desselben Individuums; 3 rechts von innen; 4 rechts von aussen, 5 rechts von innen, 6 links von innen eines und desselben Individuums; 7 rechts von innen; 8 links von innen; 9 rechts von aussen. Der *N. mand. ext. (mef)* wird schraffiert dargestellt. *nh* — *N. hyoideus*; *nhd* — dorsaler, *nhv* — ventraler Schenkel des *N. facialis* s. s.; *cht* — *Chorda tympani*; *mef*<sub>1</sub> — Zweig des *Mand. ext.* für die Seitenlinieorgane 12 und 11 des *Hyomandibularsystemes*; *rhms*<sub>8-10</sub> — Zweige des *Mand. ext.* für die Organe 8—10 desselben Systemes; *renf* — Zweig des *Mand. ext.* für die Wangenhaut; *raap* — Nerv des *M. adduct. arc. palatini*; *rof* — Nerv der *Mm. levat. et adduct. operculi*; *bucce* = *N. buccalis ext.*; *tt* — *Truncus trigemini*; *ochm* — Mündungen der grossen Nervenkanäle des *Hyomandibulare*.



oben (Fig. K. 5), und da, wo die *Facialis*-wurzel gar keine Spaltung aufwies, war die Chorda frei bis an das Ganglion (Fig. K 8); sie ging wie gewöhnlich am Vorderrand der Wurzel ab. In einem Falle (Fig. K 4) wurde die Chorda nach freiem Verlauf längs dem Vorderrand des *Mand. externus* vom letzteren aufgenommen und war äusserlich nicht mehr zu spüren, bis sie weit unten, in der Nähe der grossen Lücke zwischen *Præoperculum*, *Quadratum* und *Symplecticum*, vom Hinterrand des *Mand. ext.* wieder frei abging.

Die eigenartig wechselnde Beschaffenheit der *Facialis*-wurzel nicht minder als die ausserordentlich unbestimmten Lagebeziehungen der *Chorda tympani*, verstehen sich schlecht mit der geläufigen Anschauung von fixen Nervenbahnen.

### Nervus mandibularis externus.

Die Angaben COLE's in Bezug auf diesen Nerven habe ich nur bestätigen können.

Bisweilen werden die Organe 10, 9 und 8 der Hyomandibularlinie, statt von je einem besonderen, vom *Mand. ext.* ausgehenden Zweig, von nur zwei solchen versorgt; der eine dieser Zweige (gewöhnlich der untere) teilt sich in Zwei. Einmal habe ich eine feine Anastomose zwischen der Chorda und dem Zweig für das Organ 10 beobachtet (Fig. K 4).

Der dem *N. hyoideus* begleitende Faden (*mef*<sub>1</sub>, Figg. I, K 1—8) geht immer ein wenig nach unten vom Punkte, wo beide Hauptnerven sich trennen, ab, überquert die *Chorda tympani*, wenn diese etwa auf derselben Höhe den *N. hyoideus* verlässt, legt sich an den Vorderrand des letzteren und verschwindet mit ihm, wie schon COLE beschrieben hat, im hinteren Hyomandibularkanal (Fig. I). Hier legt sich der Nerv an die Aussenseite des *N. hyoideus* und teilt sich in zwei Äste, die mit jenem auf die Innenseite des *Præoperculum* gelangen und bald in diesen Knochen eben da, wo der Grat für den Ursprung *e* der zweiten Portion des *Adductor mandibulæ* sich erhebt, eintreten. Beide Äste laufen zwischen dem äusseren und dem inneren Blatte des *Præoperculum* und innervieren die Seitenlinieorgane 12 und 11 des Hyomandibularsystemes (Fig. I, *rh*<sub>m<sub>11</sub> und 12</sub>). In einem Falle waren sie im Inneren des *Præoperculum* für eine Weile verschmolzen.

Die Beziehungen zwischen dem *Mandibularis externus* und dem *Maxillaris inferior trigem.* am Unterkiefer sind, im Masse wie sie unsere gegenwärtige Aufgabe angehen, schon oben berücksichtigt worden.

Nach STANNIUS sollen Zweige des *Mand. ext.* die hinteren oberen Teile des *Adduct. mand.* innervieren (N:o 28, S. 345). In keinem Falle habe ich solches beobachtet, wohl aber Gefässe, die den Nervenästen zur Verwechselung ähnlich sind und, anscheinend vom *Mand. ext.* ausgehend, sich im Adductor verzweigen. Indes behauptet VETTER (N:o 31, S. 496—497), Innervierung der zweiten Portion des Adductors durch einen Ast des *Mand. ext.* bei *Lucius* festgestellt zu haben; ob es sich hier um ein wirkliches Versorgen der Muskelelemente handelt, dürfte wohl vorläufig als unentschieden gelten.

### N. ad m. adduct. hyomand. et arcus palatini.

Verhältnismässig kräftig. Geht (s. oben) vom ventralen Schenkel der *Facialis*-wurzel oder direkt vom Ganglion ab; nach kurzem Verlauf auf der Oberseite des Adductors, worunter einige wenige, kurze Äste abgegeben werden, verschwindet der Nerv im hintersten Teil des Muskels (*raap*, Fig. K 7).

STANNIUS (N:o 28, S. 347; N:o 29, S. 56) will bei mehreren Knochenfischen, darunter auch *Gadus*, Innervierung dieses Muskels auch durch Zweige des *N. palatinus* gesehen haben. Es ist keinem der späteren Forscher gelungen, diese Angaben zu bestätigen, und in Bezug auf *Gadus* habe ich mittels Osmiumfärbung feststellen können, dass keine solche Innervierung existiert.

### Nervus opercularis facialis.

Der Nerv für den Heber des Kiemendeckels ist ausserordentlich fein und sehr lang. Wie schon erwähnt, geht er vom dorsalen Schenkel der *Facialis*-wurzel aus, (Fig. K 7) mitunter aber unmittelbar vom Ganglion, in welchem Falle er sich mehr oder weniger nach hinten, sogar an die Innenseite des Truncus, verlegen kann (Fig. K 6). Er nimmt seinen Verlauf nach hinten, anfangs unmittelbar am Schädel, sodann an den Aussenseiten der *Mm. levat. arcuum branchialium*; in dem Masse wie der Nerv sich seinem Bestimmungsort naht und besonders nach dem Eintritt in den Muskel, wo er fast sogleich anfängt, sich zu verästeln, nimmt er an Stärke zu. Es gelang mir nicht, diesem Nerven bis in den *Adductor operculi* zu folgen.

### Nervus hyoideus.

Dieser bedeutende Nerv ist bei *Gadus* wie bei den übrigen untersuchten Teleostiern bis jetzt nur hinsichtlich der gröberen Züge beschrieben worden.

Der Hauptstamm geht an der Innenseite der Kiemenhaut zwischen den Radien und den *Mm. abduct. proximi* nach unten und vorwärts (Fig. 5). Wie STANNIUS erwähnt (N:o 28, S. 346), tritt er zwischen den 2- und 3-vordersten Radien auf die Aussenseite, ein Verhältnis, das jedoch nicht völlig konstant ist; ich habe ihn auch zwischen dem vordersten und dem zweitvordersten Radien durchtreten sehen. An die Aussenseite der Kiemenhaut gelangt, giebt der Nerv zunächst einen feinen Ast ab, der, dem unteren Rand des *Ceratohyale* folgend, sich nach Abgabe ein paar Zweige für die Oberfläche des *M. protractor hyoidei* an den Hinterrand des vordersten Radius legt (Fig. 6). Sodann biegt sich der Hauptnerv (*rphf*) auf die mediane Fläche des Protractors, unterwegs einige feine, kurze Ästchen für die Oberfläche desselben aussendend, taucht aber sehr bald in seine Masse hinein und setzt dort seinen weiteren Lauf fort, bis er in der Nähe des Verwachsungspunktes beider Muskelbäuche makroskopisch nicht mehr zu spüren ist. Etwa an der Mitte des

Protractors anastomosiert er mehrfach mit dem von vorn kommenden *N. ad m. protract. hyoid. trigemini*; zuvor hat er im Muskel lateral gerichtete Äste für denselben abgegeben. Dass diese Äste motorische, dem *N. hyoideus facialis* entstam-

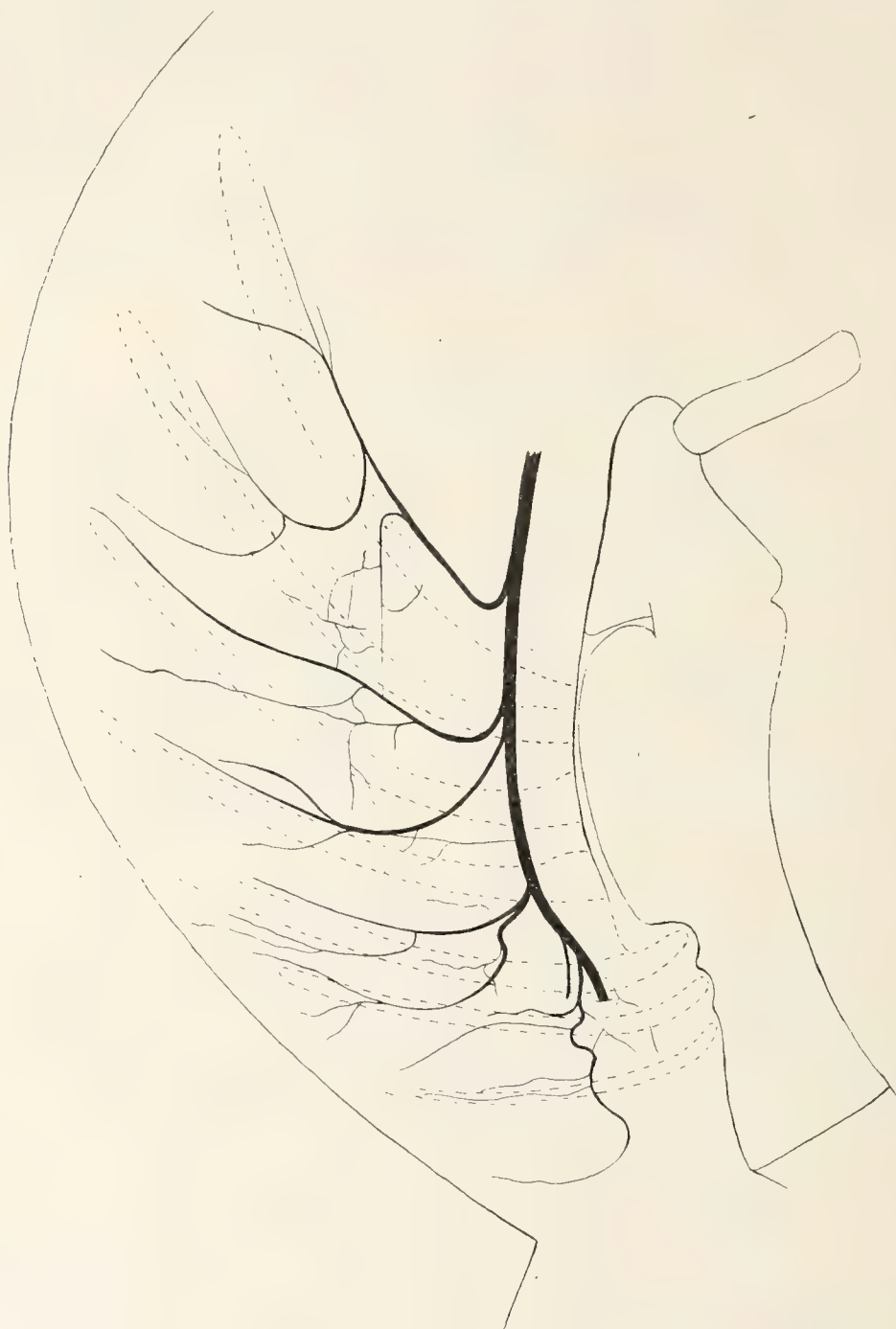


Fig. L.

Größere Verästelungen des *N. hyoideus*. Innenseite, links.

mende Nerven sind, dürfte wohl unzweifelhaft sein; inwiefern sie auch *Trigeminus*-fibrillen enthalten, will ich dahingestellt sein lassen.

*Gadus* scheint somit eine doppelte Innervierung des Zungenvorziehers zu besitzen, was auch der allgemeinen Ansicht von diesem Muskel bei den Teleostiern



entspricht; bei *Esox* ist die Innervierung der oberen Hälfte des Protractors durch den *N. hyoideus facialis* schon längst von VETTER nachgewiesen worden (N:o 31, S. 515). HERRICK wiederum behauptet bei *Menidia* die Innervierung des »*Geniohyoideus*» durch den *Trigeminus* allein festgestellt zu haben; da er aber daraus schliesst, dass der Muskel in ähnlicher Weise bei *allen* Teleostiern versorgt wird (N:o 14, S. 167), überschreitet er offenbar das Ziel. RUGE spricht verschiedene Meinungen über den »*Geniohyoideus*» und zwar merkwürdigerweise in einer und derselben Publikation aus; einmal teilt er diesen Muskel dem Gebiet der vordersten Spinalnerven zu (N:o 26, S. 210), später (S. 283) leitet er ihn aber vom  $C_2mv$ , der

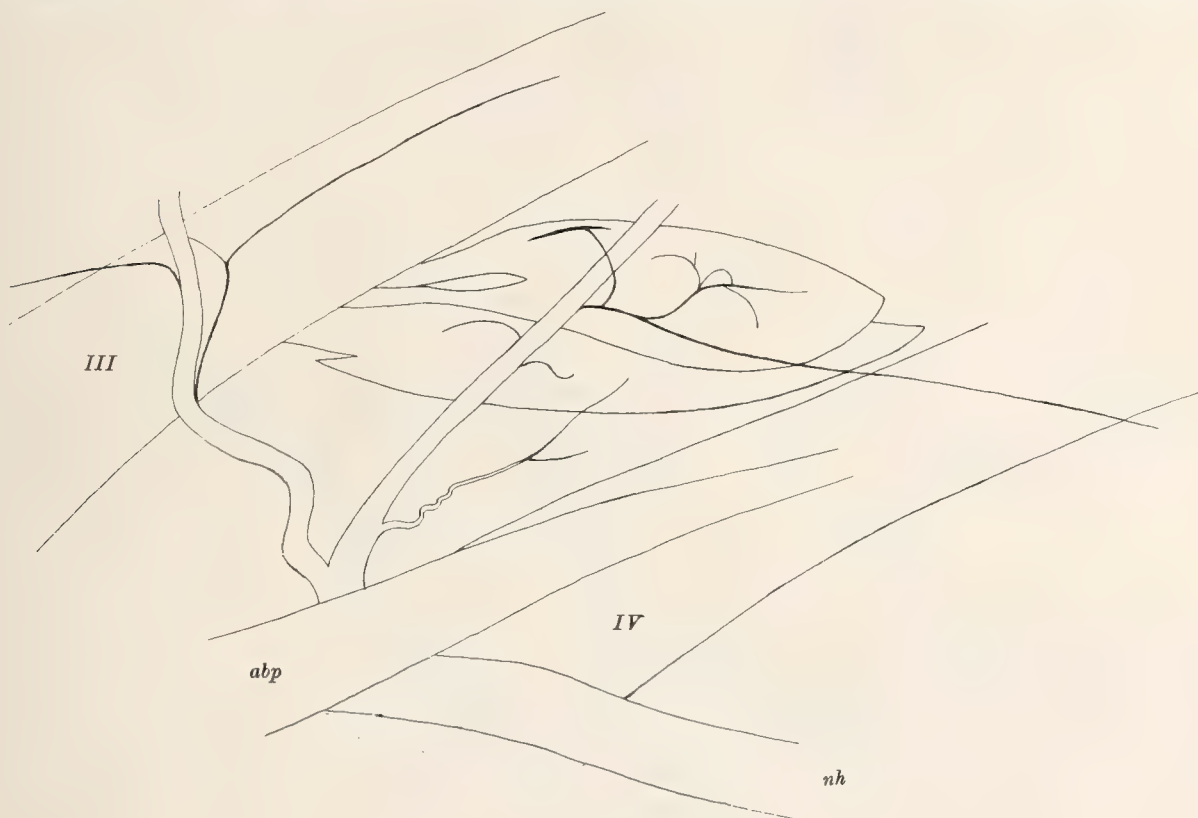


Fig. M.

Innervierung zweier Bündel des *M. hyoiohyoideus superior*. Innenseite, an den 3- und 4-vordersten Radien (III, IV). *nh* — *N. hyoideus*, *abp* — ein *M. abduct. prox.* 30-fache Vergrößerung.

»Äste vom »*Trigeminus* und vom »*Facialis*» empfängt, ab. Auf diesen Widerspruch ist übrigens schon von ALLIS hingewiesen worden (N:o 2, S. 265). In einem späteren Abschnitt werden wir auf die hergehörigen morphologischen Fragen etwas näher eingehen.

Die für die *Membrana branchiost.* bestimmten Zweige (Figg. 5, L) laufen anfangs mit dem Hauptnerven zwischen den Radien und den *Mm. abduct. prox.*, biegen sich sodann nach hinten um und folgen nachher so ziemlich der Richtung der Radien. Meistens (Fig. L) legen sie sich den Dorsalrändern der Radien an, überqueren aber zuweilen einen Radius um sich am nächstvorderen zu legen; sie teilen sich gabelig und erscheinen hier und da schon bei schwächer Vergrößerung durch Anastomosen verbunden. Ihre Zahl fällt oft mit derjenigen der Radien zusammen, ist übrigens

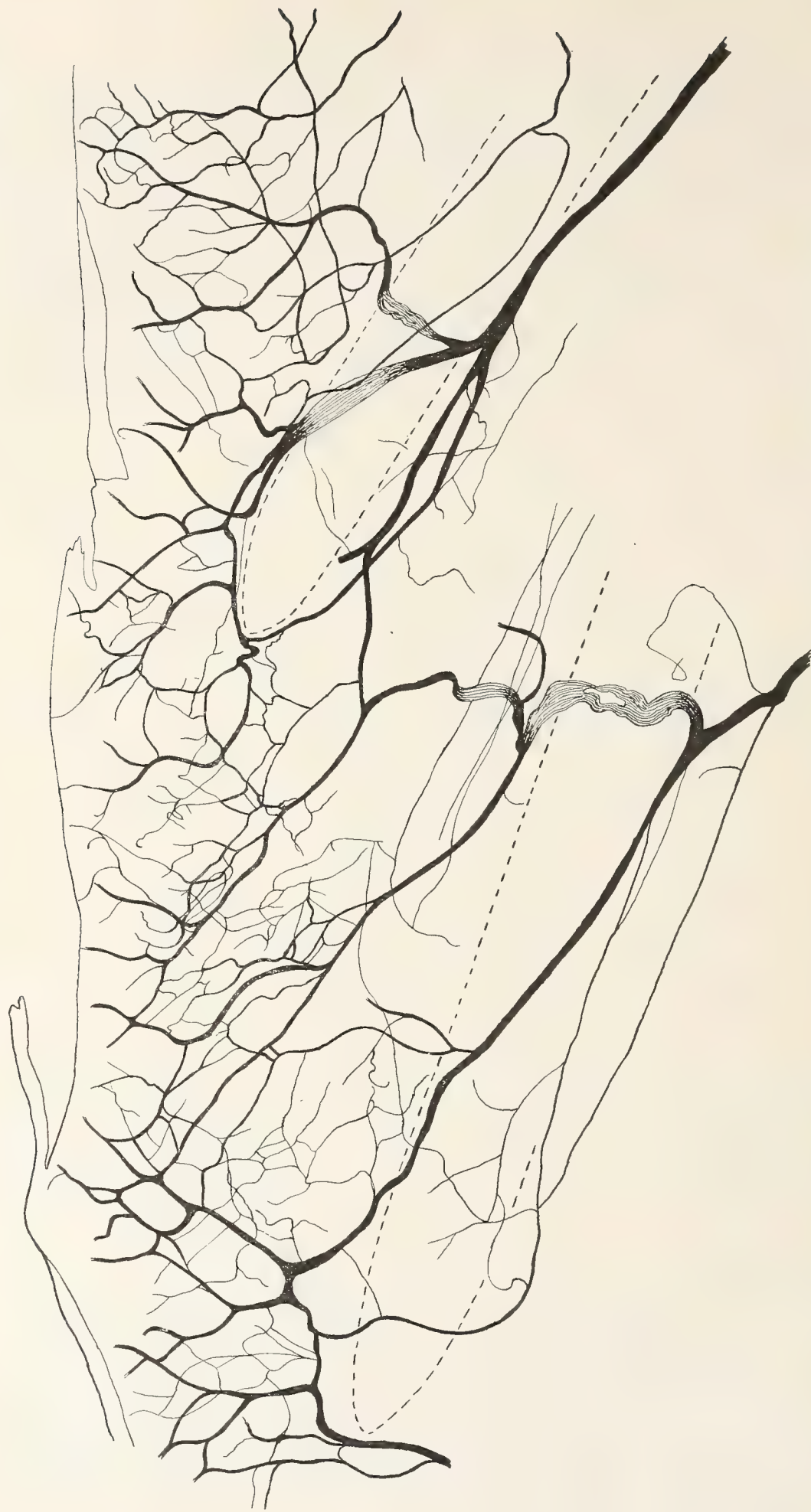


Fig. N.

Sensorischer Plexus des *N. hyoideus* an der Aussenseite der Kiemenhautbräm (am 2- und 3-hintersten Rad.), links.  
 Obj. 2 und Zeichenokular, Leitz.

ebenso wie die Zahl und das Verhalten der Nebenzweige recht grossen Schwankungen unterworfen. Der vorderste Zweig wird in der Nähe des Punktes, wo sich der Hauptnerv auf die Aussenseite biegt, abgegeben und überquert die Innenseite der zwei bis drei vordersten Radien unter gewundenem Verlauf und unter Abgabe feinerer Äste, die jene Radien begleiten, wonach der fragliche Zweig sich endlich auf der Innenseite des *Hyohyoideus inferior*, den er versorgt, ausbreitet (Fig. L).

Die radiale oder interradiale Hauptzweige befinden sich auf der Innenseite der *Hyohyoid*-muskeln, geben jedoch für beide Seiten der Kiemenhaut Äste ab. Diese zeigen sich überall durch feine Anastomosen vereinigt; das so gebildete Nervennetz ist verhältnismässig dünn und versorgt sowohl Muskulatur als Haut. Die *Hyohyoid*-muskeln empfangen die Nervenäste, wie es mir schien, nur von innen aus; die Figur M veranschaulicht die Innervierung zweier Muskelchen.

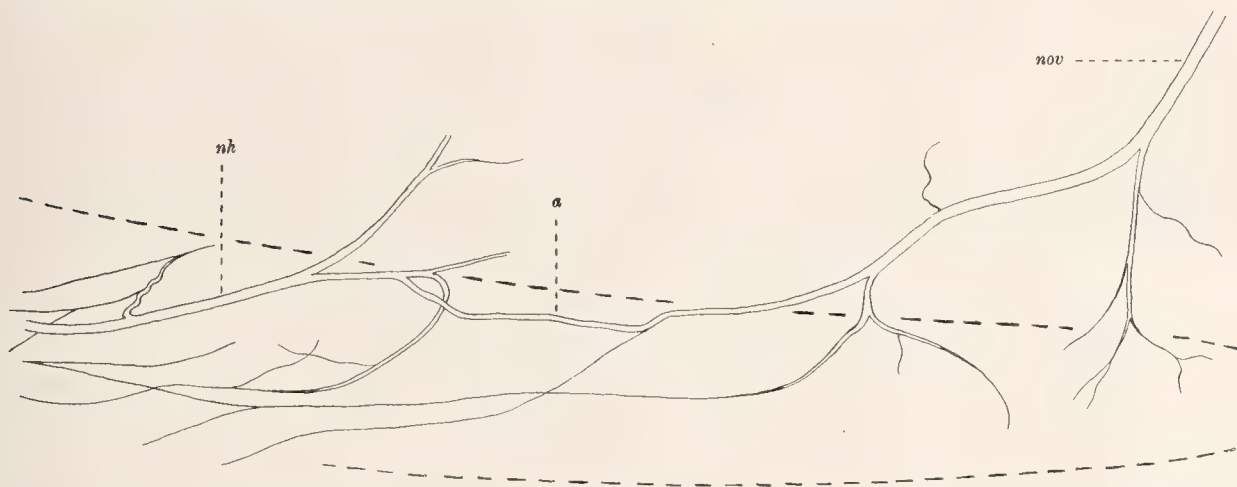


Fig. O.

Anastomose (a) zwischen Ästen des N. opercularis vagi (nov) und des N. hyoideus facialis (nh) im hintersten Radius. Von aussen. Obj. 1 und Zeichenokular, LEITZ.

In der Nähe der Strahlenenden angelangt durchsetzen die Hauptzweige die Kiemenhaut und treten auf die Aussenseite derselben hervor. Hier bilden sie sehr oft Schlingen, welche die Enden der Radien einfassen (Fig. N), und lösen sich übrigens in der Kiemenhautbräme in ein sehr dichtes, sensorisches Netz auf. Dies besteht aus teils sehr feinen, teils gröberen Fäden; die letzteren sind bänderartig. Diese Äste bis zu ihrem Endziel zu verfolgen fällt ausserhalb des Rahmens unserer Aufgabe.

Dass der *N. hyoideus* nicht nur motorische sondern auch sensible Elemente enthält, wusste schon STANNIUS; vom Vorhandensein eines reich entwickelten sensorischen Plexus der Kiemenhautbräme ist bis jetzt nichts bekannt gemacht worden.

An der Aussenseite des hintersten Radius habe ich Anastomosenbildung zwischen Ästen des *N. hyoideus fac.* und solchen des *N. opercularis vagi* beobachtet (Fig. O).

Die Behauptung FRIANT'S (N:o 10, S. 74), dass der *N. hyoideus* vom Vorderrand seiner „portion sous-operculaire“ einen Ast abgibt, „qui se porte en bas et en avant pour venir s'anastomoser avec le nerve mandibulaire“, habe ich bei *G. callarias* nicht bestätigt gefunden.





## II

# ZUR VERGLEICHENDEN MORPHOLOGIE DER MM. INTERMANDIBULARIS, PROTRACTOR HYOIDEI UND HYOHYOIDEUS

---





Die gegenseitigen Beziehungen der *Mm. protractor hyoidei* und *intermandibularis* bieten recht wechselnde Bilder dar; bei gewissen Formen befindet sich die Unterkieferinsertion des Protractors ventral vom *Intermandibularis*, bei anderen dorsal von diesem Muskel, und es fehlt endlich nicht an solchen, deren Protractor beide Insertionen zugleich vorzeigen kann. Über die Homologien aller dieser Bildungen scheinen die Autoren nicht im reinen gewesen; in der sehr spärlichen, hierauf bezüglichen Litteratur spricht man überall vom »*Intermandibularis*» und vom »*Geniohyoideus*» (= Protractor hyoidei) ohne anzudeuten, dass unter den erwähnten, tatsächlichen Voraussetzungen entweder der eine oder der andere jener anatomischen Begriffe morphologisch ungleichwertige Dinge einschliessen möchte.

Beide Muskeln sind Abkömmlinge der Mandibular- und Hyoid-portionen des s. g. *Constrictor ventralis*, der ursprünglich eine einfache Schicht dargestellt haben muss und zusammen mit dem dorsalen Constrictor die Einschnürung des Bogen-systemes bei Expiration oder Schlucken bewirkte. Die Entstehung des *Protractor hyoidei* ist, wie ich früher darzulegen gesucht habe, auf die Zungenbeininsertion des primitiven Constrictors zurückzuführen (N:o 16, Ss. 11, 22—23); bei den Selachiern finden wir schon diese Insertion durch eine mehr oder minder weitgehende Abspaltung eines tiefen, flachen, mit dem Constrictor median und hinten zusammenhängenden Bauches (*Zb*, Fig. I) markiert. Selbstverständlich wird diese Veränderung von einer entsprechenden Spezialisierung der Funktion begleitet, obschon der *Gesamt*-charakter der Bewegung durch die stattgefundene Arbeitsteilung nichts eingebüsst hat. Da der *M. protractor hyoidei* seine Aufgabe ebenfalls in der expiratorischen Bewegung des Zungenbeinbogens findet, da ferner sein an diesem Bogen inserierender Hinterteil, wie uns die Ontogenie der *Amia* lehrt (N:o 1, S. 700), den ältesten Teil des Muskels darstellt, und da schliesslich dieser Hinterteil in der Regel bezüglich der Innervierung (durch den *N. hyoideus facialis*) und immer bezüglich der Lagebeziehungen mit dem Zungenbeinbauch des Selachierconstrictors übereinstimmt (HOLMQVIST l. c.), müssen wir für beide Bildungen morphologische Gleichwertigkeit beanspruchen. Die Annahme VETTER's (N:o 31, S. 535) — der ALLIS (N:o 1, S. 586) zu folgen scheint —, dass der Muskel sich aus der *oberflächlichen* Schicht und zwar zuerst aus deren Vorderteil herausbildete, entbehrt jeden natürlichen Ausgangspunkt; die Zungenbeininsertion des Protractors ist eine ursprüngliche, nicht wie VETTER

meint eine sekundäre Erscheinung. In der Tat ist dieser Muskel vergleichend-anatomisch von den Teleostiern über die Ganoiden bis zu dem Zungenbeinbauch des Selachierconstrictors in sogut wie ununterbrochener Reihe zurück zu verfolgen.

Mit der Ausbildung eines harten, die Kiemenregion seitlich begrenzenden Opercularapparates wurde die schon früh eingeleitete Auflösung der oberflächlichen Ringmuskulatur vollends durchgeführt. Von dem Selachierbefunde erhält sich nur

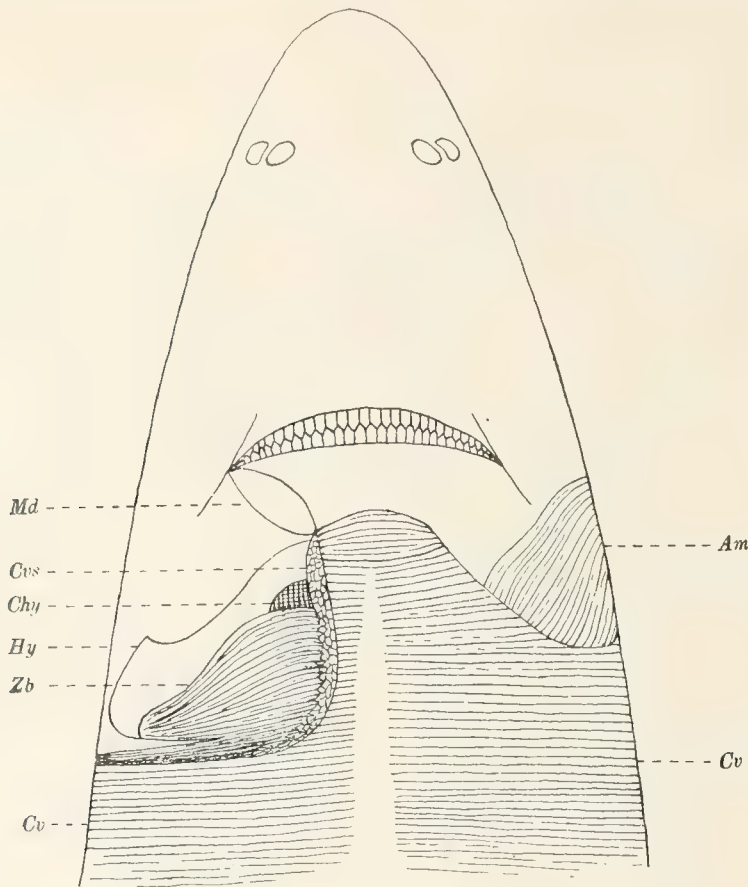


Fig. I.

*Squalus acanthias*. Cv — Constrictor ventralis, Cvs — oberflächliche Schicht des Constrictors, Zb — tiefe Schicht oder Zungenbeinbauch desselben, Chy — M. coraco-hyoideus, Am — M. adductor mandibulae, Md — Unterkiefer, Hy — Zungenbeinbogen. Die oberflächliche Constrictorschicht ist links ausgeschnitten worden, um den Zungenbeinbauch zu zeigen.

der Zungenbeinbauch lebenskräftig, weil die Verhältnisse, welche an seiner Entstehung bei den Selachiern geknüpft worden sind, sich bei den Teleostiern mit der mit jenen und anderen knöchernen Neubilden in ursächlichen Beziehungen stehenden, modifizierten Bewegungs- und Bauart des Bogensystemes in höchstem Grade potenzierten; er setzt einfach auf dem schon betretenen Weg fort und bildet sich mit seiner erweiterten oder neuen Aufgabe zum *M. protractor hyoidei* aus. Als vergleichende Erinnerung an die ältesten Zustände bleibt meistens ein rudimentärer *M. Intermandibularis* zurück.

Auf der anderen Seite wird es uns nicht überraschen, wenn da, wo der Kiemenkorb ausserhalb des Bereiches des Opercularapparates liegt, die Constrictormuskulatur wieder auftritt; ist ja der Ringmuskel

die einfachste und zugleich zweckmässigste Einrichtung für die Volumenverminderung eines weichwändigen Hohlraumes. Ein derartiger, sekundär entstandener Constrictor als mächtiger Expirationsmuskel findet sich auch tatsächlich und zwar bei den Anguilluliden; wir kommen im folgenden hierauf zurück.

Betreffs der morphologischen Stellung der *Hyohyoid-muskeln* enthält die Litteratur ebenfalls sehr wenig. VETTER (N:o 31, S. 536—537) leitete den *Hyohyoideus inferior* und ihn allein von der Zungenbeininsertion des ventralen Constrictors ab; der *Hyohyoideus superior* vertritt den nicht in zwei Schichten zerfallenen oberen Abschnitt



von  $Csv_2$  der Selachier, den lateralen, die Kiemendeckelmembran auskleidenden Teil von  $Cs_1$  bei *Chimæra*, und ist homodynam dem Interbranchialis der Kiemebogen». Diesen Meinungen schliesst sich auch ALLIS an (l. c.). In meiner früheren Schrift (S. 12) habe ich unter Hinweisung auf die Verhältnisse bei *Chimæra* die geläufige Anschauung gewissermassen in Frage gestellt; wir kommen später auf das Thema zurück. Die äussere Gestaltung der Hyohyoidmuskeln ist schon (VON BORCEA, N:o 5, S. 204—225) bei einer Anzahl Teleostier beschrieben worden; ich werde sie daher nur ausnahmsweise berücksichtigen. —

Dem nachstehenden liegt eine recht viele und verschiedenartige Familien betreffende Untersuchung zu Grunde. Es war dabei nicht meine Absicht, eine grössere Zahl in jeder Hinsicht erschöpfender Einzelbeschreibungen vorzubringen; von dem gewonnenen Material habe ich nur so viel mitgenommen, als mir nötig schien, um die aufgestellten Sätze zu belegen.

Eine interessante Etappe in der Entwicklungsgeschichte des ventralen Constrictors I + II hat uns *Lepidosteus* überliefert (HOLMQVIST, N:o 16, S. 12—13). Der Unterschied vom Selachierbefunde liegt — von den Hyohyoidmuskeln abgesehen — hauptsächlich darin, dass der Zungenbeinbauch des Constrictors eine rostro-candale Richtung angenommen und dem medianen Sehnenstreifen folgend sich vorwärts ausgebreitet hat; ausserdem zeigt die oberflächliche Constrictorschicht eine Reduktion ihres hinteren Teiles. Für die nähere Beschreibung dürfte ich auf die eben zitierte Schrift, der auch die hier mitgeteilte Figur (II) entliehen worden ist, verweisen.

Genau dieselben primitiven Verhältnisse habe ich unter den Knochenfischen bei *Megalops* (Fam. *Elopidæ*) gefunden, nur hat sich hier der *M. hyohyoideus* vom Zungenbeinbauch scharf abgetrennt. Die oberflächliche Constrictorschicht (der primäre *M. intermandibularis*) erscheint in Anpassung an den Kieferbau viel kürzer und dicker als bei *Lepidosteus*, zeigt übrigens dieselbe Eigentümlichkeiten des Faserverlaufes (vorn transversell, nach hinten allmählich

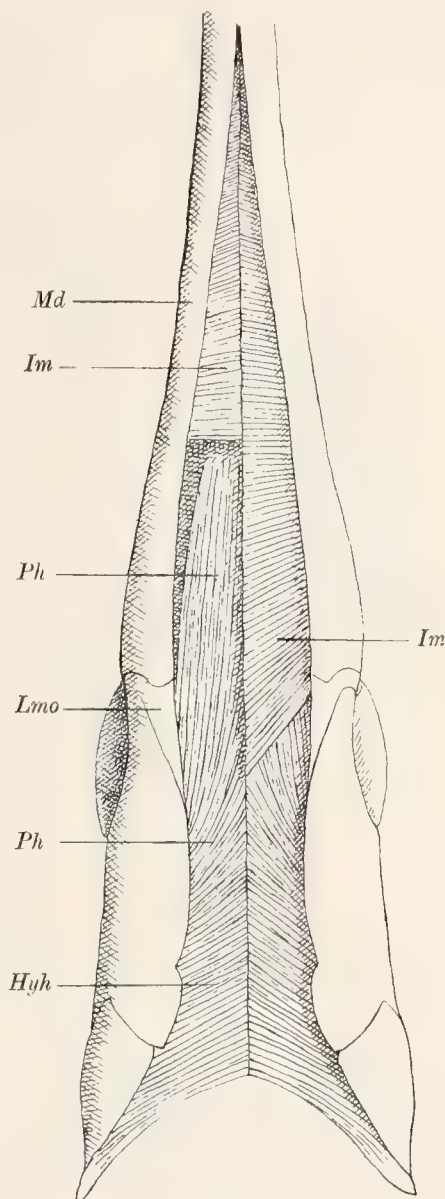


Fig. II.

*Lepidosteus osseus*. Im — oberflächliche Constrictorschicht oder primärer M. intermandibularis, Ph — Zungenbeinbauch des Constrictors, Hyh — Hyohyoidmuskel, noch nicht getrennt vom Zungenbeinbauch, Md — Unterkiefer,

Lmo — Ligam. mandibulo-operculare; der Intermandibularis ist links ausgeschnitten worden, um den Zungenbeinbauch (unvollständiger M. protractor hyoidei) sichtbar zu machen.



schräg) sowie eine mediane, von hinten sich vorwärts ziehende und allmählich schliessende vertikale Spalte. Das Vorderende des unvollständigen *M. protractor hyoidei* hört rein muskulös und zwar mit einem bis einigen isolierten Klümpchen an der Unterseite der Mundschleimhaut unweit der Unterkiefersymphyse auf. Der Muskel ist platt und gleichförmig breit; er deckt die ganze Breite des *Ceratohyale* und inseriert muskulös quer über der Aussenseite des letzteren weit nach hinten, gegenüber dem 15—16-vordersten Strahl. Die Hyohyoidmuskeln sind kräftig; die beiden *Hyohy. inf.* kreuzen sich.

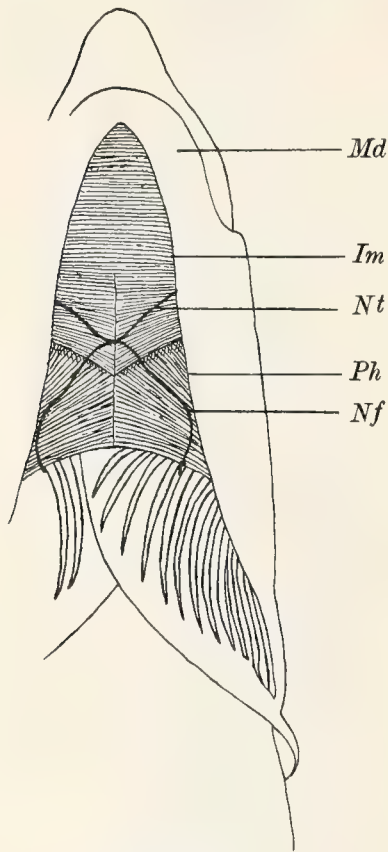


Fig. III.

*Albula conorhynchus*. *Nt* — Ast des *N. trigeminus* (*N. »mylohyoideus«*), *Nf* — Ast des *N. hyoideus facialis*, *Ph* — *M. protractor hyoidei*. Die Schenkel des Unterkiefers und des Zungenbeins sind hier wie bei den folgenden mehr oder weniger (besonders stark bei *Osteoglossum*) auseinandergespreizt worden, um die da zwischen liegenden Teile besser sichtbar zu machen.

Bei *Albula* (Fig. III) hat der sehr kräftige und grösstenteils noch constrictorartige Zungenbeinbauch (*Ph*) sein Vorderende bis an die Unterkiefersymphyse hervorgeschoben; der Zustand stimmt sonst mit dem vorgenannten wesentlich überein. Die Mandibularinsertion des Zungenbeinbauches geschieht mittels breiter, platter Sehne, und wenn wir diese Insertion als ein Kriterium des *M. protractor hyoidei* ansehen, können wir somit bei dieser Gattung von einem besonderen *Zungenbeinvorzieher* sprechen. Beide Bäuche hängen in der Medianlinie sowohl unter einander als auch mit dem weit nach hinten reichenden, primären *M. intermandibularis* (*Im*) überall zusammen, und der letztere Muskel weist in seiner hinteren Hälfte einen medianen Sehnenstreifen auf. Die *Mm. hyohyoid. inf.* kreuzen sich vor ihrer Befestigung am Zungenbeinwinkel, den sie ganz ausfüllen; sie werden hier vom Hinterteil des *M. protractor hyoidei*, der sich nach hinten über die vordersten Radien ausbreitet, bedeckt. Der *Hyohyoid. superior* erstreckt sich wie eine fast zusammenhängende Schicht konzentrischer Bänder quer über die Innenseiten der zahlreichen Radien; in dem breiten Kiemenhautsaum ist er fast bis an den Rand zu spüren.

Der Hauptstamm des *N. hyoideus facialis* (*Nf*) tritt zwischen den 5- und 4-vordersten Radien auf die Aussenseite der Kiemenhaut und geht sogleich auf den *Protractor hyoidei* über, anfangs sich schräg nach aussen und vorwärts richtend, biegt sich aber bald unter schräg

nach innen und vorwärts gehendem Verlauf gegen die Medianlinie um, begiebt sich sodann auf den *Intermandibularis* hinüber und verbindet sich etwa an der Grenze zwischen dem hintersten und dem nächsthintersten Achtel dieses Muskels teils mit dem *N. mylohyoideus* (*Nt*), teils mit dem *N. hyoideus* der entgegengesetzten Seite. Der *N. mylohyoideus* verlässt den Unterkiefer weit nach hinten und richtet sich unter

fast geradem Verlauf schräg nach hinten und gegen die Medianlinie zu, bis er an dieser mit dem *N. hyoideus* in spitzem Winkel zusammenstösst.

*Gymnarchus* (Figg. IV und V) bietet prinzipiell dieselben Erscheinungen wie *Albula* dar; der *Intermandibularis* (Fig. IV) besitzt aber eine ungemein grosse Flächenausdehnung, und die Hyohyoidmuskeln sind fast völlig eingegangen.

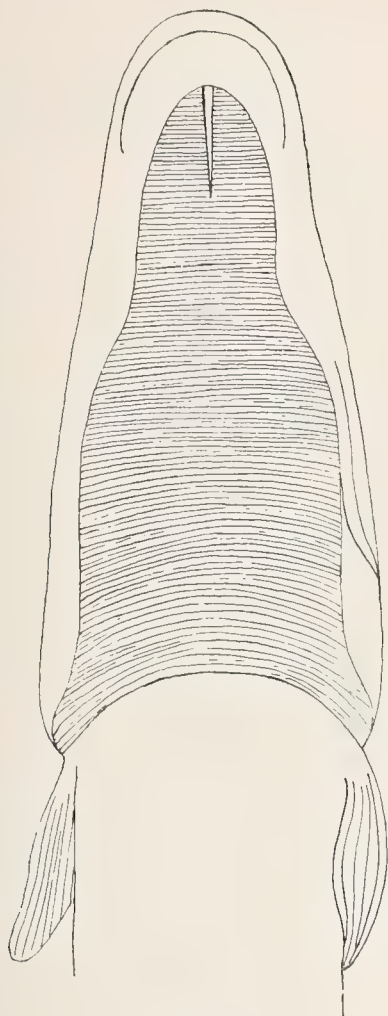


Fig. IV.

*Gymnarchus niloticus*. Ventralansicht des Kopfes nach Entfernung der Haut.

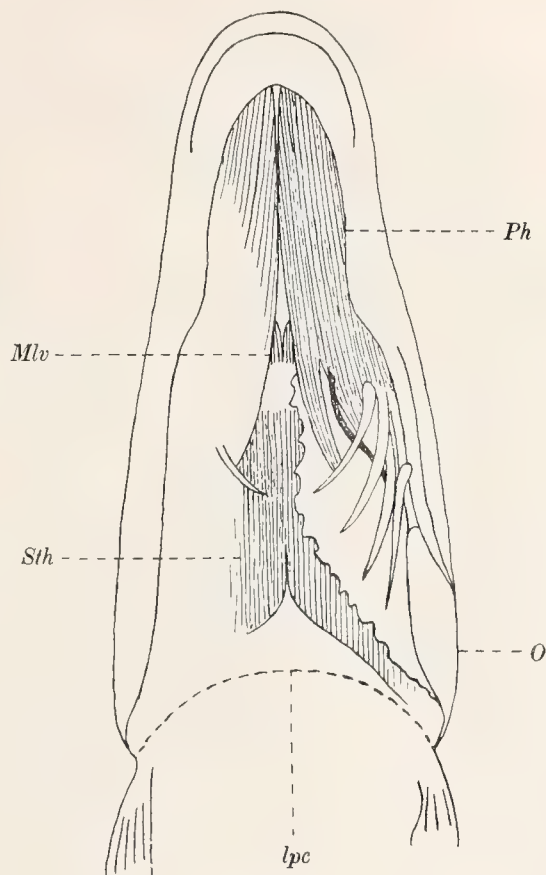


Fig. V.

*Gymnarchus niloticus*. Der Intermandibularis ist weggenommen; *lpc* — hintere Grenzlinie (punktiert) desselben. *Sth* — M. sternohyoideus, *MLv* — rudimentärer Rest der vor dem vorigen Muskel einst befindlichen ventralen Längsmuskulatur, *Ph* — M. protractor hyoidei, *O* — Operculum.

Nach Wegnahme der ventralen Kopfhaut — eine Manipulation, die mit grösster Vorsicht ausgeführt werden muss — bietet sich ein Anblick dar, der den Selachierconstrictor in lebhafte Erinnerung bringt: vom Unterkiefersymphyse bis an die Brustflossen füllt ein gleichmässiger, nur ganz nach vorn durch einen kurzen, medianen Sehnenstreifen abgebrochener Quermuskel den Raum zwischen den Unterkieferschenkeln resp. den Opercularapparaten völlig aus. Die hintere Grenze des Muskels liegt am Eingange der zwischen den Brustflossen sich erstreckenden aber ziemlich seichten, horizontalen Querspalte, die zu den kleinen, am Hinterrande des



Operculum befindlichen Kiemenöffnungen führt. Wie ist dieser *Intermandibularis* zu deuten? Anfänglich war ich geneigt, seine ungewöhnliche Ausdehnung nach hinten als eine in den Verhältnissen dieser Gattung unmittelbar gegründete, durch *Zuwachs* einer schon längst reduzierten, oberflächlichen Constrictorschicht hervorgerufene Erscheinung aufzufassen. Die vier Kiemenhautstrahlen sind dem Zungenbeinbogen unbeweglich angesetzt worden, und die Muskulatur der Kiemenhaut selbst ist bis auf einige mikroskopisch kleine, zerstreute Inselchen verkümmert; dem Branchiostegalapparat geht somit jede respiratorische Bedeutung ab, und der Mangel wäre durch die eigentümliche Beschaffenheit des der Kiemenhaut aussen anliegenden *Intermandibularis* kompensiert worden. Beim näheren Nachdenken ist aber diese Meinung nicht aufrecht zu halten. Denn erstens ist der Kiemenkorb hier sehr weit ausserhalb des Bereiches des Branchiostegalapparates entfernt worden, während der Raum nach innen von diesem durch den mächtig entfalteten M. »*sternohyoideus*» ganz ausgefüllt wird; und zweitens ist dieser *Intermandibularis* so dünn und schwach, dass seine Kontraktionen praktisch genommen weder einen Druck auf die nach oben nächstliegenden, massigen Teile auszuüben, noch bei der Adduction der Suspensorien und Kiemendeckel mitzuwirken vermögen. Irgendwelche Aufgabe des Muskels ist in der Tat nur denkbar hinsichtlich seines Hinterrandes, der vielleicht als ein Zuschliesser der Kiemenspalten fungieren dürfte. Es bleibt uns somit nichts anders übrig als in dem *Intermandibularis* dieses Teleostiers entweder einen ventralen Selachierconstrictor, der zwar in degeneriertem Zustand aber in etwa ursprünglicher Ausdehnung noch fortlebt, oder auch eine *Erinnerung* an irgend eine ähnliche aber *sekundäre*, einst durch Anpassung entstandene Einrichtung zu sehen. Ich habe leider keine Gelegenheit gehabt, echte *Mormyriden* zu untersuchen.

Der *M. protractor hyoidei* (Ph, Fig. V) ist sehr kräftig, jedoch abgeplattet, seine Insertionen sind durchaus fleischig. Die Hyoidinsertion dehnt sich sehr weit längs dem vordersten Radius aus und wird hier teilweise durch einen besonderen, medianwärts gelegenen Bauch zustande gebracht. Beide Protractoren hängen vorn mit dem Sehnenstreifen des *Intermandibularis* zusammen, und der Raum zwischen jenen sowie zwischen den beiden untersten Radien wird durch die membranartige, durchsichtige Kiemenhaut ausgefüllt; diese setzt hinter den Enden der Radien fort und bildet eine die Schenkeln des Hyoidbogens verbindende, ununterbrochene Schicht, die nach hinten bis an den Rand des *Intermandibularis* reicht, wo sie mit diesem Muskel verwächst. Die Kiemenhaut ist überall (selbstverständlich mit Ausnahme der oben erwähnten Querspalte) der Körperwand mittels lockeren Bindegewebes angehaftet worden.

Der *N. hyoideus fac.* (Fig. V) läuft auf den Innenseiten sämtlicher Radien und ist noch beim Eintritt in den Protractor (im Winkel zwischen diesem und dem kleinen abgespalteten Insertionsbauch) ungewöhnlich kräftig. Den *N. »mylohyoideus»* konnte ich trotz fleissigem Suchen nicht auffinden, was freilich die Möglichkeit, dass er in winziger Gestalt existieren möchte, nicht ausschliesst. Dieses Verhalten der Nerven lässt jedenfalls — da dem *N. hyoideus* keine Aufgabe in Bezug auf die



Kiemenhaut zukommt — auf ein wenigstens sehr *überwiegendes* Versorgen des Protractors durch den *N. hyoideus* schliessen; man fragt sich übrigens, was ein so auffallend starker Nerv sonst in dem Muskel zu thun habe. Vergl. oben unter *Gadus*, S. 41.

Der *M. sternohyoideus* ist, wie schon angedeutet wurde, sehr breit und ausserordentlich kräftig. Nach vorn von seiner Hyoidinsertion und getrennt von dieser befindet sich auf jeder Seite der Copula eine kleine Muskelpartie mit longitudinaler Faserrichtung (*Mlv*, Fig. V), die ich bei keinem anderen Teleostier gesehen habe; sie dürfte als ein Rest einer verschwundenen, vom Zungenbeinbogen bis an den Unterkiefer sich erstreckenden Abteilung der ventralen Längsmuskulatur (*M. branchio-mandibularis*?) anzusehen sein. —

Die ventrale Constrictor-muskulatur der jetzt besprochenen Fische erscheint im grossen und ganzen als eine blosser *Steigerung der schon bei den Selachiern veranschaulichten Zustände*; der Unterschied liegt hauptsächlich darin, dass bei jenen Formen die tiefe Schicht, der Zungenbeinbauch, zu grösserer Bedeutung und Selbständigkeit auf Kosten der oberflächlichen Schicht gelangte.

Wir befinden uns noch auf der ersten Stufe der Differenzierung des ventralen Constrictors I + II — *der Stufe der Horizontalspaltung*.

Mit *Amia* tritt ein neues Moment ein, das für die Verhältnisse bei der überwiegenden Mehrzahl der Teleostier massgebend wird.

Der *Intermandibularis* erscheint nämlich bei dieser Gattung durch eine vertikale Querspalte in zwei Teile zerlegt, von denen der vordere unter Beibehaltung seines transversellen Faserverlaufes die Verbindung mit dem Protractor aufgegeben hat,

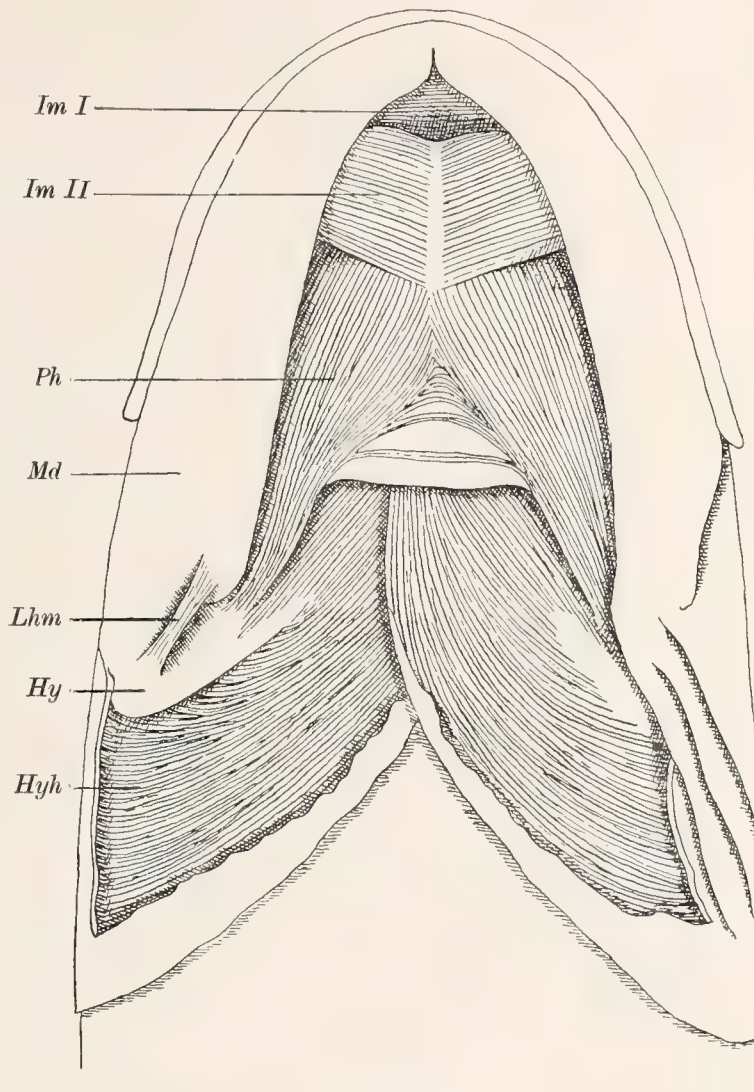


Fig. VI.

*Amia calva*. Nach *Allis*, verkleinert. *Im I* — unveränderter Vorderteil des primären M. intermandibularis, *Im II* — abgelöster, spezialisierter Hinterteil des letzteren Muskels; *Lhm* — Ligam. hyoideo-mandibulare; sonst wie in den vorigen Figuren.

während der Hinterteil, dessen Fasern von dem medianen Sehnenstreifen aus sich schräg nach vorn richten, mit dem Protractor in der Medianlinie zusammenhängt und übrigens seinen Vorderrand ventral vom eben erwähnten selbständigen Vorderteil des *Intermandibularis* ein wenig hervorschiebt. Der Vorderteil, den ich als *M. intermandibularis* I (*Im* I) bezeichne, befindet sich also zwischen der Unterkieferinsertion des Protractors und dem einerseits mit dem Unterkiefer, andererseits mit dem Protractor in Verbindung stehenden Hinterteil des ursprünglichen *Intermandibularis*.

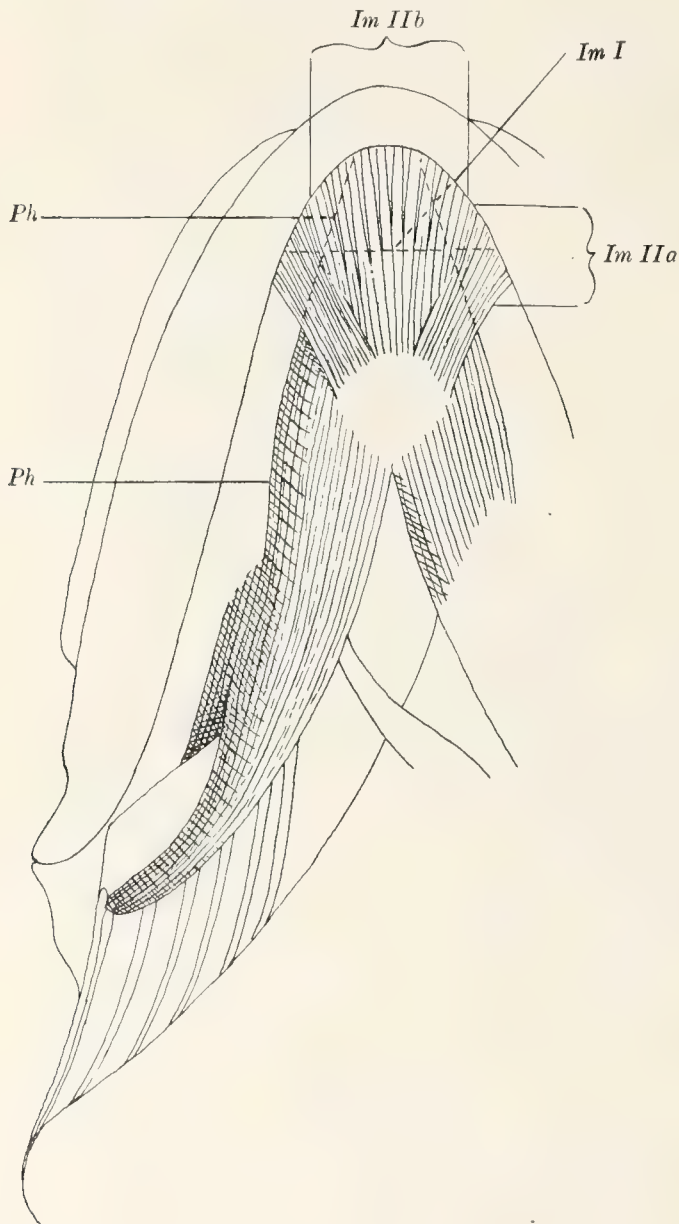


Fig. VII.

*Lucius (Esox) lucius*. *Im* I — hintere Grenzlinie (punktiert) des sekundären *M. intermandibularis*, *Im* IIa — muskulöser, *Im* IIb — überwiegend sehniger Teil des *M. Im* II.

Von den bei *Amia* obwaltenden Verhältnissen bis zu dem Befunde bei *Lucius* (*Esox* auctt.) ist kein grosser Schritt (Fig. VII). Der *Protractor hyoidei* zeigt hier wie dort eine breite, sehnige Mandibularinsertion dorsal vom *Im* I; der *M. Im* II stimmt in allem wesentlichen mit demselben Muskel bei *Amia* überein, hat jedoch eine etwas mehr rostro-caudale Richtung angenommen sowie seine Mand.-insertion

Für diesen Hinterteil hat ALLIS (N:o 1) den Namen »*Geniohyoideus inferior*» eingeführt; ich werde ihn im folgenden laut seiner Abstammung *M. intermandibularis* II (*Im* II) benennen (Fig. VI).

Sonderbar erscheint die Vermutung ALLIS', dass der unter dem Namen *Intermandibularis* bekannte Muskel (= mein *Im* I) aus seinem *Geniohyoideus inferior* (meinem *Im* II) hervorgesprossen wäre (N:o 1, S. 753). Ist doch der *M. Im* I bei *Amia* wie bei den Knochenfischen der älteste Teil der Constrictormuskulatur; er ist ein Rest des primitiven *Constrictor ventralis*, von sämtlichen, dem letzteren entstammenden Muskeln der einzige, der seine ursprüngliche Beschaffenheit nie und nirgends aufgibt.

Es ist nicht ohne Interesse, dass *Amia* in Bezug auf die uns hier beschäftigende Muskulatur eine weit höhere Differenzierung vorzeigt als die niedersten Teleostier.



bis an die Symphyse erweitert. Dieser Zuwachs (*Im II b*) erscheint in der Gestalt fächerförmig ausgebreiteter, mit Muskelbündeln spärlich vermischter Sehnenfasern und setzt sich vom hinteren, rein muskulösen Teil (*Im II a*) medianwärts deutlich ab. Ich muss hier bemerken, dass die Beschreibung VETTER's (N:o 31, S. 514) nicht minder als die begleitende Figur (10, Tafel XIII) in einem wichtigen Punkte fehlerhaft sind: die beiden mit »*Gh<sub>4</sub>*» bezeichneten Sehnen, die ventral vom »*Im*» so dargestellt worden sind, als ob sie vom *Protractor hyoidei* bis an den Unterkiefer gingen, existieren nicht. Der Irrtum beruht offenbar auf ein Zerreißen des sehnigen Vorderteiles des *Im II*, und die dabei gebliebenen Fetzen, die »Sehnen» *Gh<sub>4</sub>* VETTER's, hat der Verfasser dem »Geniohyoideus» statt des »*Gh<sub>3</sub>*» (mein *Im II*), wo sie entschieden zuhause sind und sein müssen, zuerteilt. —

Von etwa diesem Punkte ab gehen die Befunde in zwei verschiedene Richtungen auseinander. Die eine Linie ist als eine konsequente Entwicklung der schon beschriebenen Zustände anzusehen und wird dadurch gekennzeichnet, dass der *M. Im II*, an Grösse zunehmend, seine Längachse und seinen Faserverlauf immer mehr rostrocaudal einstellt und schliesslich als die unmittelbare Fortsetzung des dahinter befindlichen Teiles des *M. protractor hyoidei* erscheint; gleichzeitig bilden sich sowohl der nach vorn vom Berührungspunkte der beiden Muskeln gelegene Mandibularteil des Protractors als auch der *M. Im I* allmählich zurück. Das Endergebniss dieses Vorganges stellt einen sekundären, anscheinend homogenen Zungenbeinvorzieher dar, dessen Unterkieferinsertion sich ventral vom *Intermandibularis* befindet, wenn dieser überhaupt noch existiert.

In der anderen Serie nimmt der *M. Im II* zwar etwa dieselbe Lage wie beim vorigen Typus ein, tritt aber niemals in so innigen Beziehungen zum *M. protractor hyoidei*; er setzt sich vielmehr von diesem sehr deutlich ab, bisweilen sogar die ursprüngliche, schräge Richtung zeigend, und bleibt in der Regel von geringer Grösse. Der Mandibularteil des primären *M. protractor hyoidei* erhält sich, fleischig oder sehnig; ein mässig entwickelter *M. Im I* ist immer vorhanden. Bei diesem Typus, der im Vergleich mit dem anderen einen wenig differenzierten Standpunkt veranschaulicht, besitzt der Zungenbeinvorzieher meistens zwei Unterkieferinsertionen, eine dorsale und eine ventrale, die zwischen sich den *Intermandibularis* einfassen. Als extremes Erzeugniss finden wir indes auch hier einen Zustand, wo der Zungenbeinvorzieher nur eine einzige Unterkieferinsertion aufweist, diese aber liegt dorsal vom *Intermandibularis* und ist vom Schwund der sekundären, durch *Im II* zu stande gebrachten Mandibularverbindung des Protractors abhängig. Dieser Befund ist anscheinend dem ursprünglichen, z. B. bei *Albula* vorhandenen, indentisch, der *Intermandibularis* des ersteren entspricht aber nur dem Vorderteil des gleichnamigen Muskels bei *Albula*, und zwischen beiden Erscheinungen liegt ja eine ganze Reihe von Differenzierungen.

Einige Beispiele mögen das gesagte beleuchten.

Betrachten wir zunächst einen *Salmo* (Fig. VIII). Der *Im I* ist bei dieser Gattung wie bei *Lucius* recht ansehnlich; der mächtig entfaltete *Im II* weist nur in



seinem etwas sehnigen Vorderteil die für *Amia* charakteristische schräge Stellung auf, übrigens laufen seine Fasern in völlig rostro-caudaler Richtung. Beide Bäuche sind mit Ausnahme der seitwärts ausgebogenen Vorderenden unter einander verschmolzen und nach hinten vom *Im I* auch vom oberliegenden *Protractor hy.* nicht mehr zu scheiden; ihre hintere Grenze aber setzt sich vom *Protractor* noch deutlich ab. Der *M. Im II* hat ja nunmehr seinen Intermandibularis-charakter völlig aufgegeben; wenn ich trotzdem jene Bezeichnung fortwährend benutze, so geschieht dies einfach, um die morphologischen Beziehungen des Muskels festzuhalten. Die beiden *Mm. Protract. hyoid.* treten bald in der Medianlinie etwa rechtwinkelig zusammen und sind von da an bis zur Unterkiefersymphyse mit einander verwachsen; die Faserrichtung dieses langen, unpaarigen Stückes wird sehr bald eine

rostro-caudale, und die Mandibularinsertion findet mit breiter, flacher Sehne dorsal vom *Im I* statt.

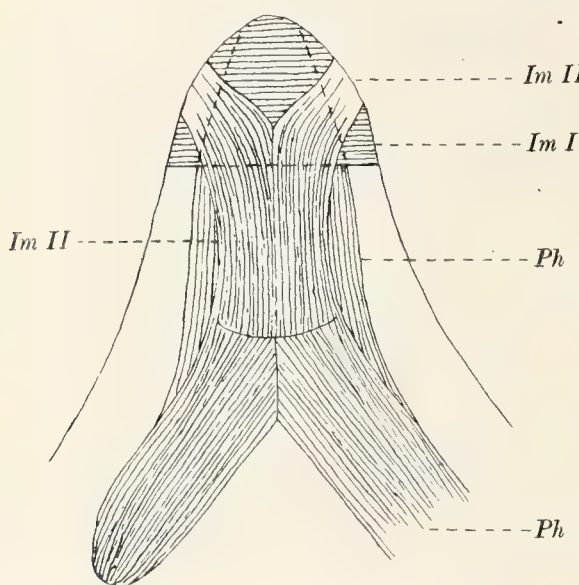


Fig. VIII.  
*Salmo salar.*

*Osteoglossum* (Fig. IX) reiht sich der vorigen Gattung an. Die beiden langen, flachen Bäuche des *M. Im II* sind untereinander verwachsen; an der Mandibularsymphyse treten sie jedoch ein wenig auseinander und lassen so den kleinen *Im I* herausblicken. Dieser Muskel dehnt sich nach hinten nur bis an die lateralen Grenzen der Unterkieferinsertionen des *M. Im II* aus. Ein medianer Sehnenstreifen trennt die *Im II*-bäuche in ihrer hinteren Hälfte; ihre Grenzen nach hinten (gegen den *M. protractor hyoidei* zu) sind nur an zwei Zwischensehnen erkenntlich, und die Fasern

des Muskels laufen genau in die Verlängerung der *Protractor*fasern. Dorsal ist der *M. Im II* mit dem *Protractor hyoidei* verwachsen, und nur eine seichte, vorn etwas tiefere, hinten sich allmählich verlierende horizontale Längenspalte giebt die laterale Grenze des *Im II* an.

Der *M. protractor hyoidei* ist gleichförmig dünn und sehr breit. Er inseriert quer über die ganze Breite des *Ceratohyale*, und die Insertion dehnt sich von da an nach hinten über die innere Hälfte des dritt-vordersten Radius aus; der Muskel deckt somit hier die Basalteile der zwei vordersten Radien. Der vorerwähnte mediane Sehnenstreifen bildet auch die Grenze zwischen beiden *Mm. protract. hyoid.*; im vorderen Drittel hört er jedoch völlig auf. An der Mandibularsymphyse trennen sich die mit einander verwachsenen Bäuche wieder, um einen kleinen dreieckigen Raum, der mit der Öffnung zwischen den *Im II*-bäuchen genau zusammenfällt, frei zu lassen. Die dorsal vom *Im I* befindliche Mandibularinsertion ist sehr breit aber

dünn; der Muskel löst sich hier in getrennte Bündel, denen sich schliesslich Sehnenfasern beimischen, auf.

Der *Hyohyoideus superior* ist recht schwach; der *Hyohyoid. inf.* erscheint anfangs nur als eine Fortsetzung des oberen Muskels, jedoch etwas kräftiger als dieser, verschmälert sich sodann, wird sehnig und inseriert am *Hypohyale* der anderen

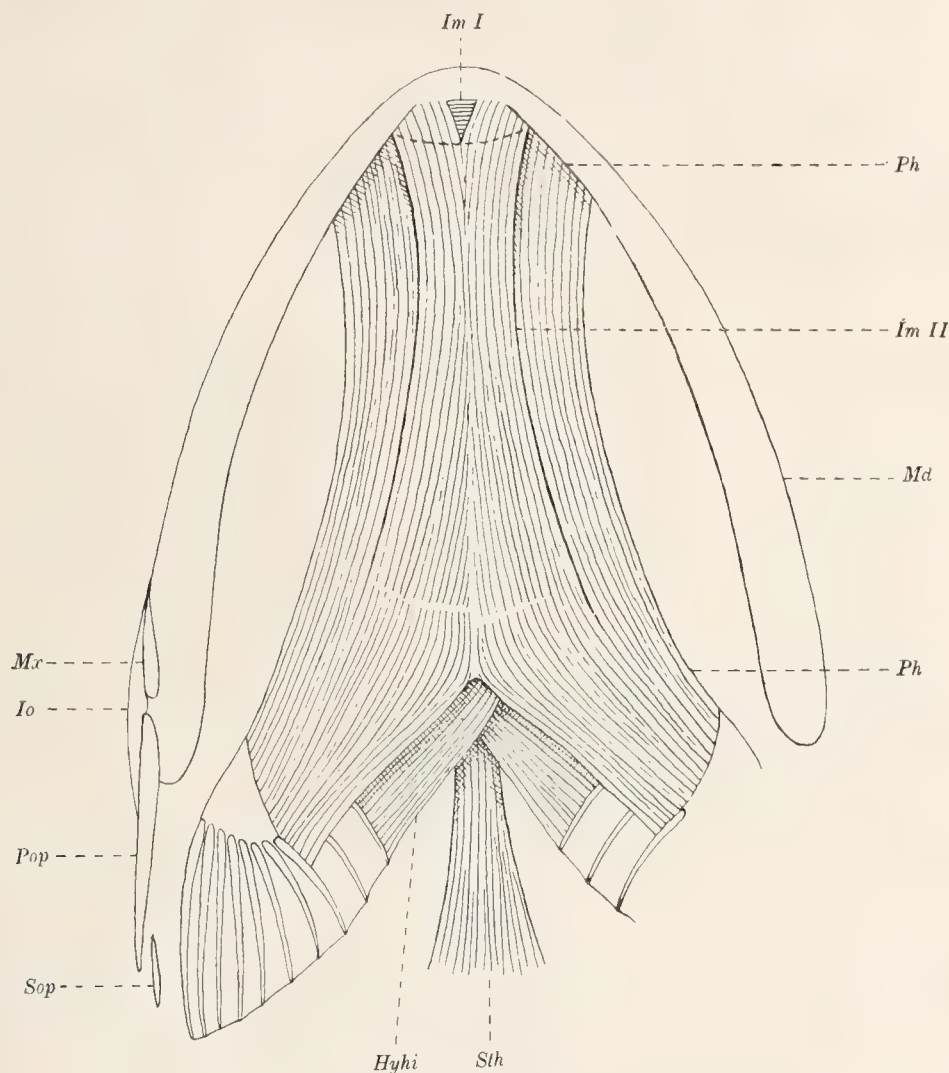


Fig. IX.

*Osteoglossum bicirrhosum*. *Mx* — distales Ende des Oberkiefers, *Io* — Infraorbitalknochen, *Pop* — Præoperculum, *Sop* — Suboperculum, *Hyhi* — M. hyohyoideus inferior; sonst wie in den vorigen Figuren.

Seite; beide *Mm. hyohyoid. inf.* kreuzen sich somit. Der Basalteil des *Protract. hyoid.* schiebt sich etwas über den *Hyohyoid. inf.* hin, erscheint aber von diesem völlig getrennt.

Der sehr schwache *N. hyoideus* war nicht auf den Protractor hinüber zu verfolgen; bei der schlechten Erhaltung des mir zur Verfügung stehenden Materiales jedoch konnte nichts sicheres hierüber sowie hinsichtlich des *N. mylohyoideus* ermittelt werden.



Als eine unmittelbare Entwicklung der Verhältnisse bei *Osteoglossum* erscheint die ventr. Constrictormuskulatur bei *Abramis* (Fig. X); der Allgemeincharakter des Befundes ist in beiden Fällen derselbe. Ein wichtiger Unterschied liegt indes vor: bei der letzteren Gattung treffen wir den Vorderteil des *M. Protractor hyoidei* schon in starker Reduktion begriffen, und die Mandibularinsertion wird überwiegend von dem kräftigen *M. Im II* zu stande gebracht. Der primäre Zungenbeinvorzieher erscheint der Länge nach in einem inneren, kurzen und breiten, und einem äusseren, schmalen vom Unterkiefer bis zum Zungenbeinbogen reichenden Teil gespaltet. Die inneren, kurzen Bäuche stossen in der Medianlinie zusammen, um sehr bald und plötzlich aufzuhören; als ihre unmittelbare Fortsetzung nach vorn erscheinen die beiden mächtig entfalteten Bäuche des *M. Im II*, die eine völlig longitudinale Richtung zeigen und nur an der Unterkiefersymphyse sehr wenig auseinanderweichen.

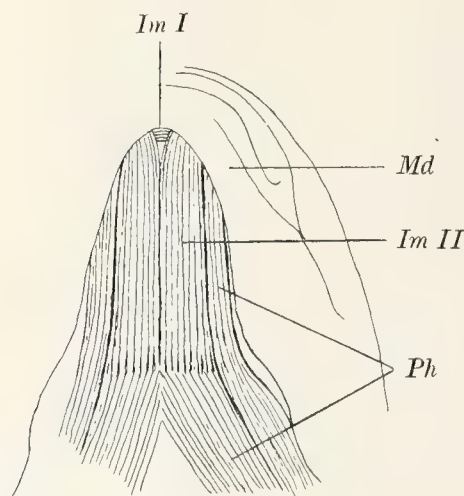


Fig. X.  
*Abramis brama.*

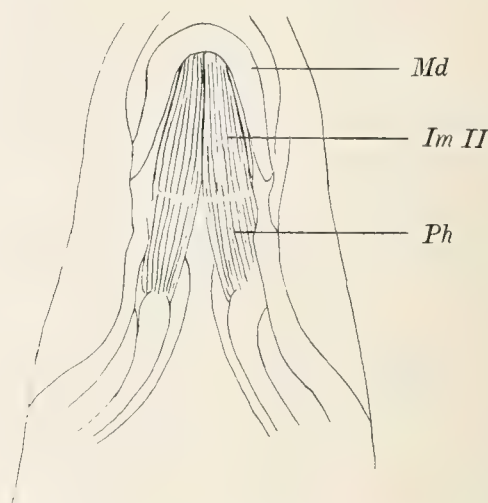


Fig. XI.  
*Barbus vulgaris.* Teilweise nach VETTER.

Dorsal von ihrer dortigen Insertion befindet sich der bis auf einen funktionslosen Rest eingegangene *Im I*. Ihre hintere Abgrenzung vom *Protractor hyoidei* ist fast nur an der etwas verschiedenen Faserrichtung zu erkennen. Vom Protractor der vorigen Gattung ist somit nur der äussere, zur Seite des *Im II* gelegene schmale Teil in intacten Beziehungen geblieben; dieser liegt zwar in derselben Horizontalebene wie der *Im II*, besitzt aber dorsal vom *Im I* eine schwache Mandibularverbindung.

*Barbus* (Fig. XI) zeigt keine Spur mehr vom Vorderteil des primären Protractors; der Hinterteil desselben bildet mit *Im II* einen einheitlichen Bauch, dessen doppelte Herkunft nur durch eine quere, etwas hinter der Mitte befindliche Zwischensehne angegeben wird. Der *Im I* fehlte bei dem von mir untersuchten Individuum vollständig; VETTER (N:o 31, S. 514) beschreibt diesen Muskel auch bei *Barbus* und giebt sogar an, dass er von der Sehne des *Protractor hyoidei* durchbohrt wird. Jedenfalls erwähnt er keinen Protractorteil dorsal vom *Im I*. Die Zwischensehne hat VETTER nicht gesehen, wie denn überhaupt die Doppelnatur des Zungenbein-



vorziehers bei den von diesem Forscher untersuchten Teleostiern ihm völlig entgangen ist. ALLIS hat zwar seinen »Geniohyoideus inferior« nicht nur bei *Lucius* sondern auch bei dem von ihm untersuchten *Scomber* (N:o 2, S. 198) erkannt; wenn aber dieser Verfasser ohne eigene Beobachtungen jenen sekundären Bestandteil des Protractors den Gattungen *Perca*, *Cyprinus* und *Barbus* abspricht, so baut er offenbar zu viel auf die Autorität VETTER's.

Es besteht somit innerhalb dieser Serie eine *Konkurrenz* zwischen den beiden Mandibularverbindungen des Protractors, dem primären und dem sekundären; über die Ursache, warum jene unterlag, bin ich nicht im reinen. Es hat den *Anschein*, als ob der *M. Im II* sich nach oben hindurchdrängte; erstes Opfer dieser Bewegung wäre selbstverständlich der dorsal wie ventral eingeengte *M. Im I* geworden. Die dorsal vom schwindenden *Im I* befindlichen Teile des Protractors verkümmerten oder wurden lateralwärts auseinandergeschoben, bis endlich die beiden *Im II*-bäuche den für die Unterkieferinsertion des Protractors günstigsten Punkt erobert hatten; sodann gingen auch die zu beiden Seiten der *Mm. Im II* befindlichen Reste des ursprünglichen *M. protractor hyoidei* als überflüssig zu Grunde. Über die Reihenfolge dieser Erscheinungen etwas festzustellen, dafür mangelt es indes gegenwärtig an genügenden Haltepunkten. Es ist mithin nicht ausgeschlossen, dass der Schwund des *Im I* das *einleitende* Moment ausmachte. Der ganze Vorgang ist wohl als die äusserste Konsequenz der den Atemmechanismus der Teleostier von dem der Selachier entfernenden Veränderungen anzusehen.

Etwa dieselben Zustände wie bei *Barbus* habe ich auch bei *Clupea*, *Hydrocyon* (Fam. *Characinidae*), *Pleuronectes* und den *Gadiden* gefunden. *Clupea* entbehrt den *Im I* vollständig; die *Mm. Protractor hyoidei* und *Im II* verhalten sich ganz wie bei *Barbus*, und die Grenze zwischen beiden ist nur an einer sehr deutlichen, dorsal wie ventral sichtbaren Zwischensehne erkenntlich. Bei *Hydrocyon* liegt diese im Vorderteil des Zungenbeinvorziehers und ist nur ventral bemerklich; die dorsale Muskelgrenze ist wie ein Absatz markiert worden. Der *Im I* mangelt. Bei *Gadus* ist die primäre Unterkieferinsertion des Protractors bis auf die im ersten Kapitel dieser Untersuchungen erwähnte Spezialisierung der dorsalen Protractorfascie verloren gegangen, und der den Vorderteil des Muskels darstellende *Im II* ist durch nichts als die schwache Zwischensehne vom ursprünglichen Protractor zu scheiden. Der *Im I* ist fast völlig unterdrückt worden. *Raniceps* (Fig. XII) hat auch die Fascieinsertion des primären *Protract. hyoid.* eingebüsst; der *Im I* aber ist deutlich als selbständiger, obwohl sehr degenerierter Muskel vorhanden, und die Zwischensehne ist auch dorsal wohl ausgeprägt worden. —

Der *zweite* Typus dürfte auch früh seine Ausbildung angefangen haben; schon bei *Chirocentrus* ist er, freilich noch ziemlich neutralen Charakters, zu spüren. Beide Mandibularteile des Zungenbeinvorziehers sind bei dieser Gattung sehr kräftig sowie in Bezug auf Länge, Breite und äussere Erscheinung einander völlig gleich. Dem Bau der Kiefer gemäss sind sie sehr hoch und seitlich stark zusammengedrückt.

Eine die hintere Grenze des *M. Im II* bezeichnende Zwischensehne befindet sich weit nach hinten; der *Im I* ist dick und rundlich.

Dieser Richtung gehört *Perca* (Fig. XIII) an. Der *M. Im II* ist hier recht schwach geworden, und seine Bäuche lassen sich sowohl von einander als vom *M. protract. hyoid.* mit Leichtigkeit trennen; nur hinten sind sie mit diesem verwachsen, setzen sich aber von ihm sehr deutlich ab. Der Vorderteil des Protractors ist sehnig, und beide Bäuche sind nach vorn von der Ausgangsstelle des *Im II* zu einem verschmolzen. Der *Im I* ist verhältnismässig kräftig.

Ganz ähnlich verhalten sich *Scomber*, *Trachinus*, *Labrus*; der Typus gelangt überhaupt unter den Acanthopterygiern zur allgemeinen Verbreitung.

*Cottus* zeigt die *Mm. Im II* noch schwächer wie bei *Perca* ausgebildet; sie werden bis an ihre hintere Grenze durch den kräftigen *M. Im I* vom sehnigen Vorderteil des primären *M. protractor hyoid.* getrennt und divergieren ebenso stark

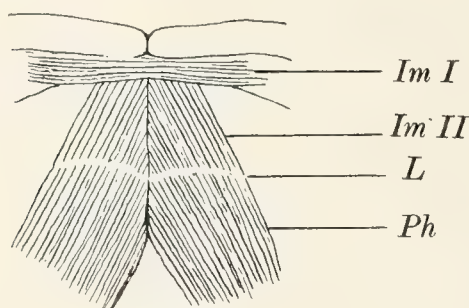


Fig. XII.

*Raniceps raninus*. Dorsalansicht.

*L* — Sehnenscheibe zwischen den *Mm. Im II* und protractor hyoidei.

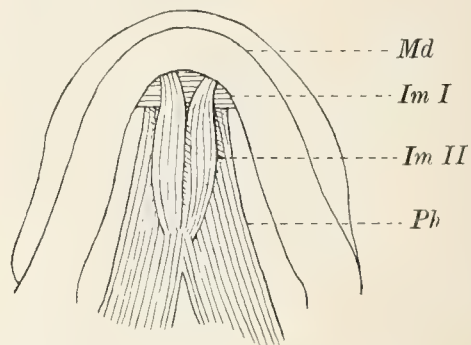


Fig. XIII.

*Perca fluviatilis*.

wie die muskulösen Teile (*a*) des *Im II* bei *Lucius*, denen sie auch völlig entsprechen dürften. Bei *Zoarces* (Fig. XIV) ist die Rückbildung des *M. Im II* noch weiter vorgeschritten. Der ganze Befund stimmt sonst mit *Cottus* überein, nur ist die gemeinsame Mandibularinsertion der beiden mächtig entfalteten *Mm. protract. hyoid.* durchaus fleischig. Die sehr divergierende *Im II*-bäuche besitzen zwar noch eine gewisse Breite, sind aber ausserordentlich dünn geworden und dürften kaum mehr fungieren können. Bisweilen fehlen auch diese Reste vollständig. Der *Im I* ist ungewöhnlich kräftig. Dass der *Im II* hier das Ende, nicht den Anfang eines Prozesses zum Vorschein bringt, geht schon daraus hervor, dass die sekundäre Mandibularverbindung des Zungenbeinvorziehers, wie wir gesehen haben, nicht durch langsame Anhäufung kleiner, kontinuierlich fortschreitenden Eroberungen auf Kosten des primären *Intermandibularis* entstand, sondern auf eine *einmalige*, quere Vertikalspaltung der oberflächlichen, in ursprünglicher Beschaffenheit noch befindlichen Constrictorschicht zurückzuführen ist: wo uns die frühesten, nur wenig differenzierten Entwicklungsstufen jenes letzten Erwerbes des *M. protract. hyoid.* begegnen (*Amia*, *Lucius*), treten sie sogleich in der Gestalt einer recht ansehnlichen Muskelmasse auf.



Das ganze Verhalten der Constrictormuskulatur bei *Zoarces* (in geringerem Masse auch *Cottus*) bezeichnet somit einen *Rückgang* auf schon längst durchlaufene Zustände; die Gattung ruft sogar das *Albula*-stadium ins Gedächtnis, dürfte wohl aber *zunächst* aus einem *Perca*-ähnlichen Muskeltypus hervorgegangen sein. Besonders die von Anfang bis Ende nach vorn divergierenden Bäuche des *M. Im II* mit ihrer weit auseinander gelegenen Mandibularinsertionen stellen einen sehr altertümlichen aber auch sehr früh verlorenen Charakter dar. Diese Eigentümlichkeit des Muskels bei *Cottus* und *Zoarces* steht offenbar mit der sekundären Vergrößerung des *M. Im I*, der hier sehr leistungsfähig erscheint, in Zusammenhang. Da die *Ventralseite* dem Sichverdicken des letzteren Muskels selbstverständlich den geringsten Widerstand leistete, wurden die Mandibularinsertionen des *M. Im II* aus ihrer symphysialen Lage seitwärts geschoben und glitten soviel wie erforderlich zurück. In dem Masse wie die sekundäre Mandibularverbindung des Protractors auf solche Weise ihre Bedeutung einbüßte, verkümmerte sie; der primäre Vorderteil des Muskels wurde genötigt, seine alte, ungeteilte Aufgabe wieder aufzunehmen, und erscheint dem entsprechend kräftig (*Zoarces*). Die besprochenen Verhältnisse heben recht klar die Wechselbeziehungen zwischen den beiden Abkömmlingen des primären *M. intermandibularis* hervor.

Bei *Callionymus* ist fast die *ganze* ventrale Constrictormuskulatur der Degeneration anheimgefallen; nur der *Hyohyoideus inf.* und der hintere, durch queren Faserverlauf ausgezeichnete Teil des *Protractor hyoidei* dürften ein wenig leistungsfähig sein. Übrigens ist der Zungenbeinvorzieher und ganz besonders der verhältnismässig sehr weit nach hinten reichende *Im I* fast membranartig dünn geworden und erscheinen grösstenteils in der Gestalt schwacher, unter einander nur los verbundener Striche von Muskelfasern (Fig. XV); die beiden Komponenten des Protractors (die *Mm. Im II* und *Ph*) sind deutlich von einander zu unterscheiden, die den *Im II* darstellenden Fasern bilden zwei getrennte, stark divergierende Striche, deren Mandibularinsertionen sich nach hinten vom *Im I* befinden, und der Hinterteil des *Protractor hyoidei* sowie der *Hyohyoideus inf.* sind durchweg constrictorartig. Das allgemeine Schema dieser Muskulatur ist somit ein sehr altertümliches; da wir wohl aber annehmen müssen, dass der stark spezialisierte *Callionymus* aus einem Typus, dessen Constrictormuskulatur eine vorgeschrittene Differenzierung (etwa wie bei Acanthopterygiern insgesamt) aufwies, hervorging, so ist die fragliche Erscheinung als sekundär entstanden, *nicht* als zurückgebliebene Primärzustände aufzufassen; und da ferner diese Constrictormuskulatur kaum funktionsfähig ist, also in Bezug auf ihren altertümlichen Charakter keine unmittelbare Anpassung veranschaulicht, scheint es, als ob die Ursache, warum sie sich in ihre ursprüngliche Bestandteile unter Annahme der ursprünglichen Form- und

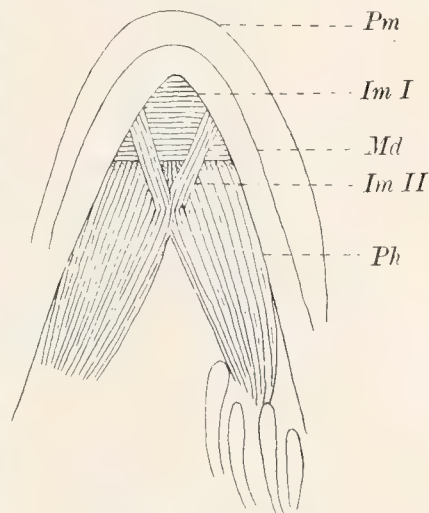


Fig. XIV.  
*Zoarces viviparus*.



Lage-beziehungen wieder auflöste, eben nur in der *Degeneration* zu suchen wäre. Diese hängt wiederum einzig und allein von der dieser Gattung eigentümlichen fehlenden Protractilität des Zungenbeinbogens ab (s. unter *Gadus*, S. 24). —

Dass obenstehende, vergleichend-anatomische Ergebnisse nicht ohne weiteres mit phylogenetischen Linien zusammenfallen, bedarf keiner Erörterung; vieles dürfte sich bei erweiterten, vor allem ontogenetischen Untersuchungen als Konvergenz statt Verwandtschaft herausstellen. Auf der anderen Seite ist es gewiss, dass diesem bis jetzt ganz versäumten Gebiet der Fischenanatomie eine nicht zu unterschätzende

Bedeutung für das noch auf sich warten lassende, natürliche System der Knochenfische zuerkannt werden muss.

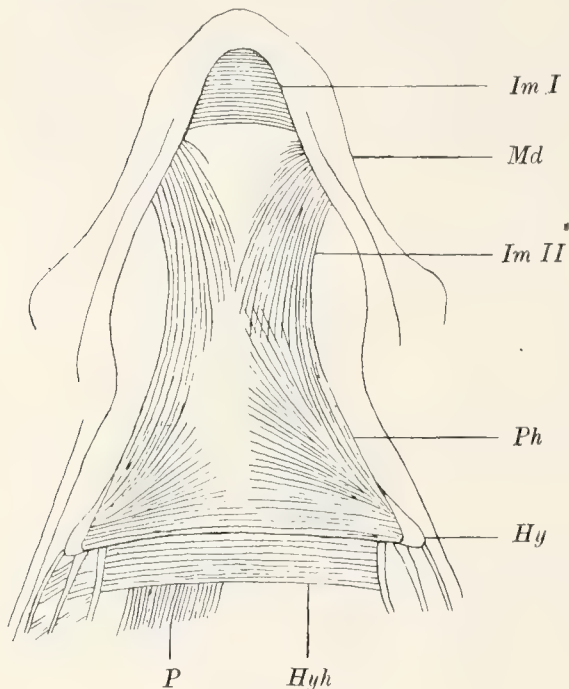


Fig. XV.

*Callionymus lyra*.

P — Bauchflossenmuskulatur.

Sehr eigentümlich und schwer zu deuten sind die Befunde bei *Silurus*, dessen ventrale Constrictormuskulatur von JUGE in einer Dissertation über die Nerven und Muskeln des Kopfes bei *Silurus glanis* eingehend beschrieben worden ist (N:o 18, S. 27—34).

JUGE rechnet dem s. g. *Hyohyoideus superior* auch die die beiden untersten Radien mit dem Zungenbeinbogen verbindende Muskulatur zu und verändert somit den von VETTER zuerst aufgestellten Begriff des *M. »hyohyoideus inferior»*. Er hat dies wahrscheinlich nur aus dem Grunde gethan, weil er um gebührende Unterbringung des grossen

Muskels, der sich vom *Epihyale* bis an das *Hypohyale inferius* erstreckend der Aus-  
senseite des Zungenbeinbogens unmittelbar anliegt (Fig. XVI), verlegen war. Für diese Bildung hat er also den Namen *Hyohyoid. inf.* gespart; dass der Muskel in rein anatomischer Hinsicht einen »Hyohyoideus« darstellt, ist freilich nicht zu leugnen, denn er hält seine Insertionen innerhalb der Grenzen des Zungenbeins; er wird durchweg vom *N. hyoideus facialis* innerviert. Ventral von diesem Muskel und ihn fast völlig verbergend liegt eine grosse, abgeflachte Muskelmasse (in der Figur als *Im II* bezeichnet), deren hintere Insertion mit der Hyoidinsertion des vorgenannten Muskels zusammenfällt; ihre Fasern breiten sich fächerförmig nach vorn aus und befestigen sich an der Vorderhälfte des Unterkiefers sowie am Hinterrande des verhältnismässig kleinen aber ziemlich dicken *Intermandibularis*; in der Medianlinie stossen die inneren Bündel mit den entsprechenden Bündeln des anderseitigen Muskels unter Bildung eines zwischenlagernden, schmalen Sehnenstreifens zusammen. Betreffs näherer Einzelheiten erlaube ich mir übrigens auf die Abhandlung JUGE's (S. 28) zu verweisen und hebe nur hervor, dass die Innervierung ausschliesslich

durch Asten des *N. maxillaris inferior trigemini* zu stande gebracht wird. Dieser Muskel, dem offenbar die Aufgabe eines Zungenbeinvorziehers zukommt, wird von JUGE als ein »*Geniohyoideus*» aufgefasst. Die Verhältnisse bei *Amiurus catus*, einem nordamerikanischen Siluroide, sind der Beschreibung Mc MURRICH's nach zu urteilen mit den Zuständen bei *Silurus* in allem wesentlichen übereinstimmend; die beiden grossen Muskeln werden auch von diesem Verfasser »*Hyohyoideus inf.*» resp. »*Geniohyoideus*» benannt, und die Innervierung wird genau wie bei *Silurus* angegeben (N:o 21, S. 320—321).

Was erstens die verschiedenen Bestandteile des *M. hyohyoideus* betrifft, so können wir natürlich nicht umhin, die Bezeichnung »*Hyohyoideus inferior*» in erster Linie für die zwischen den vordersten Radien oder zwischen diesen und dem Zungenbeinbogen befindliche Muskulatur zu verwenden, so lange wir die Nomenklatur VETTER's überhaupt noch beibehalten. Dass der *Hyohyoid. inf.* das Aussehen des oberen Muskels völlig nachahmt, ist ausserordentlich hinfällig und übrigens keine allzu-seltene Erscheinung. Wie sind aber die übrigen Constrictormuskeln bei *Silurus* zu beurteilen? Wie wir gesehen haben, ist die Teilung des ursprünglichen *Intermandibularis* in die zu ihrer Geschichte oben beschriebenen *Mm. Im I* und *Im II* eine schon früh eintretende Differenzierung, die nur bei den allerniedersten Teleostiern (*Albulidæ*, *Mormyridæ*, *Elopidæ*) noch nicht zu stande gekommen war, sich aber sonst überall bekundet. Es ist somit unwahrscheinlich, dass der *Intermandibularis* der *Siluriden*, obendrein bei seiner unbedeutenden Grösse, den ungeteilten, primären *Intermandibularis* darstellen sollte. Vielmehr können wir jenem Muskel nur den Wert eines *Im I* beilegen. Es ist ferner sehr unwahrscheinlich, dass der *M. Im II* bei den *Siluriden* verschwunden wäre — eine ausserordentlich seltene Erscheinung, der betreffs dieser Familie jede auszufindende Veranlassung abgeht. Infolgedessen sind wir zu der Annahme genötigt, dass der von JUGE nach der Rumpelkammer des Geniohyoideus verwiesene Muskel dem *Im II* entweder ganz oder teilweise entspricht. Im letzteren Falle ist die Entstehung des Muskels so zu denken, dass die zwischen den *Mm. Im II* und *protractor hyoidei* befindliche Kluft

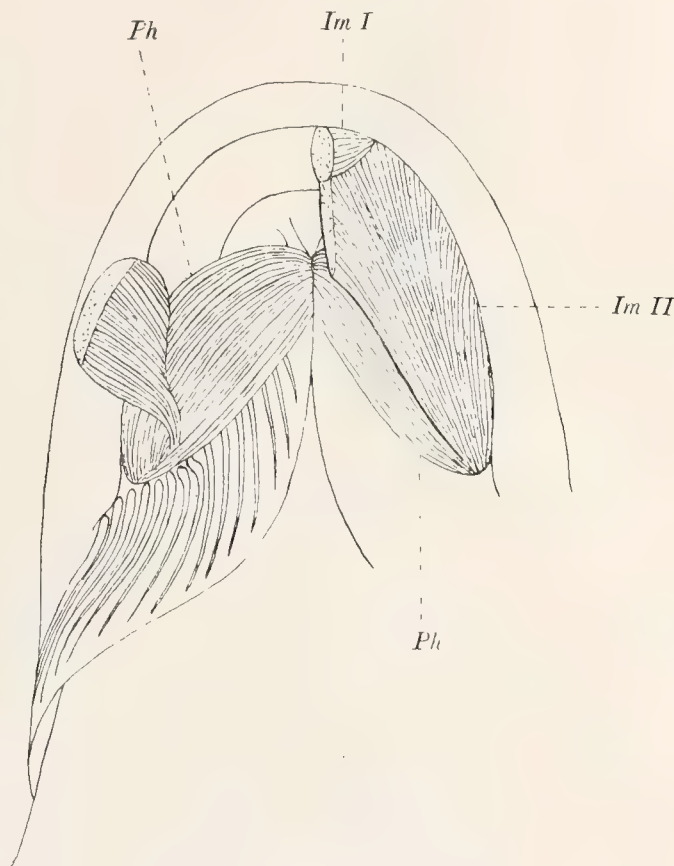


Fig. XVI.  
*Silurus glanis.*

dersten Teleostiern (*Albulidæ*, *Mormyridæ*, *Elopidæ*) noch nicht zu stande gekommen war, sich aber sonst überall bekundet. Es ist somit unwahrscheinlich, dass der *Intermandibularis* der *Siluriden*, obendrein bei seiner unbedeutenden Grösse, den ungeteilten, primären *Intermandibularis* darstellen sollte. Vielmehr können wir jenem Muskel nur den Wert eines *Im I* beilegen. Es ist ferner sehr unwahrscheinlich, dass der *M. Im II* bei den *Siluriden* verschwunden wäre — eine ausserordentlich seltene Erscheinung, der betreffs dieser Familie jede auszufindende Veranlassung abgeht. Infolgedessen sind wir zu der Annahme genötigt, dass der von JUGE nach der Rumpelkammer des Geniohyoideus verwiesene Muskel dem *Im II* entweder ganz oder teilweise entspricht. Im letzteren Falle ist die Entstehung des Muskels so zu denken, dass die zwischen den *Mm. Im II* und *protractor hyoidei* befindliche Kluft



sich nach hinten vom Verwachsungspunkte jener Muskeln durch die Masse des Protractors hin verlängert hat; dieser wäre somit in eine oberflächliche und eine tiefe Lage zerspaltet worden, und erstere bildet die unmittelbare Fortsetzung des *M. Im II* nach hinten. In der Tat deuten gewisse Eigentümlichkeiten des Faserverlaufes

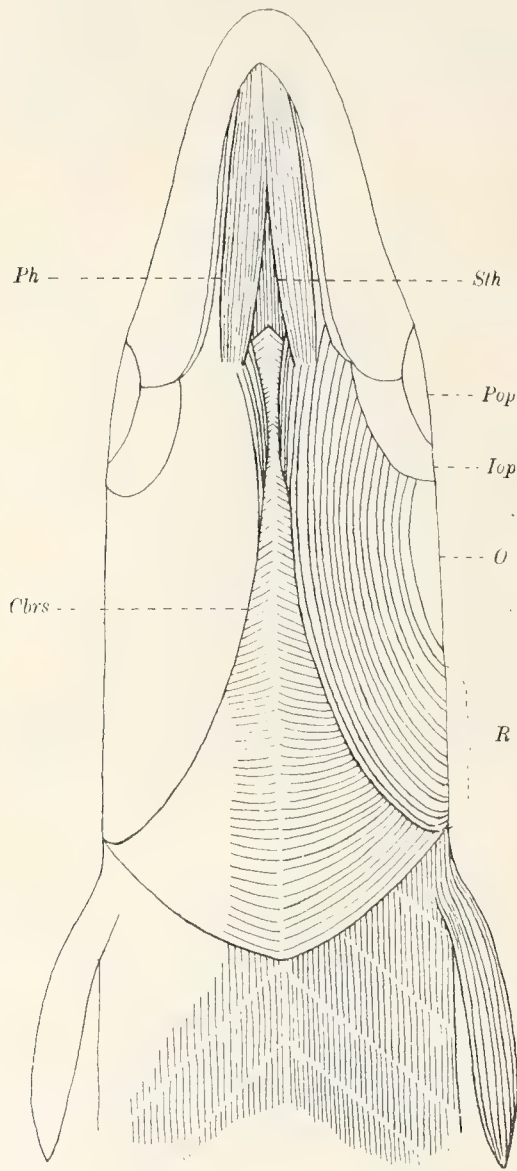


Fig. XVII.

*Anguilla vulgaris*. Ventralansicht nach Wegnahme der Haut. *Cbrs* — sekundärer Constrictor der Kiemenbogen, *R* — Kiemenhautstrahlen, *Iop* — Interoperculum; sonst wie vorher.

Schwund begriffen war, und eine Verschiebung dieses Muskels und des *M. Im II* im Verhältnis zu einander dürfte für die oben erwähnten Befunde massgebend gewesen sein.

Sollte es sich bei einem Vergleich mit anderen Siluriden und ihnen verwandten Familien oder etwa durch embryologische Untersuchung herausstellen, dass der von

darauf hin, dass dieser »Geniohyoideus« zusammengesetzter Natur sein könnte. Ist diese Vermutung richtig, wird auch die Deutung des »Hyohyoideus inferior« der erwähnten Autoren unschwer: der fragliche Muskel stellt die tiefe Lage des in oben beschriebener Weise zerspalteten primären *M. protract. hyoid.* dar. Es lässt sich aber auch denken, dass der »Geniohyoideus« JUGE's nur dem *M. Im II* entspreche; in solchem Falle bleibt der s. g. *Hyohyoideus inf.* bei *Silurus* einem ungeteilten *M. protract. hyoid.* identisch. Dass dieser Muskel sein Vorderende am Zungenbein befestigt, ist für seine morphologische Stellung hinfällig und steht offenbar in ursächlicher Beziehung zum abweichenden Verhalten des *M. Im II*. Es ist jedenfalls nicht anzunehmen, dass der *Hyohyoideus* irgendwelchen Anteil an diesem Protractor hat, denn da, wo sich der Ursprung jenes Muskels auf den Zungenbeinbogen hinüberschiebt, erscheint diese Ausbreitung immer als direkte Fortsetzung des hinter dem Hyoidbogen befindlichen Teiles des Muskels (*Amia*); bei *Silurus* aber liegt der *Hyohyoideus* völlig getrennt vom Protractor. Schon ein Blick genügt übrigens um einzusehen dass dieser Muskel mit jenem nichts zu thun hat, wenn es auch nicht zu leugnen ist, dass zwischen beiden in phylogenetischer Hinsicht keine scharfe Grenze besteht.

Die Zustände bei *Silurus* sind meines Erachtens von einer Stufe abzuleiten, wo der Vorderteil des primären *Protractor hyoidei* im



mir in Bezug auf *S. glanis* als ein *Im II* bezeichnete Muskel keinen Teil des morphologischen *M. protractor hyoidei* enthält, so ständen wir vor der sonderbaren Erscheinung eines Zungenvorziehers, der einzig und allein von den Abkömmlingen des ursprünglichen *M. intermandibularis* gebildet wurde. —

Von allergrösstem Interesse sind die Verhältnisse der *Apoden*, weil sie so recht geeignet sind, die Beziehungen zwischen dem Respirationsmechanismus der Selachier und dem der Teleostier in klares Licht zu stellen.

Bei *Anguilla* ist die gewöhnliche Constrictormuskulatur der Klasse bis auf den *M. protractor hyoidei* verschwunden. Dieser Muskel (Fig. XVII) ist allem Anschein nach ganz und gar der primäre oder morphologische Zungenbeinvorzieher, denn ich habe an ihm weder eine Zwischensehne noch irgendwelche sonstige Andeutung eines beteiligten *M. Im II* gefunden. Die beiden Bäuche sind von hinten vorwärts über ihre halbe Länge von einander getrennt worden, und die Spalte geht weiter nach vorn in eine seichte, endlich schwindende Rinne über (ventral). Das Hinterende des Muskels inseriert am Basalteil des vordersten Radius sowie am *Ceratohyale* zwischen dem zweit- und dem viert-vordersten Radius. Von der oberflächlichen Constrictorschicht findet sich keine Spur mehr vor, wenn wir nicht als solche einen dem ventralen Unterkieferrand anliegenden, aus eigentümlichem, muskelähnlichem Gewebe gebildeten Saum (in der Fig. XVII sichtbar) ansehen wollen. Der *Hyohyoideus inferior* fehlt gänzlich; der *Hyohyoid. superior* ist auf einige in der ausserordentlich dünnen inneren Kiemenhaut zerstreut liegende, sehr degenerierte und wirkungslose Bündelchen beschränkt worden.

Der Opercularapparat zeigt bekanntlich bei den Anguilluliden eine geringe Grössenentfaltung und reicht bei weitem nicht aus, um den weit nach hinten geschobenen Kiemenkorb zu decken. Dieser Mangel wird gewissermassen dadurch kompensiert, dass die Kiemenhautstrahlen eine aussergewöhnliche Länge bekommen und sich rings um das Operculum wie konzentrische Kreise gelegt haben. So ist ein, wenn auch nur wenig wirkungsvoller, *Schutz* durch festere Gebilde den Kiemenbogen zugesichert worden. In bewegungsmechanischer bez. respiratorischer Hinsicht aber ist diese Einrichtung so gut wie ganz wertlos. Die feinen Stäbchen sind nämlich derart biegsam, dass sie bei ihrer grossen Länge die Adductionen der Suspensorien und der Opercularapparate nur sehr schwach und in beschränktem Masse nach hinten über den Bereich der Kiemenbogen fortpflanzen können; dabei sind sie der gewöhnlichen Bewegungsart der Radien unfähig.

Die bei den Teleostiern sonst üblichen Anordnungen für die Einschnürung des Kiemenraumes fehlen somit hier oder haben wenigstens ihr diesbezügliches Leistungsvermögen eingebüsst; der Befund ist dem der Selachier analog. Und nichts ist natürlicher, als dass bei dieser Übereinstimmung der räumlichen Verhältnisse eine Übereinstimmung auch der mechanisch-physiologischen sich kundgiebt: als Ersatz der erwähnten Mängel findet sich bei *Anguilla* ein grosser, kräftiger, den ganzen Kiemenkorb umschliessender Ringmuskel vor (Figg. XVII, XVIII). Da die eigenartigen Befunde der Anguilluliden keine ursprüngliche Erscheinung darstellen,

sondern wohl in Anpassung an den Lebensbedingungen aus einem schon ausgeprägten Teleostiertypus sekundär hervorgingen, hat selbstverständlich dieser Constrictor in morphologischer Hinsicht mit dem der Selachier nichts zu thun; sein Mutterboden ist die Rumpfmuskulatur. BORCEA (N:o 5, S. 206—207), der die fragliche Bildung bei *Conger* und *Muraena* gesehen hat, fasst sie irrtümlich als einen *M. hyohyoideus* auf; in der Tat steht der Muskel in keinerlei Verbindung weder mit den Radien noch überhaupt mit dem Hyoidbogen. Die wirkliche Branchiostegalmuskulatur findet sich, wie oben erwähnt, in üblichen Beziehungen, obwohl in schwindendem Zustand vor. BORCEA bildet aber den Muskel, so viel ich weiss, richtig ab (bei *Conger* und *Muraena*) und kennzeichnet ihn richtig als einen Expirationsmuskel.

Bei *Anguilla* erscheint nun dieser sekundäre Constrictor folgendermassen.

Nach Wegnahme der Haut, des Opercularapparates und des Zungenbeinbogens nebst seinen Radien, gewahrt man (Fig. XVIII) eine grosse, dorsoventral verlaufende Muskelmasse, die vorn an den mächtigen *M. adductor mandibulæ* grenzt und sich

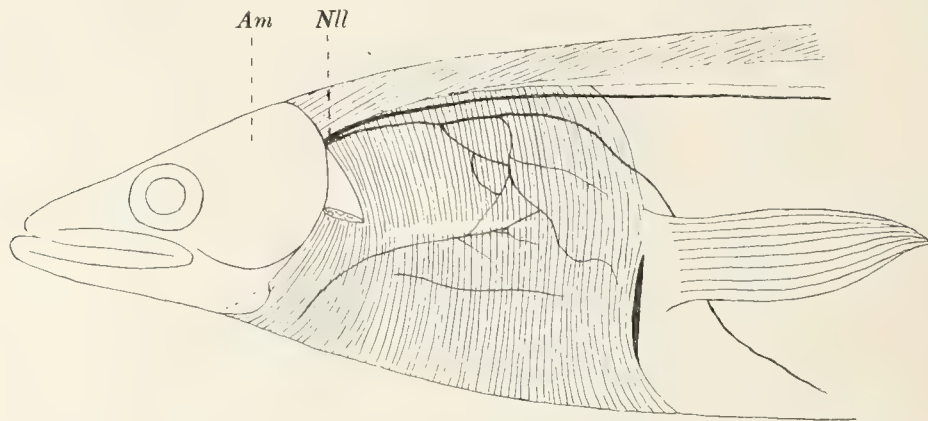


Fig. XVIII.

*Anguilla vulgaris*. Seitenansicht. Am — *M. adductor mandibulæ*,  
Nll — *N. lineæ lateralis*.

nach hinten bis an die Brustflosse und die Kiemenspalte erstreckt. Die rostro-caudale Ausdehnung des Muskels fällt also mit der der Opercular- und Branchiostegalapparaten so ziemlich zusammen. Die dorsale Grenzlinie ist mit dem Rückenumriss des Tieres beinahe gleichlaufend; der Constrictor setzt sich hier undeutlich von der Rumpfmuskulatur ab. Ganz nach vorn fällt jene Grenzlinie mit der Lage des Seitenliniennerven (*Nll*) zusammen, trennt sich aber sehr bald von diesem, und der Nerv liegt nachher ein wenig unterhalb der Muskelgrenze, jedoch mit ihr fast gleichlaufend. Dorsal vom Constrictor befindet sich eine andere, so viel ich weiss, bis jetzt unbeachtet gebliebene Ringmuskelbildung. Diese erstreckt sich vom Hinterhaupte, wo sie unmittelbar an den *M. adductor mandibulæ* grenzt, unter abnehmender Stärke bis zur Schwanzflosse und besteht aus zwei der Rückenlinie folgenden, dünnen Muskelbändern mit von jener Linie aus schräg nach vorn gehendem Faserverlauf. Vorn stösst die laterale Grenzlinie jedes Bandes unmittelbar an den Constrictor; hinten wird sie von diesem durch eine sich allmählich erweiternde, jedoch immer eng bleibende



Spalte, welche die eigentliche Rumpfmuskulatur blosslegt, getrennt. Die *vordere* Grenze des Constrictors folgt der hinteren Grenze des *M. Adductor mandibulæ*, zeigt jedoch einen dreieckigen Ausschnitt da, wo das *Operculum* dem Constrictor anliegt. Hier steht er mit der Innenseite dieses Knochens in Verbindung; seine vordersten unteren Bündel gehen vom unteren Rande des Grates, an dessen *oberem* Rande der *M. adductor operculi* inseriert, aus (Fig. XVIII). Nach unten zu dehnt sich der Muskel rostro-caudal erheblich aus, so dass seine untere Grenzlinie, die mit der Medianlinie zusammenfällt, viel länger ist als die dorsale. Ein schmaler Sehnenstreifen (Fig. XVII) verbindet hier beide Muskeln, welche somit im Verein einen den Kiemenkorb einhüllenden Schlauch bilden. Irgendwelche Verbindung zwischen dem Constrictor und dem unmittelbar nach innen von ihm befindlichen *M. Sternohyoideus* existiert nur ganz nach hinten, wo beide Muskeln mittels des medianen Sehnenstreifens zusammenhängen; die Kiemenbogen bewegen sich völlig frei innerhalb des Schlauches, dessen Innenwand von einer Fortsetzung der Schleimhaut der Kiemenhöhle ausgekleidet wird. Auf etwa seiner halben Höhe zeigt der Constrictor einen muskelfreien Längsstreifen vor (Fig. XVIII).

Es gelang mir nicht, die Innervierung dieses Muskels mit Sicherheit festzustellen. Die allenthalben an und zwischen den Muskelbündeln in überreichlicher Menge lagernden Fettkügelchen erschwerten die diesbezügliche Untersuchung sehr erheblich. Als Tatsachen teile ich indes folgendes mit.

Der sich vom *N. lineæ lateralis* ventralwärts abzweigende (schon von *Stannius*, N:o 29, Taf. III, Fig. 3, abgebildete) Ast sendet etwa in der Mitte zwischen der vorderen und der hinteren oberen Ecke des Constrictors zwei Fäden aus, die sich nach unten wenden und sowohl untereinander als mit einem ventral von der oben erwähnten, muskelfreien Stelle liegenden Nerven anastomosieren (Fig. XVIII); den hinteren jener Zweige konnte ich bis an den Rand der Kiemenöffnung spüren. Von diesen beiden Zweigen habe ich bei 16-facher Vergrößerung feine Ästchen, die zwischen den Muskelbündelchen hineindringen, ausgehen sehen; ob sie den Muskel wirklich innervieren, muss ich für jetzt unentschieden lassen. Ihr Mutternerf ist ja als ein Hautnerv bekannt, was natürlich die Beimischung motorischer Elemente nicht ohne weiteres ausschliesst. Von den beiden ventral vom muskelfreien Streifen befindlichen Nerven konnte ich keine solchen, in den Muskel eintretenden Ästchen auffinden. Mit Bestimmtheit habe ich dagegen konstatiert, dass keine Nerven von irgendwo her auf die *Innenseite* des Constrictors hinzutreten, und die Vaguszweige der Kiemenbogen versorgen den Constrictor *nicht*; eine Innervierung von Spinalnerven aus habe ich ebensowenig nachweisen können.

Irgendwelche deutliche Spuren einer *Segmentierung* des Constrictors sind nicht vorhanden.

Die *Apoden* dürften von Teleostiern, deren *Intermandibularis* noch keine Differenzierungen aufwies, abzuleiten sein, und der Schwund jenes Intermandibularis bei den *Apoden* ist offenbar von der Ausbildung des sekundären Kiemenbogenconstrictors abhängig. Für eine richtige Beurteilung dieser Verhältnisse sind indes



noch embryologische nicht minder als erweiterte vergleichend-anatomische Untersuchungen der ventralen Constrictormuskulatur bei den niederen Teleostiern von nöten; wertvolle Aufschlüsse in Bezug auf die sehr unklare Stammesgeschichte der Aale und mit ihnen zusammengestellter Gruppen sind auf diesem Wege zu vermuten.

Bei den in diesen Untersuchungen vorgelegten Muskelbestimmungen habe ich die *Nerven* nur ausnahmsweise berücksichtigt. Ich habe dies darum gethan, weil die Innervierung innerhalb der fraglichen Muskelgruppe meines Erachtens eine allzu schwankende ist, um eigentlichen morphologischen Wert zu besitzen. Diese Auffassung ist der üblichen zuwider, denn was bisher auf dem Gebiete der vergleichenden Fischmyologie geleistet wurde, steht im Zeichen des »seinen« Nerven durch alle möglichen Irrgänge herumschleppenden, wandernden Muskels — und gipfelt in die sonderbarsten Auslegungen; man hat die Reihenfolge, Lagebeziehungen und das sonstige Verhalten eines jeden Nervenästchens so lange angestarrt, bis man andere, die Verwandtschaftlichen Beziehungen oder die Identität der Muskeln oft in einfacher und unwiderstehlicher Weise bekundigenden Faktoren zu sehen verlernte. Ich will diese Frage, insofern sie die uns hier beschäftigende Muskulatur angeht, in Kürze und grösstenteils auf schon bekannte Tatsachen gestützt, auseinanderzusetzen versuchen.

Betrachten wir den dem Hyoidbogen und dem Unterkiefer zugehörigen ventralen Constrictorabschnitt eines Haifisches. Von einem mehr oder weniger ausgebildeten medianen Sehnenstreifen abgesehen, bildet die fragliche Muskulatur eine homogene, zusammenhängende Masse mit querm Faserverlauf, die hinten ohne Grenze in die Constrictoren der Kiemenbogen übergeht. In den Hinterteil des Muskels tritt der *N. hyoideus facialis* ein und verzweigt sich mehr oder minder weit nach vorn; sein Vorderteil wird in der gleichen Weise durch einen Ast des *N. trigeminus* versorgt; beide Nerven anastomosieren vielfach. Wie verhält sich diese Muskulatur zu den ursprünglichen Mandibular- und Hyoid-segmenten? Dass der *N. Trigeminus* den Nerven des ersteren, der *N. facialis* den Nerven des letzteren darstellt, dürfte als unbestritten gelten. Wenn wir nun bei den Haien, die ja einem ursprünglichen Zustand verhältnismässig nahe kommen, fast immer die erwähnte, doppelte Innervierung wiederfinden, und behalten wir dabei im Gedächtnis, dass der fragliche Muskelabschnitt noch sehr wenig differenziert worden ist, so sind wir zu der Annahme berechtigt, dass auch diese Nervenbefunde ein primitives Verhältnis repräsentieren, oder, in anderen Worten, dass die uns hier beschäftigende Constrictorpartie dem Mandibularsegmente nicht minder als dem Hyoidsegmente zugehört. Dies ist auch die allgemeine Ansicht geworden; zwar ist RUGE (N:o 26), weil er bei den Selachiern einen vom *Trigeminus* aus innervierten, ventralen Constrictorteil nicht auffinden konnte, für die Meinung, dass die vordere, ventrale Constrictormuskulatur bei jenen Fischen sowie bei den Vertebraten überhaupt im Bereiche des Hyoidsegmentes allein liegt, eingetreten; mit der Nachweisung einer solchen Innervierung

durch die Untersuchungen von ALLIS und besonders LUTHER ist aber jener vom Standpunkte RUEE's aus sehr wichtige Beweisgrund seiner Hypothese, die ihn übrigens zu einer anderen, sehr absonderlichen Annahme<sup>1</sup> veranlasste, weggenommen.

Die postulierte ursprüngliche Grenze zwischen Mandibular- und Hyoid-segmente fällt also irgendwo *durch* den v. Constrictor, muss aber hier sehr früh ausgewischt worden sein, denn kein Anzeichen ist mehr davon zu spüren; » $C_1v$ » und » $C_2v$ » als anatomische Begriffe existieren nicht. Zwar fand LUTHER (N:o 19, S. 77) bei *Chiloscyllium* »den vom  $N. V_3$  versorgten Muskel ( $C_1v$ ) am Ursprung getrennt vom  $C_2mv$ »; es ist indes ausserordentlich unsicher, in wie weit die erwähnte Spaltung, wie LUTHER zu meinen scheint, mit der Segmentalgrenze wirklich zusammenfällt. Diese Teilung der Muskulatur kann ebensogut als sekundär entstanden gedacht werden; morphologisch bedeutungslose Querspaltan des Selachierconstrictors sind ja keine gar zu seltene Erscheinung. Ebensowenig kann ich LUTHER beistimmen, wenn er in den einzelnen Fällen von den *scheinbaren Verbreitungsgebieten der beteiligten Nerven* (V und VII) auf die wenn auch nur ungefähre Grenze zwischen dem Mandibularteil und dem Hyoidteil des Constrictors schliesst. Es mag richtig sein, dass mit Ausnahme der *Diplospondyli* (Notidaniden und *Chlamydoselache*), deren ventrale Constrictor keinen Trigeminasast aufweisen kann, der *Trigeminus* den Vorderteil, der *Facialis* den Hinterteil des fraglichen Constrictorabschnittes in unbestimmtem Umfang innerviert; beide Nerven aber mischen sich im Inneren des Constrictors derart intim, dass es betreffs des allergrössten Teils des letzteren mit Sicherheit unmöglich ist zu entscheiden, was von *Trigeminus*- resp. *Facialis*-fibrillen *tatsächlich* versorgt wird; was makroskopisch oder bei schwachen Vergrösserungen als ein *Trigeminus*ast erscheint, enthält wohl in den meisten Fällen auch *Facialis*-fibrillen in grösserer oder geringerer Ausdehnung und umgekehrt.

Dass nicht einmal wirklich konstatierte Fluctuationen der Innervationsgrenze entsprechende Verschiebungen der Segmentalgrenze beweisen können, scheint mir aus den Verhältnissen bei *Diplospondyli* zur Genüge hervorgehen. Bei dieser wohl als sehr primitiv anzusehenden Familie hat man, wie oben erwähnt, eine vom *Trigeminus* herrührende Innervierung des ventralen Constrictors noch nicht vorzeigen können. Wenn es den beteiligten Forschern, darunter einem so sorgfältigen Beobachter wie LUTHER, nicht gelungen ist, einen vom *R. max. inf. trig.* in den ventralen Constrictor eintretenden Ast aufzufinden, dürfen wir auch als sichergestellt ansehen, dass kein solcher Ast existiert. Die *Facialis*-äste reichen dagegen bis an die Unterkiefersymphyse (Fig. XIX); schon bei Embryonen fand LUTHER dies Verhältnis vollends ausgeprägt (N:o 19, S. 75). Beim strengen Festhalten des Innervationsprincipes wäre nun dies so zu deuten, als sei der Mandibularteil des ventralen Constrictors bei den in Rede stehenden Gattungen von dem sich vorwärts ausbreitenden Hyoidteil bis zum völligen Schwinden fortgedrängt worden — eine Meinung, der sich auch LUTHER anschliesst (N:o 19, Ss. 75, 153, 172). Es ist aber ausser-

<sup>1</sup> s. hierüber z. B. HERRICK (N:o 15, S. LXXII—LXXIII).



ordentlich schwierig einzusehen, warum derartige Veränderungen die *Diplospondyli* und zwar nur diese betreffen sollten. Vorgänge wie die postulierten setzen ja besondere *Differenzierungen* voraus, sind einfach mit solchen gleichbedeutend; der ventrale Constrictor bei *Hexanchus* u. s. w. zeichnet sich aber in dieser Hinsicht vor dem Constrictor der Haifische insgesamt gar nicht aus. Hier wie dort entfernt sich der Muskel vom Primärzustande hauptsächlich durch Vorhandensein des tiefen Bauches für die Zungenbeininserion, und die oberflächliche Schicht, die ja die vermutete Reduktion zu erleiden hatte, bietet überall dieselbe Erscheinung von so gut wie ungestörter Ruhe dar. Gerade der vorderste Teil des ventralen Constrictors

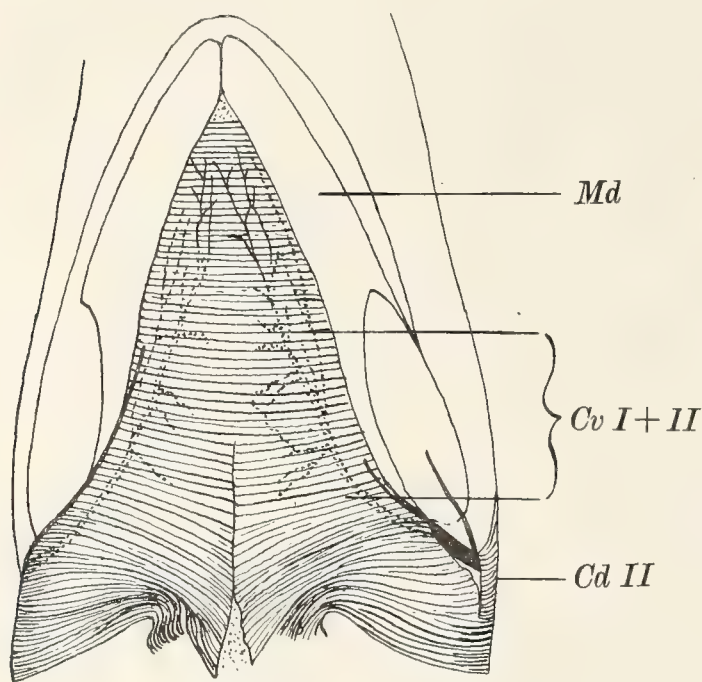


Fig. XIX.

*Heptanchus cinereus*. Nach LUTHER.  
Cv I + II — den Mandibular- und Hyoid-  
bogen zugehörige Abteilung des ventralen  
Constrictors.

hält sonst am zähesten an seinen ursprünglichen Beziehungen fest, wie ich bereits hervorgehoben habe, und da, wo er wirklich im Schwund begriffen ist (Teleostier, s. oben), geschieht dies aus den deutlichsten Gründen und in Zusammenhang mit weitgehenden Differenzierungen der ganzen Constrictormuskulatur. Viel natürlicher lassen sich die Befunde bei *Diplospondyli* erklären, wenn wir annehmen, dass der Schwund nicht die Muskulatur sondern die *Nerven* betroffen hat. Dies ist zustande gekommen entweder dadurch, dass die Facialisfibrillen, den Bahnen der Trigeminasäste folgend, die letztere allmählich verdrängt haben, wonach der zuführende Trigeminaszweig, der *N. »mylohyoideus»*, als zwecklos verkümmerte; oder

vielleicht wahrscheinlicher so, dass dieser Nerv aus irgendwelcher Ursache schwand, wobei die Innervierung des vordersten Constrictorteiles in eben geschilderter Weise vom *Facialis* übernommen wurde. Ein solcher Vorgang, weil mehr zufälliger und oberflächlicher Natur, gefährdet übrigens an und für sich die primitive Stellung der *Diplospondyli* sehr wenig.

Die ventrale Constrictormuskulatur bei *Ganoiden* und *Teleostiern* veranschaulicht dasselbe Grundprincip wie bei den Selachiern: eine doppelte Innervierung unter inniger Mischung der Elemente beider Nerven ist auch bei jener eine charakteristische Eigenschaft; sowohl Muskel- wie Nervenbefunde lassen uns hinsichtlich der Lage der Intersegmentalgrenze völlig im Stiche. Das Verhalten der Nerven ist ein sehr verschiedenes. Bei *Gymnarchus* z. B. tritt der *N. hyoideus facialis* auffallend stark in den *Protractor hyoid.* ein, während der Trigeminasast jedenfalls sehr un-



bedeutend sein muss, denn er war überhaupt nicht zu entdecken; bei *Menidia* wiederum fand HERRICK (N:o 14, S. 167) den »Geniohyoideus« bis an den Zungenbeinbogen vom *Trigeminus* allein innerviert; dass wenigstens der hintere Teil des Muskels in beiden Fällen absolut derselbe und zwar dem primären *Protractor hyoidei* zugehörig ist, unterliegt keinem Zweifel. Zwischen jenen Extremen finden sich selbstverständlich Übergänge; im allgemeinen *scheint* die Trigeminusinnervierung zu überwiegen.

Aus alledem geht hervor, dass die Muskulatur des ventralen Constrictors I + II morphologisch als ganzes genommen werden muss; wenn es gilt, Grenzen zwischen den verschiedenen Bildungen jener Muskulatur zu ziehen, geben die Nerven keine Aufschlüsse — Umstände, die auch bei einer Beurteilung der Verhältnisse bei den höheren Vertebraten nicht ausser Acht gelassen werden dürfen.

In Bezug auf die Rumpfmetameren der Selachier hob neuerdings E. MÜLLER (N:o 22) das Vorhandensein zahlreicher intersegmentalen Nervenverbindungen scharf hervor, die zur Genüge darthun, dass es, insofern die Innervierung in Betracht kommt, keine Rede von einer Abgeschlossenheit der Myomeren im Verhältnis zu einander sein kann. Es ist zu verwundern, dass man hinsichtlich der stark spezialisierten und mit einander in den innigsten Wechselbeziehungen stehenden Mandibular- und Hyoid-segmenten, wo die periphere Nervenmischung auf die Spitze getrieben worden ist, den Glaubenssatz von der entscheidenden Bedeutung der Innervierung für die Muskelhomologien noch aufrecht hält.

---

*Die Hyohyoidmuskeln.* Dass wenigstens der untere Muskel sich vom Hinterteil des Zungenbeinbauches aus entwickelte, ist mit Sicherheit anzunehmen; bei *Lepidosteus* stellen beide Muskeln noch eine einzige, zusammenhängende Lage ohne jegliche Unterbrechung dar (Fig. II). Ob der *Hyohyoideus superior* ebenfalls aus der tiefen Schicht des Constrictors oder aus der oberflächlichen, oder vielleicht aus beiden, wie VETTER meint, entstand, kann für jetzt nicht ganz sicher entschieden werden. Es ist indes höchst wahrscheinlich, dass auch der obere Muskel auf den Zungenbeinbauch zurückzuführen ist und somit der tiefen Lage des Constrictors zugehört. Bei *Chimæra* werden nämlich die Radien des Hyoidbogens von der *oberflächlichen* Schicht *bedeckt*, während der *Hyohyoid. superior* samt dem *N. hyoideus* bei *Ganoiden* und *Teleostiern* auf die Innenseite der Radien liegen; da wohl diese in beiden Fällen dieselben Bildungen sind, dürfte somit die Muskulatur verschiedener Abstammung sein, d. h., die ganze Hyohyoidmuskulatur gehört demselben Niveau wie der primäre *Protractor hyoidei* an.

---

## Zusammenfassung.

1. Die Herausbildung der *Mm. intermandibularis, protractor hyoidei* und *hyohyoideus* bei den Knochenfischen bezieht sich auf eine horizontale und eine später erfolgende vertikale Spaltung des ursprünglichen *Constrictor ventralis*. Durch erstere entstand einerseits der primäre *M. intermandibularis*, andererseits der primäre *M. protractor hyoidei* und aller Wahrscheinlichkeit nach auch die *Hyo-hyoidmuskeln* (*Lepidosteus*, niedere Teleostier: *Albula*, *Gymnarchus*). Die letztere Spaltung betraf den primären *M. intermandibularis*, dessen Vorderteil (Im I) seinen ursprünglichen Zustand bewahrt und den sekundären, definitiven *Intermandibularis* der Teleostier darstellt; der abgelöste Hinterteil (Im II) dagegen tritt in näheren Beziehungen zum primären *M. protractor hyoidei* und bringt eine sekundäre *Mandibularinsertion* dieses Muskels zu stande (übrige Teleostier, *Amia*).
2. Der morphologische und der physiologische Begriff des *M. protractor hyoidei* decken einander nicht. Als Zungenbeinvorzieher fungieren bei den Teleostiern mehrere einander nicht homologe Bildungen, die bis jetzt unter dem Namen *M. geniohyoideus* zusammengeschlagen worden sind. In anatomischer Hinsicht sind drei durch Übergänge verbundene Haupttypen zu unterscheiden:
  - a) der primäre *M. protractor hyoidei*, mit einer einzigen *Mandibularinsertion* dorsal vom primären *M. intermandibularis* (*Albula*, *Gymnarchus*);
  - b) der primäre *M. protractor hyoidei* im Verein mit dem eine sekundäre *Mandibularinsertion* darstellenden Hinterteil (Im II) des primären *M. intermandibularis*; der Zungenbeinvorzieher besitzt hier zwei *Mandibularverbindungen*, die zwischen sich den sekundären *M. intermandibularis* (Im I) erfassen (*Amia*, *Esox*, *Salmo*, *Osteoglossum*, *Acanthopterygier*);
  - c) der Hinterteil des primären *M. protractor hyoidei* im Verein mit dem die einzige *Mandibularinsertion* des Zungenbeinvorziehers bildenden Hinterteil (Im II) des primären *M. intermandibularis*; diese Insertion befindet sich ventral vom sekundären *Intermandibularis* (Im I). Höchste Differenzierung der *Constrictormuskulatur* bei den Teleostiern (*Clupea*, *Barbus*, *Characiniden*, *Gadiden*, *Pleuronectiden*).

3. Der sekundäre *M. intermandibularis* (Im I) bildet sich mit steigender Differenzierung des ventralen *Constrictors* zurück um bei dem Typus c) zu verschwinden.
4. Eine Zusammenstellung der Kategorien b) und c) ergibt zwei verschiedene Serien mit dem *Esox*-stadium als Ausgangspunkt: eine, die über *Salmo* und *Osteoglossum* zu den Befunden innerhalb des Typus c) führt, und eine andere, welche die *Acanthopterygier* einschliesst. Der Unterschied zwischen beiden liegt im Verhalten des *M. Im II*, der in der ersten Serie sich kräftig entfaltet und in inniger Beziehung zum *M. protractor hyoidei* tritt, in der anderen Serie eine grössere Ursprünglichkeit bewahrt und eine geringere Entwicklung bis zum völligen Schwund aufweist.
5. Bei *Anguilla* findet sich ein umfangreicher aus der Rumpfmuskulatur sekundär entwickelter *Constrictor arcuum branchialium* als eine Kompensation des unzulänglichen Opercular- und Branchiostegalapparates vor.
6. Die ventrale Constrictormuskulatur der Ganoiden entwickelt sich kontinuierlich zu den Befunden der Teleostier.
7. Die Innervierung giebt für die Morphologie der nämlichen Muskulatur keine oder nur schwebende Haltepunkte.





## Verzeichnis der benutzten Litteratur.

1. ALLIS, E. P. The cranial muscles and cranial and first spinal nerves in *Amia calva*. *Journal of Morphology*. Vol. XII. p. 487. Boston 1897.
2. ALLIS, E. P. The skull, and the cranial and first spinal nerves in *Scomber scomber*. *Journ. Morph.* Vol. XVIII. p. 45. Boston 1903.
3. BALFOUR, F. M., and PARKER, W. N. On the structure and development of *Lepidosteus*. *Phil. Trans. Roy Soc. London*. Vol. 173. Part. II. p. 359. 1882.
4. BIJVOET, W. F. Zur vergleichenden Morphologie des Musculus digastricus mandibulæ bei den Säugetieren. *Zeitschr. für Morphol. u. Anthropol.* Bd. 11. 1908.
5. BORCEA, I. Observations sur la musculature branchiostégale des Téléostiens. *Ann. Sci. Univ. Jassy*. T. 4. p. 203. 1907.
6. BROOKS, H. The osteology and arthrology of the Haddock (*Gadus æglefinus*). *Scientif. Proced. Roy. Dublin Soc.* N. S. Vol. IV. p. 166. 1885.
7. CHAINE, M. I. Sur le »ligament mandibulo-operculaire« des Téléostéens. *Procès-verbaux. Soc. phys. et nat. Bordeaux*. 1903. p. 29.
8. COLE, F. I. Observations on the structure and morphology of the cranial nerves and lateral sense organs of fishes; with special reference to the genus *Gadus*. *Trans. Linn. Soc. London*. second Ser. Vol. VII. Zoology. Part V. p. 115. 1898.
9. ERDL, M. P. Beschreibung des Skeletes von *Gymnarchus niloticus*, nebst Vergleichung mit Skeleten formverwandter Fische. *Abhandl. Mathem.-physik. Classe. Bayr. Akad. Wissensch.* p. 209. Bd. 5. 1850.
10. FRIANT, A. Recherches anatomiques sur les nerfs trijumeau et facial des poissons osseux. *Diss. Nancy* 1879.
11. FUTAMURA, R. Über die Entwicklung der Facialismuskulatur des Menschen. *Anatom. Hefte. Abt. I.* Bd. 30. p. 433. 1906.
12. FUTAMURA, R. Beiträge zur Entwicklungsgeschichte der Facialismuskulatur. *Anatom. Hefte.* Bd. 32. 1907.
13. HÆMPEL, O. Die Schlundknochenmuskulatur der Cyprinoiden und ihre Funktion. *Zool. Jahrb. Abt. Anat.* Bd. 27. p. 95. 1908.
14. HERRICK, C. JUDSON. The cranial nerves of bony fishes. *Journ. comp. Neurology*. Vol. VIII. p. 162. 1898.
15. HERRICK, C. J. Ruge on the facial nerve. *Dieselbe Zeitschr.* Vol. VIII. p. LXXII. 1898.
16. HOLMQVIST, O. Der Musculus protractor hyoidei (geniohyoideus Auctt.) und der Senkungsmechanismus des Unterkiefers bei den Knochenfischen. *Lunds universitets årsskrift*. N. F. Afd. 2. Bd. 6. Nr. 6. 1910.
17. JOURDAIN, S. Des muscles de l'appareil maxillo-mandibulaire de quelques poissons osseux. *Revue. Sci. Natur.* T. VII. Nr. 1. p. 36. 1878.
18. JUGE, M. Recherches sur les nerfs cérébraux et la musculature céphalique du *Silurus glanis* L. *Diss. Revue suisse de Zool.* T. 6. fasc. 1. Genève 1899.
19. LUTHER A. Untersuchungen über die vom N. trigeminus innervierte Muskulatur der Selachier. *Acta soc. sci. fennicæ*. Bd. XXXVI. N:o 3. 1909.

20. LUTHER, A. Beiträge zur Kenntnis von Muskulatur und Skelett des Kopfes des Haies *Stegostoma tigrinum* Gm. und der Holocephalen mit einem Anhang über die Nasenrinne. *Dieselbe Zeitschr.* Bd. XXXVII. N:o 6. 1909.
  21. MC MURRICH, I. P. The myology of *Amiurus catus* Gill. *Proceed. canad. instit. Toronto.* Vol. II. fasc. 3. p. 311. 1884.
  22. MÜLLER, E. Untersuchungen über die Muskeln und Nerven der Brustflosse und der Körperwand bei *Acanthias vulgaris*. *Anatom. Hefte.* Bd. 43. Heft 129. 1911.
  23. POLLARD, H. B. On the anatomy and phylogenetic position of *Polypterus*. *Zool. Jahrb. Abt. Anatomie.* Bd. 5. p. 387. 1892.
  24. RIDEWOOD, W. G. On the cranial osteology of the fishes of the families Mormyridæ, Notopteridæ, Hyodontidæ, Osteoglossidæ, Pantodontidæ, and Phractolæmidæ. *Journ. Linn. Soc. Zoology.* Vol. XXIX. p. 188—217, 252—282. 1904, 1905.
  25. RIDEWOOD, W. G. On the cranial osteology of the fishes of the families Elopidae and Albulidae, and of the clupeoid fishes. *Proceed. zool. Soc. London.* 1904. Vol. II. p. 35—81, 448—493.
  26. RUGE, G. Über das peripherische Gebiet des N. facialis bei den Wirbeltieren. *Festschr. f. Carl Gegenbaur.* Bd. III. 1896.
  27. SÖRENSEN, W. Om Oppustningssækken hos *Tetrodon* og Aandedrættet hos *Clarias*. *Naturhist. Tidsskrift.* 3:dje Række. Bd. XIII. Heft. 3. p. 379. 1883.
  28. STANNIUS, H. Über das peripherische Nervensystem des Dorsches, *Gadus callarias*. *Archiv f. Anat. Physiol. u. Medicin.* Herausgegeben v. Johannes Müller. Jahrg. 1842. p. 338.
  29. STANNIUS, H. Das peripherische Nervensystem der Fische. Rostock 1849.
  30. VETTER, B. Untersuchungen zur vergleichenden Anatomie der Kiemen- und Kiefermuskulatur der Fische. Teil I. Selachier. *Jenaische Zeitschr. f. Naturwiss.* Bd. VIII. p. 405. 1874.
  31. VETTER, B. Untersuchungen zur vergleichenden Anatomie der Kiemen- und Kiefermuskulatur der Fische. Teil II. A. *Chimæra monstrosa*. B. *Acipenser sturio*. C. Knochenfische. *Dieselbe Zeitschr.* Bd. XII. p. 431. 1878.
  32. WINTHER, G. Fiskenes Ansigt. *Naturhist. Tidsskr.* 3:dje Række. Bd. X. p. 253. Bd XI. p. 267. 1876—1878.
-



# Tafelerklärung.

---

Sämtliche Figuren beziehen sich auf *Gadus callarias* Linné und sind in natürlicher Grösse gezeichnet. Die Nerven sind jedoch der Deutlichkeit halber fast durchgehends gröber dargestellt worden, als sie tatsächlich sind.

- Fig. 1. Die *Mm. adductor mandibulæ, levator et adductor arcus palatini, dilatator, adductor et levator operculi*. Seitenansicht nach Wegnahme der Haut mit Unterhautgewebe, der Suborbitalknochen, des *Lacrymale*, des *Nasale* und des Auges nebst der Orbitalfascie. Der fascieartige Hinterteil der ersten Portion des *M. adductor Mandibulæ* ist weggelassen, um den Faserverlauf der zweiten Portion sichtbar zu machen.
- Fig. 2. Zweite und dritte Portionen des *M. adductor mandibulæ* der rechten Seite, von innen. Beide Muskeln sind hinten abgeschnitten, und der Bauch *dA<sub>2</sub>* sowie die dritte Portion (*A<sub>3</sub>*) sind nach unten umgelegt worden, um die Sehnenbildung an der Innenseite der zweiten Portion zu zeigen.
- Fig. 3. Innervierung der zweiten und dritten Portionen des *M. adductor mandibulæ*. Links, von aussen. Die zweite Portion ist linkshin umgelegt worden; die vierte Portion wurde unfern ihres Ursprungs abgeschnitten. Die sehnigen Partien der Muskeln treten deutlich hervor.
- Fig. 4. Mandibularportion des *M. adductor mandibulæ* der rechten Seite. Die Insertionssehnen der zweiten und dritten Portionen sind durch punktierte Linien angedeutet worden.
- Fig. 5. Hyohyoidmuskeln der linken Seite, *Nervus hyoideus facialis*. Die innere Kiemenhaut ist weggenommen.
- Fig. 6. Ventralansicht der *Mm. protractores hyoidei*; die Innervierung wird auf der linken Seite der Figur dargestellt. Die weissen Stellen bedeuten, dass die Nerven hier in der Masse des Muskels eingebettet liegen.
- Fig. 7. Verlauf der Nervenstämme an der Innenseite des Unterkiefers. Der *Mandibularis externus facialis* ist weiss dargestellt worden.

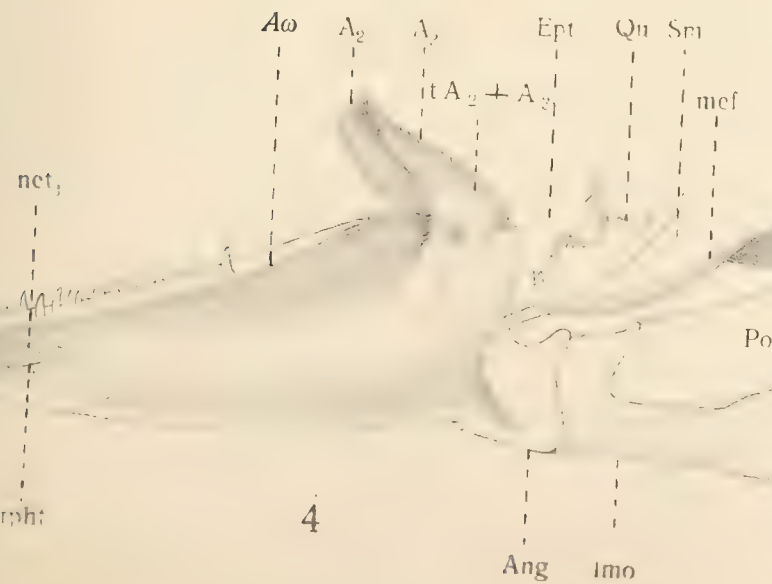
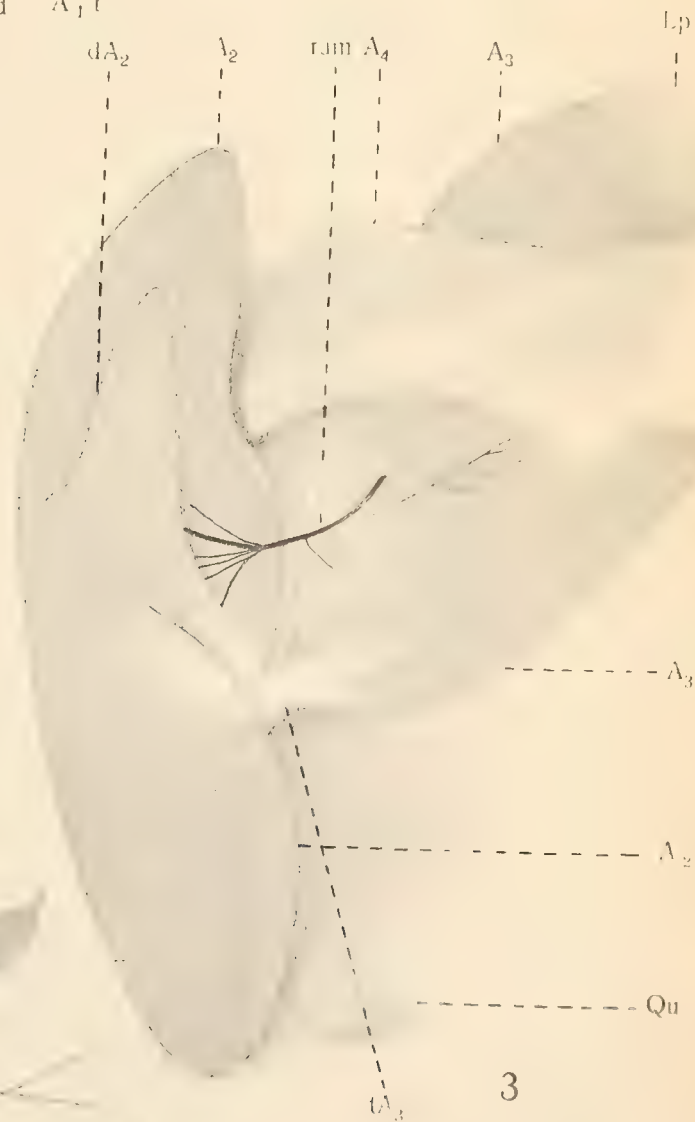
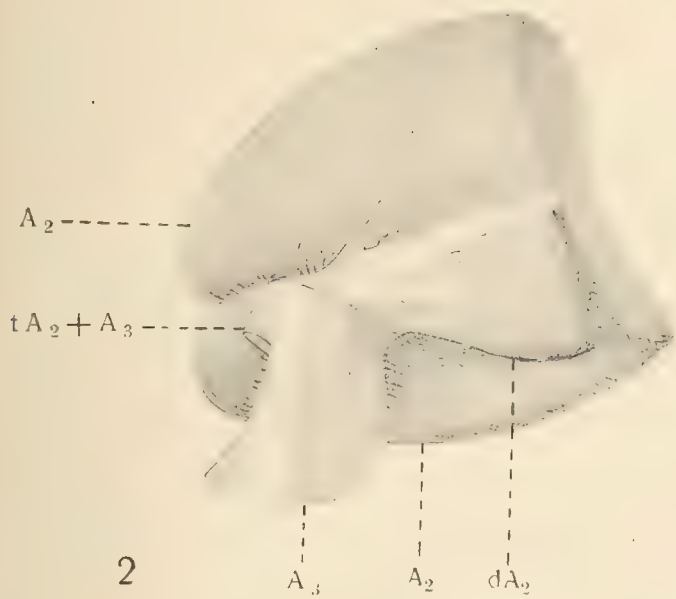
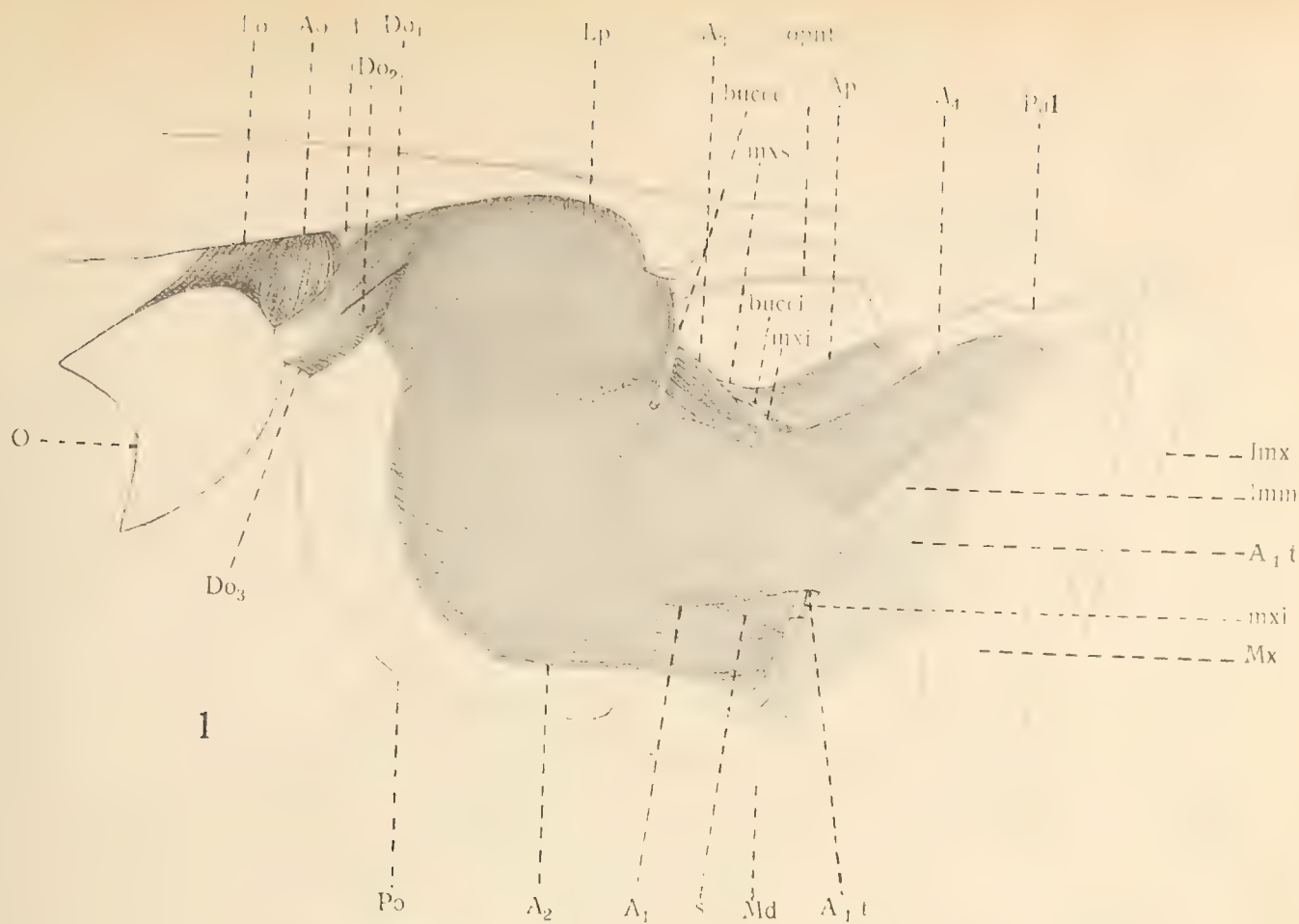
### Bezeichnungen.

<i>A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub>, A<sub>3</sub>, A<sub>4</sub>, A<sub>5</sub></i>	Portionen des <i>M. adductor mandibulæ</i> .
<i>A<sub>1</sub><sup>t</sup></i>	Insertionssehne der ersten Portion des <i>M. add. mand.</i>
<i>abp</i>	<i>Mm. abductores proximi</i> der Kiemenhautstrahlen.
<i>Ang</i>	Angulare des Unterkiefers.
<i>AO</i>	<i>M. adductor operculi</i> .
<i>Ap</i>	<i>M. adductor arcus palatini</i> .
<i>Art</i>	Articulare des Unterkiefers.

<i>bucce</i>	N. buccalis externus.
<i>bucci</i>	N. buccalis internus.
<i>cm</i>	Cartilago Meckelii.
<i>Cth</i>	Ceratohyale.
<i>dA<sub>2</sub></i>	Bauch <i>d</i> der zweiten Portion des M. adduct. mand.
<i>Do<sub>1</sub>, Do<sub>2</sub>, D<sub>3</sub></i>	Portionen des M. dilatator operculi.
<i>Dt</i>	Dentale des Unterkiefers.
<i>eA<sub>2</sub></i>	Bauch <i>e</i> der zweiten Portion des M. adduct. mand.
<i>Eph</i>	Epihyale.
<i>Ept</i>	Ektopterygoid.
<i>f</i>	Fascie oder Membran zwischen den Mm. Dilat. und Adduct. operculi.
<i>Hmd</i>	Hyomandibulare.
<i>Hyhi</i>	M. hyohyoideus inferior.
<i>Imx</i>	Zwischenkiefer.
<i>Io</i>	Interoperculum.
<i>Lig</i>	Ligament zwischen dem Suboperculum und dem Præoperculum.
<i>lmm</i>	Ligamentum mandibulo-maxillare posterius.
<i>lmo</i>	Ligamentum mandibulo-operculare.
<i>Lo</i>	M. levator operculi.
<i>Lp</i>	M. levator arcus palatini.
<i>Md</i>	Unterkiefer.
<i>mef</i>	N. mandibularis externus facialis.
<i>Mx</i>	Oberkiefer.
<i>mxi</i>	N. maxillaris inferior trigemini.
<i>mxi<sub>1</sub></i>	oberer Terminalzweig } des vorigen Nerven.
<i>mxi<sub>2</sub></i>	
<i>mxs</i>	N. maxillaris superior trigemini.
<i>nh</i>	N. hyoideus facialis.
<i>nct<sub>1</sub></i>	Hautast des N. max. inf. trig.
<i>nct<sub>2</sub>, nct<sub>3</sub></i>	Zweige dieses Hautastes.
<i>O</i>	Operculum.
<i>oph</i>	Nn. ophtalmici.
<i>Pal</i>	Palatinum.
<i>Ph</i>	M. protractor hyoidei.
<i>Po</i>	Præoperculum.
<i>Qu</i>	Quadratum.
<i>ram</i>	N. ad musc. adduct. mand.
<i>rh<sub>m7</sub></i>	Nervenast für das Seitenlinienorgan 7 des Hyomandibularsystemes.
<i>rphf</i>	Ast des N. hyoid. fac. für den M. protract. hyoid.
<i>rpht</i>	Ast des N. max. inf. trig. für denselben Muskel.
<i>rtw</i>	Äste des N. max. inf. trig. für den Mandibularportion des M. adduct. mand.
<i>Sm</i>	Symplecticum.
<i>So</i>	Suboperculum.
<i>Sth</i>	Stylohyale.
<i>tA<sub>2</sub> + A<sub>3</sub></i>	Gemeinsame Sehne der zweiten und dritten Portionen des M. adduct. mand.
<i>tA<sub>3</sub></i>	Sehne der dritten Portion desselben Muskels.

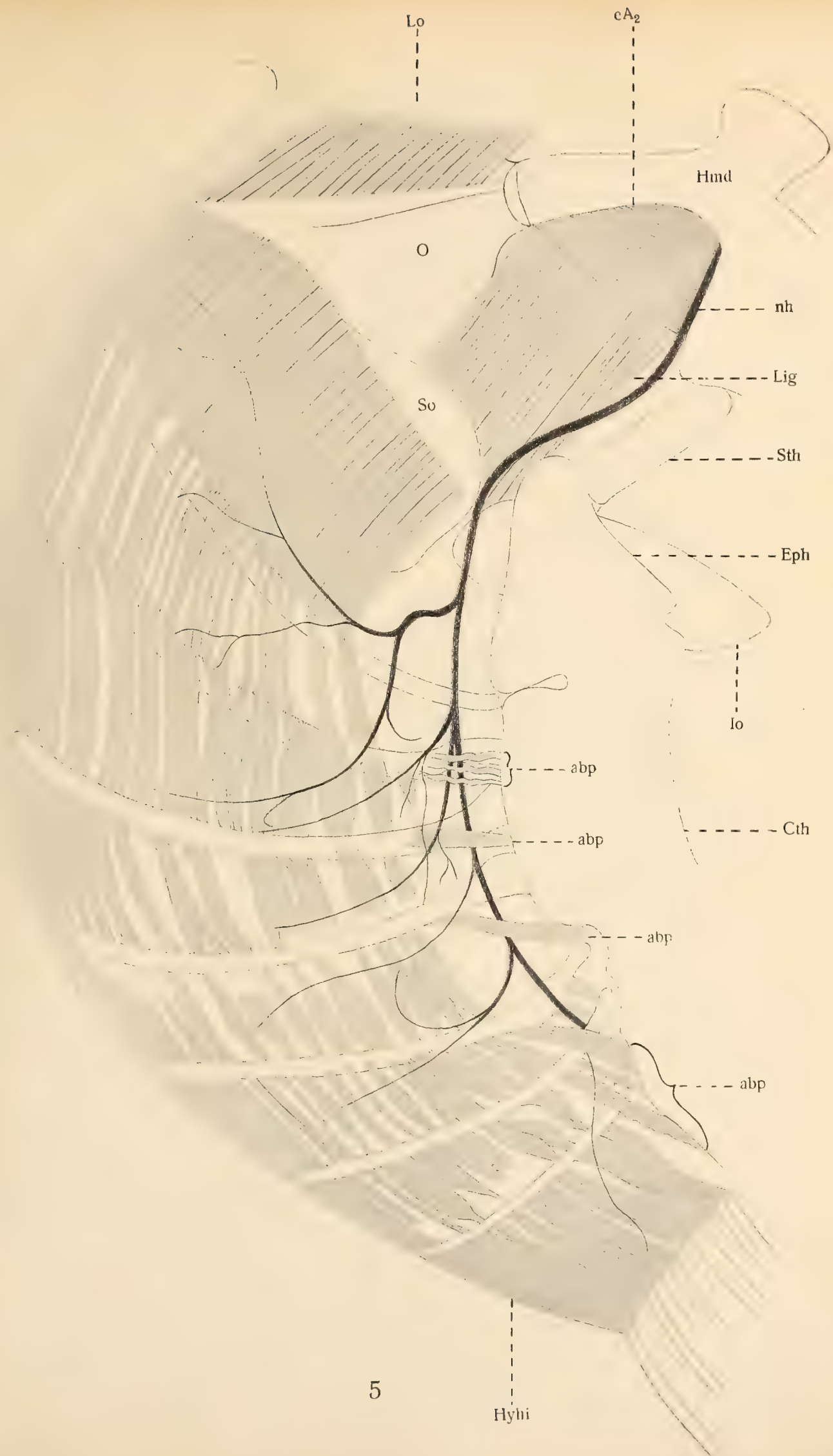




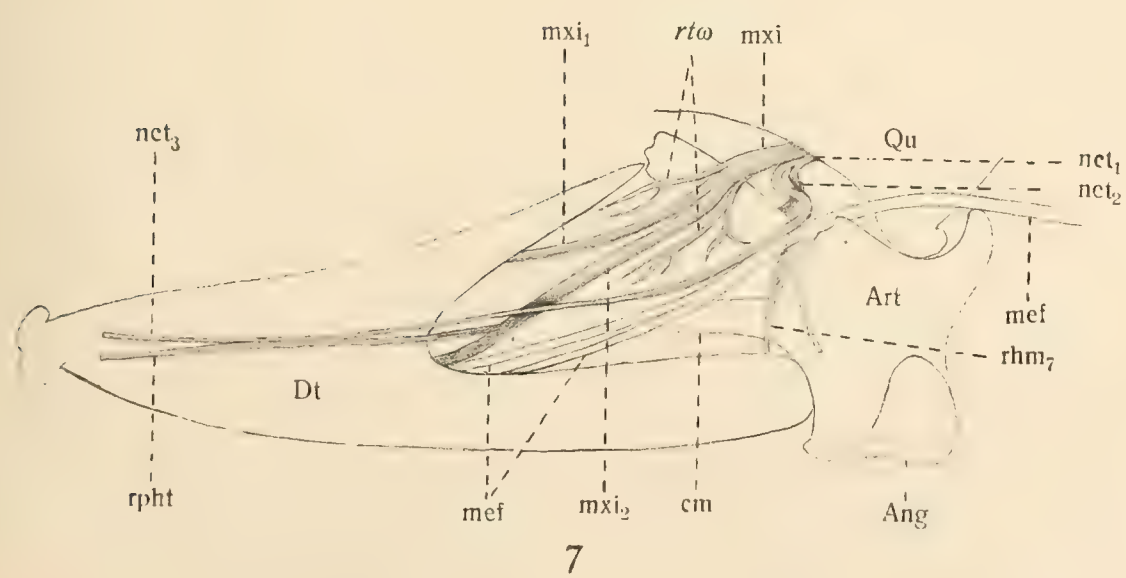
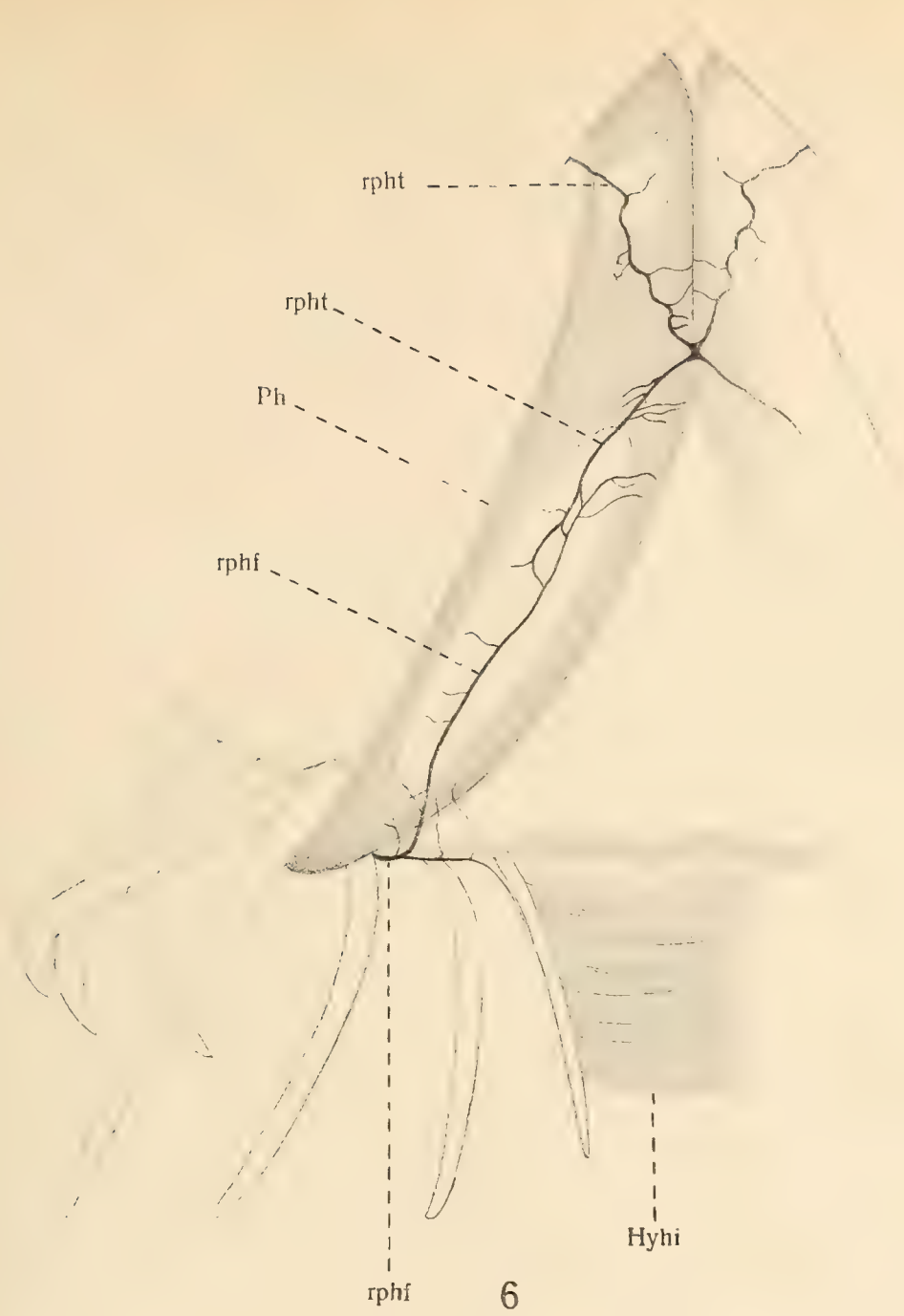
















LUNDS UNIVERSITETS ÅRSSKRIFT. N. F. Afd. 2. Bd 7. Nr 8.  
KONGL. FYSIOGRAFISKA SÄLLSKAPETS HANDLINGAR. N. F. Bd 22. Nr 8.

---

# EINE NEUE METHODE ZUR ZUCKERBESTIMMUNG

VON

IVAR BANG

— — — — —

Aus dem med.-chemischen Institut der Universität Lund



LUND 1911  
HÅKAN OHLSSONS BUCHDRUCKEREI





Vor einigen Jahren habe ich ein Verfahren zur Bestimmung des Traubenzuckers ausgearbeitet, welches darin besteht, dass das gebildete Kupferoxydul durch Gegenwart von KCNS als farblose Verbindung in Lösung gehalten wird. Das überschüssig vorhandene Kupferoxyd wird schliesslich mit Hydroxylamin reduziert. Der Verbrauch an Hydroxylaminlösung entspricht dem nicht reduzierte Kupferoxyd, wodurch man aus der Differenz das von dem Zucker reduzierte Kupferoxyd berechnen kann.

Diese Methode ist von verschiedenen Seiten nachgeprüft worden und hat allgemein eine günstige Aufnahme erfahren. Sie wird auch jetzt in allen Lehrbüchern als eine einfache und bequeme Methode empfohlen.

Allerdings lässt sich doch etwas gegen das Verfahren einwenden: 1) Die Titrirflüssigkeiten sind recht teuer 2) die Kupferlösung ist nicht unbegrenzt haltbar. Nach 3 Monaten fängt die Titer an sich zu ändern. Als ein dritter Einwand wird angeführt, dass ein unrichtiger Titer der Kupferlösung nicht korrigiert werden kann. Ist z. B. die Lösung anfangs zu konzentriert gemacht worden, kann man nicht durch Verdünnung den richtigen Titer herstellen, sondern muss die ganze Lösung verworfen. Befolgt man aber die Vorschriften genau, wird diese Eventualität nicht eintreffen können.

In der Hoffnung, dass die oben angeführten Unangenehmlichkeiten sich beseitigen lassen können, habe ich versucht das KCNS durch ein anderes Salz zu ersetzen. Hierzu ist *JK* besonders geeignet, kommt doch des hohen Preises wegen nicht in Betracht. *BrK* ist auch brauchbar, aber auch etwas teuer und das Verfahren sollte wo möglich billig sein. Diese Forderung füllt aber das *Kaliumchlorid*, welches auch das Kupferoxydul in Lösung als farblose Verbindung halten kann. Der Preis des *KCl* ist etwa ein Drittel des *KCNS*. Es ist auch klar dass eine mit *KCl* versetzte Kupferlösung unverändert haltbar ist, wenn genügend Kaliumkarbonate dabei sind.

Vollkommen kann aber das *KCl* nicht das *KCNS* ersetzen: *KCl* vermag nur relativ geringe Kupferoxydulmengen in Lösung zu halten. Während man beim *KCNS* eine 60 mgr Zucker entsprechende Kupferoxydulmenge in (50 ccm) Lösung hält, lässt sich beim *KCl* nicht mehr als eine höchstens 20 mgr Zucker entsprechende Kupferoxydulmenge in Lösung halten.

Die Frage in wie weit diese Beeinträchtigung der Methode gegenüber den Vorteilen derselben einer entscheidenden Bedeutung zukommt oder nicht, lasse ich offen stehen. Es hat sich nämlich herausgestellt, dass man das folgende *Titrationungsverfahren* ganz wesentlich verschärfen kann und zwar in der Weise, dass man nicht wie früher das nicht reduzierte Kupferoxyd bestimmt und daraus das vom Zucker reduzierte indirekt berechnet, sondern dadurch, dass man *direkt* das vom Zucker reduzierte Kupferoxydul titrimetrisch bestimmt. Dies bedeutet principiell einen wesentlichen Vorteil: Man hat nicht nötig den Titer der Kupferlösung exakt festzustellen, da nur das *reduzierte* Kupferoxydul titriert wird. Was sonst übrig bleibt ist — innerhalb gewissen Grenzen — für die Titration gleichgültig. Also braucht man nur bei der Bereitung der Kupferlösung die Salze auf der Handwaage grob abzuwägen und nicht wie früher peinlich genau auf der chemischen Präzisionswaage.

Als Titrierflüssigkeit wird also nicht mehr Hydroxylaminlösung verwendet, sondern eine  $\frac{1}{100}$  normale Jodlösung.

Bekanntlich wird ein Kupferoxydsalz in Lösung durch JK unter Bildung von freiem Jod *reduziert*:  $\text{CuCl}_2 + \text{KJ} = \text{CuCl} + \text{KCl} + \text{J}$ . Diese Reaktion ist zwar reversibel, verwendet man aber ein Ueberchuss von JK, geht die Reaktion praktisch ganz nach links d. h. zur Bildung von CuCl. Bei der Titration nach LEHMANN wird deswegen auch das nach der Reduktion durch Zucker übrig gebliebene Kupferoxyd nach Ausäuren mit Schwefelsäure jodometrisch bestimmt. Da aber diese Reaktion nur langsam zu Ende geht und zudem ein bedeutenden Ueberschuss von JK fordert, ist sie nicht sehr praktisch und jedenfalls nicht billig. Auch hat sie keine allgemeine Verwendung gefunden.

Diese Reduktion des Kupferoxyds durch JK findet nur bei *saurer* Reaktion statt. In *alkalischer* Lösung wirkt J ganz anders. Hier wirkt das freie J *oxydierend* auf Kupferoxydul unter Bildung von Kupferoxyd während Kupferoxyd *nicht* von JK angegriffen wird:  $\text{Cu}(\text{OH}) + \text{J} + \text{KHCO}_3 = \text{Cu}(\text{OH})_2 + \text{JK} + \text{CO}_2$ . Und diese Reaktion ist *nicht* reversibel. Hat man also das Kupferoxydul durch KCl als farblose Verbindung in der Lösung, verbraucht diese Lösung Jod und Bildung der blauen Kupferoxyd-Kalium-Karbonat. Es ist klar, dass keine fixen Alkalien vorkommen können, sondern dass auch hier — wie übrigens auch bei meiner ersten Methode — die Lösung nur *Karbonate* und zwar auch *Bikarbonate* enthalten darf. Da nun diese Oxydation des Kupferoxyduls durch Jod ausserordentlich schnell verläuft, ist die jodometrische Bestimmung des Kupferoxyduls sehr bequem, besonders auch weil die Jodometrie an sich unsere eleganteste und feinste Titriermethode darstellt.

Selbstverständlich wird auch hier *Stärkelösung* als *Indikator* verwendet. Nun ist aber die Kupferlösung blau und Jod-Stärke ebenfalls blau. Man konnte also erwarten, dass der Umschlagspunkt wenig scharf sein soll, besonders weil die reduzierte Kupferlösung durch die Oxydation immer mehr blau wird. Es soll auch zugegeben werden, dass der Umschlagspunkt nicht so schön wie bei einer farblosen Flüssigkeit ausfällt. Und hat man eine 20 mgr Hexose entsprechende Kupferlösung (50 ccm) ist auch der Umschlagspunkt nicht leicht exakt zu bestimmen.



Verdünt man aber die Kupferlösung bis 50 ccm 10 mgr Zucker entspricht, ist diese Lösung himmelblau gefärbt und kontrastiert sehr scharf gegen die tiefelblaue Jod-Stärkefärbung. Selbst bei der Verwendung von  $\frac{1}{100}$  normaler Jodlösung ist also der Umschlagspunkt sehr exakt und differiert kaum auf 1 Tropfen.

Ich habe nicht desto weniger versucht das Kupfer durch andere farblosen Metalle zu ersetzen aber ohne Erfolg. Am besten hat sich *Eisen* bewährt. Beim Ueberschuss von Karbonat hält sich zwar das Eisenoxyd auch beim Kochen in Lösung — Es wird auch vom Zucker zum Eisenoxydul reducirt und das Oxydul auch durch Jod oxydiert. Doch geht diese Oxydation nur langsam vor sich, und das Verfahren ist für Titration ungeeignet.

Wenn man aber nur höchstens eine Menge von 10 mgr Zucker bestimmen kann, während man nach der früheren Methode die sechsfache Zuckermenge bestimmt, fragt es sich, ob das Verfahren ebenso genau sein kann wie diese. Es ist ganz klar, dass die neue Methode eventuel eine 6 Mal grössere Verdünnung der Zuckerlösung fordert, und also wird der Versuchsfehler auch 6 Mal multipliciert. Wenn das neue Verfahren betreffs Genauigkeit mit der älteren konkurrieren soll, muss der Versuchsfehler 6 Mal kleiner sein. Bei dem älteren Verfahren entsprechen 50 cc Hydroxylaminlösung 60 mgr Zucker, oder durchschnittlich 1 mgr Zucker auf 1 ccm Titrierflüssigkeit. Bei der neuen Methode entsprechen 25,65 ccm Jodlösung 10 mgr Zucker oder von dem letzten Wert abgesehen durchschnittlich 2,67 ccm Jodlösung auf 1 mgr Zucker. Setzt man voraus, dass man gleich scharf mit beiden Titrierflüssigkeiten titrieren kann, wird schon die Differenz grösstenteils ausgeglichen, indem von der Jodlösung pro mgr etwa 3 Mal so viel verbraucht wird wie von der Hydroxylaminlösung. Hierzu kommt aber der Umstand, dass der Umschlagspunkt bei Verwendung von Jod viel scharfer ist als beim Hydroxylamin. Hier titriert man bis farblos, indem die blaue Farbe der Kupferlösung immer mehr abgefärbt wird. Bei Verwendung gefärbter Lösungen wie Harn interferiert eine grünliche Mischfärbung, die auf der Bestimmung des Umschlagspunktes recht störend wirkt. In diesem Falle kann man den Endpunkt nur auf ca. 0,5 cc oder von  $\frac{1}{2}$  bis 1 mgr schätzen. Ähnliche Störungen kommen bei Verwendung von Jod nicht vor: Man kann den Harn ebenso scharf wie eine reine Zuckerlösung titrieren.

Hierzu kommt noch eine wesentliche Sache. Beim Kochen der Lösung wird das Kupferoxyd reducirt. Während man aber vor der Titration dieselbe abkühlt, wird das Oxydul wieder von der Luft schon merkbar oxydiert. Dies tritt bei Verwendung von KCl noch mer hervor als beim KCNS. Diese Fehlerquelle lässt sich aber vollständig ausschliessen, da die Luftoxydation nur in der Hitze nennenswert fortgeht, wodurch die Titriermethode eine Präzisionsverfahren darstellt, welches sogar recht hohe Ansprüche erfüllen kann.

*Ausführung der Titration.* Man benutzt hierzu ein Jenakölbehen von 100 ccm mit abgesprengtem Rand. Die Zuckerlösung — 2 cc — oder weniger — nebst 55 ccm der Kupferlösung wird eingegossen und jetzt ein Gummischlauch von etwa 5 cm Länge über den Hals gezogen, bis etwa  $\frac{2}{3}$  übrig bleibt. Man kocht 3 Minuten, setzt aber wenn einige Secunden noch fehlen, einen Quetsch-



hahn über den Schlauch, klemmt noch vollen 3 Minuten zu und nimmt augenblicklich das Kolbchen von der Flamme weg, kühlt ab bis Zimmertemperatur, nimmt den Gummischlauch weg, setzt 1 cc einer 1 % Stärkelösung hinzu (1 gr. lösliche Stärke in 100 cc gesättigter KCl-Lösung. Diese Lösung ist haltbar) und titriert bis 2—4 Tropfen einem Umschlag zu tief blau bewirkt. Diese blaue Färbung muss mindestens 20—30 Sekunden persistieren. Anfangs wird das Jod momentan verbraucht. Wenn man aber in der Nähe des Umschlagspunktes kommt, muss man das Kolbchen *leise* umschütteln und vorsichtiger von der Jodlösung zusetzen, schliesslich tropfenweise, da das Jod erst in der Laufe von 1—2 Sekunden verbraucht wird. Es ist nicht gleichgültig, wenn die Lösung unvollständig abgekühlt wird. In diesem Falle wird ein wenig zu viel Jod verbraucht.

*Die Bereitung der Lösungen.* Man löst 160 gr  $\text{KHCO}_3$ , 100 gr  $\text{K}_2\text{CO}_3$  und 66 gr KCl mit etwa 700 ccm  $\text{H}_2\text{O}$  in einer 1 L-Kolbe. Bringt man zuerst das Bikarbonat und Wasser ins Kolbchen und nach Auflösen des Bikarbonats die übrigen Salze, geht die Auflösung schnell. Jetzt fügt man 100 ccm eine 4,4 % Kupfersulfatlösung oder 4,4 gr  $\text{CuSO}_4 + 5 \text{H}_2\text{O}$  hinzu und füllt auf bis Marke. Von dieser Stammlösung werden 300 ccm mit gesättigter KCl-Lösung auf 1000 ccm verdünnt. Diese Flüssigkeit ist unbegrenzt haltbar. Sie soll erst nach Stehen einigen Stunden verwendet werden. Eine  $n/100$  Jodlösung ändert den Titer schon nach recht kurzer Zeit, und wird deswegen am besten frisch bereitet. Dies lässt sich auf bequem in folgende Weise ausführen: Man giesst etwa 1 ccm einer 2 %  $\text{KJO}_3$ -Lösung in einer 100 cc Messkolbchen, setzt etwa 1 gr JK hinzu, weiter genau 10 cc  $n/10$  HCl oder  $n/10$   $\text{H}_2\text{SO}_4$ . Es wird eine äquivalente Jodmenge freigemacht nach der Formel  $\text{KJO}_3 + 5 \text{KJ} + 6 \text{HCl} = 6 \text{KCl} + 3 \text{H}_2\text{O} + 6 \text{J}$ . Das Jod löst sich in das überschüssige JK. Man füllt bis auf der Marke auf. Der Umsatz der Salze findet momentan quantitativ statt. Die Lösung bleibt ein Paar Tagen unverändert.

*Die Reduktionstabelle.* 5 Versuchsserien ergaben folgendes Resultat:

mgr. Dextrose	Serie no 1	N:o 2	N:o 3	N:o 4	N:o 5	Durchschnitt	Differenz der benachbarten Werte
1	2.65	2.60	2.65	2.60	2.60	2.60	2.60
2	5.30	5.25	5.25	5.20	5.25	5.25	2.65
3	8.05	8.05	8.15	8.10	8.05	8.10	2.85
4	10.70	10.90	10.85	10.70	10.90	10.85	2.75
5	13.40	13.65	13.65	13.40	13.65	13.55	2.70
6	16.00	16.20	16.35	16.30	16.30	16.25	2.70
7	18.85	18.90	18.75	18.90	18.80	18.85	2.60
8	21.20	21.65	21.35	21.25	21.50	21.40	2.55
9	23.60	23.70	23.70	23.50	23.60	23.60	2.20
10	25.70	25.65	25.55	25.60	25.75	25.65	2.05

Aus der Tabelle und besonders der letzten Kolumne geht die bemerkenswerte Tatsache hervor, dass abgesehen von dem letzten oder den zwei letzten Werten die Reduktion überall mit der Zuckermenge *direkt proportional* ist. Bei 10 mgr Dextrose

wird aber alles Kupferoxyd verbraucht und die Flüssigkeit also ganz abgefärbt (Dass die Lösung aber nicht übertitriert ist, zeigt z. B. ein Versuch mit 9.75 mgr Dextrose. Hier war der Jodverbrauch 25,05 ccm.). Infolgedessen kann man durch Division der verbrauchten Jodlösung in ccm mit dem Faktor 2,67 die vorliegende Zuckerquantität in mgr finden, wie die Tabelle zeigt.

Gefundene Werte	Aus dem Faktor 2.67 berechnete Werte	Differenz mgr D	Aus dem Faktor 2.65 berechnete Werte	Differenz mgr D	Aus dem Faktor 2.70 berechnete Werte	Differenz mgr D
2.60	2.67	+ 0.07	2.65	+ 0.05	2.70	+ 0.10
5.25	5.34	+ 0.09	5.30	+ 0.05	5.40	+ 0.15
8.10	8.01	- 0.09	7.95	- 0.15	8.10	+ 0.0
10.85	10.68	- 0.17	10.60	- 0.25	10.80	- 0.05
13.55	13.35	- 0.20	13.25	- 0.30	13.50	- 0.05
16.25	16.02	- 0.23	15.90	- 0.35	16.20	- 0.05
18.85	18.69	- 0.16	18.55	- 0.30	18.90	- 0.05
21.40	21.36	- 0.04	21.20	- 0.20	21.60	+ 0.20
23.60	24.03	+ 0.43	23.85	+ 0.15	24.30	+ 0.70
25.65	26.70	+ 1.05	26.50	+ 0.85	27.00	+ 1.35

Bei Verwendung des Faktors 2,67 bekommt man also abgesehen von dem letzten Werte einen Fehler von etwa 0,2 mgr D. Wenn also die Kupferlösung nicht vollständig entfärbt wird, kann man für praktische Zwecke den kleinen Fehler nachlässigen. Eine derartige Uebereinstimmung kommt bei keinem anderen Titrierverfahren zur Zuckerbestimmung vor. Für exakte Bestimmungen muss man selbstverständlich den Werten der Tabelle genau folgen.

Eine schöne Bestätigung der Genauigkeit dieses Verfahrens hat die Bestimmung von Bruchteilen Zuckermilligramme (0,5—9,5 mgr) geliefert, wie das folgende Diagramm zeigen kann. (Siehe die graphische darstellung Seite 11.)

Fragt man zuletzt, in wie weit die neue Methode eine eben so grosse Genauigkeit wie die alte erwiesen hat, ist der durchschnittliche Versuchsfehler etwa 0,1—0,2 mgr Zucker (höchstens!) d. h. 1—2 % der gefundenen Werte. Bei Verwendung von 2 cc Zuckerlösung und Gegenwart von 10 mgr Zucker ist der procentische Wert also 0,500 Zucker. Der grösste Fehler — wird dann: 0,490 oder 0,01 % weniger (bzw. mehr), sein, trotzdem man die gefundenen Werte mit 50 multiplizieren muss! Bei der alten Methode ist jedenfalls bei gefärbten Lösungen der Versuchsfehler etwa 0,5 cc Hydroxylaminlösung oder ca. 1 mgr von 60 mgr Zucker. Hier ist also der Versuchsfehler ebenso gross. Beim Vergleich der beiden Methoden hat es sich also herausgestellt:

- 1) Beide sind ungefähr gleich genau.
- 2) Doch ist der Umschlagspunkt bei der neuen viel schärfer und angenehmer als bei der alten Methode.
- 3) Es ist ein grosser Vorteil, dass man bei der neuen das reducierten Kupferoxydul und nicht das übrig gebliebene Kupferoxyd bestimmt.
- 4) Es ist principiell richtiger, dass man die Möglichkeit der Luftoxydation während der Abkühlung ausschliesst.
- 5) Die neue Methode ist bedeutend billiger als die alte — Nach Angaben von der Apotheke »Svanen«, Lund stellen sich die Preise für 5 L. Kupferlösung 1,75



Krone für die neue und 17,50 Kronen für die alte. Hierzu kommt, dass die Jodlösung bedeutend billiger ist als die Hydroxylaminlösung.

6) Die neue Lösung ist absolut haltbar.

7) Bei dem neuen Verfahren kann man ganz wesentlich *geringere* Zuckerquantitäten exakt bestimmen als bei der alten. Anstatt nämlich die Kupferlösung mit der KCl-Lösung vorher zu mischen, und dann die Zuckerlösung — 2 cc — zuzusetzen kann von die etwa 0,01 %—0,02 % Zuckerlösung 38,5 abmessen, 11,5 gr KCl in Substanz und 16,5 cc Kupferlösung zusetzen. Man hat dann das richtige Salzgemisch. Es ist klar, dass diese Modifikation z. B. für die Blutzuckerbestimmung wesentliche Vorteile darbietet. Man verdünnt einfach das Blut mit ca. 10 Vol. Wasser, schägt das Eiweiss mit Eisen (Oxyd. ferr. solubile) nieder und verwendet das wasserklare Filtrat direkt ohne ergendwie einzuengen.

8) Für die Bestimmung des Harnzuckers bietet das neue Verfahren noch andere specielle Vorteile dar, welche in dem folgenden beschreiben werden soll.

Die Eigenfärbung des Harns beeinträchtigt bei der alten Methode die Schärfe des Umschlagspunktes; indem der Umschlag nicht von rein blau bis farblos, sondern bis *gelb* geht. Infolgedessen bekommt man in der Nähe des Umschlagspunktes eine grün-gelbe Mischfärbung, die graduel in rein gelb übergeht. Besonders bei stark gefärbten Harnen ist diese Mischfärbung sehr störend. Bei dem neuen Verfahren dagegen wird nicht bis farblos titriert, sondern im Gegenteil, bis maximaler blauen Färbung und dann bis Umschlag zu tiefblau. Eine eventuelle grünliche Mischfärbung kann nur dieser Umschlag bis tiefblau verschärfen. Tatsächlich kann der Harn ebenso scharf wie eine reine Zuckerlösung titriert werden.

Jeder Harn zeigt die sogenannte Eigenreduktion, indem verschiedene normale Harnbestandteile wie Harnsaure, Kreatinin, Urochrom u. a. die Kupferlösungen reducieren. Bei meiner alten Methode ist diese Reduktion mehr hervortretend als bei den übrigen früheren Methoden, wo das Kupferoxydul ausgeschieden wird, und zwar aus den Grunde, dass ein Teil des Oxyduls beim Harn hier nicht ausgeschieden wird und deswegen die Bestimmung entgeht.

Diese Eigenreduktion ist bei der neuen Methode weniger hervortretend als bei der alten, wahrscheinlich weil der Gehalt an Alkali hier geringer ist. Bei der Untersuchung von zwölf zuckerfreien Harnen verschiedener Zusammensetzung wurde nach der alten Methode eine Reduktion entsprechend 0,114 bis 0,696 % Dextrose bei der neuen von 0,09 bis 0,476 % gefunden. Die durchschnittliche Reduktion war 0,234 bzw 0,186 % oder bei der neuen Methode 22 % weniger<sup>1</sup>. Es ist klar, dass diese unbedeutliche Eigenreduktion des Harns bei der praktischen Zuckerbestimmung keine Rolle spielen kann. Man kann sie also ruhig nachlässigen.

Ein anderer Umstand muss aber bei der neuen Methode erwähnt werden. Der Harn braucht selbst etwas Jod. Höchst wahrscheinlich werden eben diese Jodverbrauchenden Körper eben beim Kochen mit Kupferlösung oxydiert und kommen also bei der Jodometrischen Titration nicht ins Betracht. Uebrigens ist dieser Jodverbrauch sehr unbedeutend. Dies in so fern man nur die augenblickliche Oxyda-

<sup>1</sup> Ebenso liegen die Verhältnisse bei der Blutzuckerbestimmung.



sion durch Jod berücksichtigt. Titriert man aber einen Harn bis Blaufärbung der Stärke, wird der Harn weiter langsam beim Stehen wieder entfärbt und man kann sogar nicht unbedeutende Jodmengen nach und nach zusetzen. Doch ist es nicht schwer bei der Titration der mit Harn gekochten Kupferlösung diese Fehlerquelle loos zu werden. Man titriert bis Blaufärbung und beobachtet dieselben etwa 10 Secunden. Die langsame Jodabsorption kann man nämlich erst nach 1—2 Minuten beobachten. Doch muss man eventuel zuerst das *Eiweiss* entfernen. Beim diabetischen Harn kommen in recht grosser Menge Jodbindende Stoffe vor, nämlich Aceton und Acetessigsäure. Diese verbrauchen nur sehr langsam das Jod, wenn die Lösung keine fixen Alkalien enthält und  $\frac{1}{100}$  Jodlösung verwendet wird. Uebrigens wird alles Aceton (Kochpunkt 60°) während des Kochens weggetrieben, wie Versuche es ermesen haben. Die Diacetsäure wird in Aceton umgebildet. Ein Vergleich der neuen und alten Methode gegenüber Diabetesharn hat auch eine genügende Uebereinstimmung zwischen beiden erwiesen.

*Harn N:o 1.* Anna P. Harnmenge 4,000 ccm. Sp. Gew. 1,040. Die LIEBENSche Acetonprobe stark positiv. GERHARDT: deutlich.

0,5 cc Harn + 9,5 cc H<sub>2</sub>O = 12,00 cc Hydroxylaminlösung = 40,4 mgr Zucker = 8,08 %.  
 0,1 cc Harn = 21,20 cc Jodlösung = 7,95 mgr Zucker = 7,95 %.

*Harn N:o 2.* Herta A. Harnmenge 4,100 ccm. Sp. Gew. 1,040. LIEBEN und GERHARD stark positiv.

0,5 cc Harn + 9,5 cc H<sub>2</sub>O = 10,5 cc Hydroxylaminlösung = 42,5 mgr Zucker = 8,5 %.  
 0,1 cc Harn — 21,30 cc Jodlösung — 8 mgr Zucker = 8,00 %.

Wenn man bedenkt, dass die procentischen Werte durch Multiplikation mit 200 bzw 1,000 gefunden worden sind, kann man wohl kaum mehr verlangen.

Schliesslich möchte ich einen Umstand besprechen, welches zwar nicht direkt mit der Methode selbst zusammenhängt, berühren. Die oben erwähnte Eigenreduktion des Harns ist zwar recht unbedeutend und für praktische Zwecke ohne Belang. Bei wissenschaftlichen Untersuchungen aber kann auch eine recht geringe Eigenreduktion hinderlich sein. Man hat auch verschiedene Vorschläge zur Beseitigung derselben vorgeschlagen. Z. B. haben VERF und BOHMANNSSON Schütteln des Harns mit *Blutkohle* empfohlen. Ein Zusatz von Salzsäure bis 10 % hindert die Absorption von Zucker durch die Kohle. Spätere Untersucher haben aber gefunden, dass trotzdem Blutkohle Zucker absorbiert. Dies ist auch für MERCKS und KAHLEBAUMS Präparate der Fall. Wir hatten unseres Präparat von der Apotheke *Svanen*, Lund bezogen. Es hat sich herausgestellt, dass es ein 20-Jahres altes Präparat unbekanntes Ursprungs war.

Dagegen habe ich wie übrigens früher andere Forscher (BANG und BOHMANNSSON, MICHAELIS und RONA) gefunden dass *Alkohol bis 10 %* die Absorption so gut wie vollständig verhindert, wenn die Zuckerkonzentration gering ist. Dagegen werden die übrigen reducierenden Stoffe des Harns so gut wie ganz absorbiert.

## Absorption von Zucker durch Blutkohle bei 10 % Alkohol der Lösung.

Gefunden <i>ohne</i> Kohle.	MERCKS Präparat.	MERCKS Präp. pro analysi.	KAHLBAUMS Präparat.
0,73 mgr. Dextrose	0,73 mgr.	0,73 mgr.	0,73 mgr.
4,87 » »	4,69 »	4,86 »	4,88 »
8,48 » »	8,00 »	8,15 »	8,22 »

Ohne Alkohol wurde beinahe 50 % Zucker durch Kohle absorbiert. Bei Verwendung von MERCKS mit HCl behandelter Blutkohle pro Analysi (100 g kosten 1,60 M) etwa 0,2—0,3 g (ein Theelöffel) für ca. 10 cc Harn reskirt man bis 0,5 % Zucker *keine* Absorption. In praxi verdünnt man 9 cc Harn mit 1cc 92—95 % Alkohol, setzt ein Theelöffel der Kohle hierzu, schüttet durch und filtriert gleich. Das Filtrat ist ungefärbt.

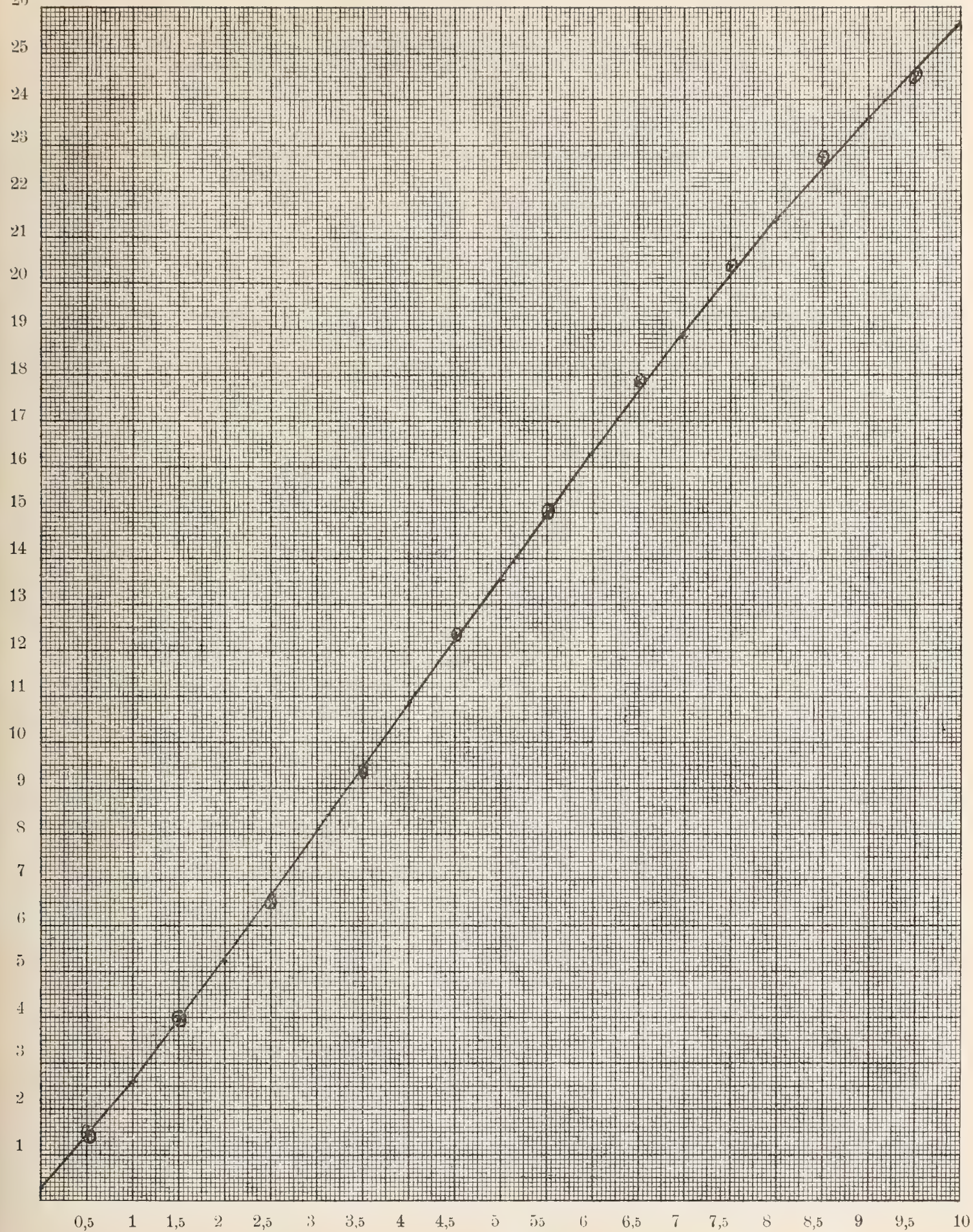
Die oben erwähnten Harne wurden auch nach diesem Verfahren behandelt. Bei Verdung der alten Methode wurde durchschnittlich 0,125 % gegen 0,234 % gefunden, bei der neuen 0,067 % gegen 0,186 %, oder eine Verminderung von 47 % bzw. 64 %. Da der Harn durchschnittlich 0,04 % Traubenzucker enthält ist also ersichtlich, dass die übrigen reducirende Stoffe so gut wie vollständig entfernt worden sind.

Die oben besprochende »neue« Methode lässt sich in verschiedenen Richtungen weiter ausarbeiten. So ist es mir gelungen eine »Microbestimmung« von sehr kleinen Zuckermengen von 0,05 bis 1,5 mgr auszuarbeiten, welche auch mit grosser Präzision arbeitet. Hierüber wird anderswo berichtet.





cc  
Jodlösung  
26







Kongl. Fysiografiska Sällskapets sammanträden  
1910—1911.

1910, d. 12 oktober:

Herr WALLENGREN refererade tre afhandlingar, en af fil. licentiat O. Holmqvist: »Ueber den Musculus protractor hyoidei und den Senkungsmechanismus des Unterkiefers bei den Knochenfischen». (Tryckt i Sällskapets Handlingar, Bd XXI, Nr 6); en af docenten Nils Rosén: »Beitrag zur Frage: Welches Keimblatt bildet das Skelett der Wirbeltiere?» (Tryckt i Sällskapets Handlingar, Bd XXI, Nr 7); och en af docenten Lännart Ribbing: »Kleinere Muskelstudien. I. Die Vorderarm- und Handmuskulatur von Sphenoden. II. Die distale Extremitätenmuskulatur von Pipa». (Tryckt i Sällskapets Handlingar, Bd XXI, Nr 8).

Herr RYDBERG framställde en ny formel för spektralserier.

1910, d. 9 november:

Herr BANG höll föredrag om mjölkens löpning.

1910, d. 2 december, Sällskapets årshögtid.

Herr FÜRST redogjorde för Sällskapets uppkomst och dess öden intill innevarande dag.

Herr WALLENGREN höll föredrag om förvärfvade egenskapers ärftlighet.

1910, d. 14 december:

Herr HENNIG gaf en öfversikt öfver Tibets och särskildt Trans-Himalayas geologi på grundvalen af Sven Hedins geologiska samlingar under resan 1906—1908.

Herr BRODÉN refererade tvänne afhandlingar en af fil. licentiat Louise Petré: »Extension de la méthode de Laplace à l'équation

$$\sum_{i=0}^{n-1} A_{1i}(x, y) \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^n A_{0i}(x, y) \frac{\partial^i z}{\partial y^i} = 0$$

(Tryckt i Sällskapets Handlingar, Bd XXII, Nr 3) och en af docenten H. Block: »Några variationsformler inom integralekvationernas teori.» (Tryckt i Sällskapets Handlingar, Bd XXII, Nr 1).

Herr CHARLIER talade om dubbellösningar i banbestämningsproblemet.

1911, d. 8 februari:

Herr RYDBERG höll föredrag om grundämnenas ordningstal, valenser och atomvikter.

Herr WEIBULL höll föredrag om åkerjordarnes reaktion, dess betydelse för växtnäringen och jordarnes bördighet.

Herr BORELIUS refererade senare delen af med. licentiat Gustaf Petréns afhandling: »Bidrag till mag- och duodenalsårets kirurgi. (Tryckt i Sällskapets Handlingar, Bd XXI, Nr 1).

1911, d. 22 mars.

Herr CHARLIER redogjorde för innehållet i en af honom författad afhandling: »Die Lagrange'sche Gleichung im Bahnbestimmungsprobleme». (Tryckt i Sällskapets Handlingar, Bd XXII, Nr 4).

Herr BROMAN höll föredrag »om existensen af en hittills obeaktad kroppshåla hos Petromyzonterna».

1911, d. 12 april.

Herr WALLENGREN refererade en af docent Nils Rosén författad afhandling: »Contributions to the fauna of the Bahamas». (Tryckt i Sällskapets Handlingar, Bd XXII, Nr 5).

Herr RAMBERG höll föredrag »om kvicksilfverlampor och om några användningar af ultraviolett ljus».

Herr RYDBERG refererade en af assistenten M. Siegbahn författad afhandling: »Magnetische Feldmessung». (Tryckt i Sällskapets Handlingar, Bd XXII, Nr 2).

1911, d. 10 Maj.

Herr RYDBERG gaf en matematisk framställning af diskontinuerliga former.

Herr BANG gaf en öfversikt öfver de undersökningar, som utförts af honom och herr OVERTON angående Krotalus-giftets verkningar.

Herr WEIBULL redogjorde för några nya kemisk-tekniska industrier af betydelse för jordbruket.

Under Fysiografiska sällskapets arbetsår 1910—1911 hafva funktionerat såsom

*Ordförande* professor SVANTE MURBECK,

*Sekreterare* professor A. V. BÄCKLUND och

*Redaktör* för Sällskapets Handlingar professor BENGT JÖNSSON och efter hans död professor HANS WALLENGREN.



sorier, IV, af *H. Wallengren*. Bidrag till kännedomen om botulismens bakteriologi, af *I. Forssman*. Bidrag till den tuberkulösa pleuritens patologiska anatomi, af *E. Wadstein*. Studier öfver Nemertiner, I. *Callinera* Bürgeri Bergendal, en representant för ett afvikande släkte bland palæonemertinerna, af *D. Bergendal*. Zur Theorie der relativ-Abelschen Zahlkörper, von *A. Wiman*. Parthenogenetische Embryobildung in der Gattung *Alchemilla*, von *S. Murbeck*. Hülftafeln zur Berechnung der säkularen Störungen der kleinen Planeten, von *G. Noréen* u. *S. Raab*. Ueber das Verhalten des Pollenschlauches bei *Alchemilla arvensis* (L.) Scop. und das Wesen der Chalazogamie, von *S. Murbeck*. Malaria och Mosquitos, inbjudning till medicine-doktorspromotionen den 31 maj 1900, af Promotor. Fysiografiska Sällskapets sammanträden 1899—1900. — **Bd. 12.** Fall af traumatiskt uppkommen ryggmärgsaffektion, af *Karl Petré*n. Studier öfver Nemertiner, I. *Callinera* Bürgeri Bergendal, en representant för ett afvikande släkte bland palæonemertinerna, kapitel 6—11 (Fortsättning), af *D. Bergendal*. Contributions to the astronomical theory of an Ice age, by *C. V. L. Charlier*. Studier öfver pollenslangarnes irritationsrörelser, af *B. Lidforss*. Researches into the graptolites of the Scanian and Vestrogothian Phyllo-Tetraraptus beds, by *S. L. Törnqvist*. Zur Kenntnis des Baues und der Entwicklung des Thallus bei den Desmarestien, von *B. Jönsson*. Bidrag till teorien för vågrörelse i strömmar, af *C. W. Oseen*. Utgräfningsarna af Tycho Brahes observatorier på ön Hven sommaren 1901, festschrift i anledning af 300-årsdagen af Tycho Brahes död, af *C. V. L. Charlier*. Fysiografiska Sällskapets sammanträden 1900—1901. — **Bd. 13.** Die ersten Entwicklungsstadien der Keimpflanze bei den Succulenten, von *B. Jönsson*. Über Anomalien im Baue des Nucellus und des Embryosackes bei parthenogenetischen Arten der Gattung *Alchemilla*, von *S. Murbeck*. Studien über Nemertinen, II. *Valencinura bahusiensis* Bgdl, ein Beitrag zur Anatomie und Systematik der Heteronemertinen, von *D. Bergendal*. Termoelektrisk Hysteresis, af *A. Upmark*. Bidrag till Bornholms fossila flora, Pteridofyter, af *Hj. Möller*. Zur Kenntnis des anatomischen Baues der Wüstenpflanzen, von *B. Jönsson*. Fysiografiska Sällskapets sammanträden 1901—1902. — **Bd. 14.** Der Musculus popliteus und seine Sehne, von *C. M. Fürst*. Studien über Nemertinen, III. Beobachtungen über der Bau von *Carinoma Oudemans* nebst Beiträgen zur Systematik der Nemertinen, von *D. Bergendal*. Fysikens utveckling till allmän tillståndslära. Inbjudning till filosofie doktorspromotionen den 29 maj 1903, af *J. R. Rydberg*. Fysiografiska Sällskapets sammanträden 1902—1903. — **Bd. 15.** Zur Kenntnis der Histogenese und des Wachstums der Retina, von *C. M. Fürst*. Researches of the graptolites of the lower zones of the Scanian and Vestrogothian Phyllo-Tetraraptus beds, II, by *S. L. Törnqvist*. Zur Theorie der mehrdeutigen automorphen Funktionen, von *T. Brodén*. Om det osmotiska trycket, af *A. V. Bäcklund*. Ueber den feineren Bau des Visceralganglions von *Anodonta*, von *T. Freidenfelt*. Fysiografiska Sällskapets sammanträden 1903—1904. — **Bd. 16.** Om sammanhanget mellan osmotiskt och elektriskt tryck, af *A. V. Bäcklund*. Zur Biologie der Muscheln. I. Die Wasserströmungen, von *H. Wallengren*. Zur Biologie der Muscheln. II. Die Nahrungsaufnahme, von *H. Wallengren*. Contributions à la connaissance de la flore du Nord-Ouest de l'Afrique et plus spécialement de la Tunisie. Deuxième série, par *S. Murbeck*. Researches into the theory of probability, by *C. V. L. Charlier*. Studier öfver pollenslangarnes irritationsrörelser. II, af *B. Lidforss*. Fysiografiska Sällskapets sammanträden 1904—1905. — **Bd. 17.** Contributions à la connaissance de la flore du Nord-Ouest de l'Afrique et plus spécialement de la Tunisie. Deuxième série, (Suite), par *S. Murbeck*. Om den afrikanska recurrensfebern, dess orsaker och utbredningssätt, af *S. Ribbing*. Om de Chasmopskalken och Trinucleusskiffern motsvarande bildningar i Skåne, af *E. Olin*. Om kroppars lösning och därmed närmast förvandta företeelser, af *A. V. Bäcklund*. Die Chininbehandlung der Malariaerkrankheiten und ihre Methodik, af *S. Ribbing*. Bidrag till *Pteranthernas* morfologi, af *S. Murbeck*. Bidrag till kännedomen om ceratopygeregionen, med särskild hänsyn till dess utveckling i Fogelsångstrakten, af *J. Chr. Moberg* och *C. O. Segerberg*. Om några Ginkgoväxter från kolgrufvorna vid Stabbarp i Skåne, af *A. Nathorst*. Ett manganhaltigt vatten och en brunstensbildning vid Björnstorp i Skåne, af *M. Weibull*. Tal vid Kongl. Fysiografiska Sällskapets i Lund minnesfest den 3 december 1906 öfver dess stiftare Anders Jahan Retzius, af *C. M. Fürst*. Kilian Stobæus d. ä. och hans brevväxling, af *C. M. Fürst*. Om Dirichlets problem vid värmeledningsekvationer, af *C. W. Oseen*. Die wintergrüne Flora, af *B. Lidforss*. Die Vesicarius-Gruppe der Gattung *Rumex*, af *S. Murbeck*. Fysiografiska Sällskapets sammanträden 1905—1906. — **Bd. 18.** Om trypanosoma-sjukdomarna, en orienterande översikt, af *S. Ribbing*. Typhus-Statistik aus dem Provinzialkrankenhause zu Lund von den Jahren 1887—1906, af *S. Ribbing*. Studier öfver Nissans hydrografi, af *A. Hennig*. Lösningars magnetiska och optiska karakterer, af *A. V. Bäcklund*. Observations on the genus *Rastrites* and some allied species of *Monograptus*, af *S. L. Törnqvist*. Fysiografiska Sällskapets sammanträden 1906—07. — **Bd. 19.** Ueber kinoplasmatische Verbindungsfäden zwischen Zellkern und Chromatophoren, af *B. Lidforss*. Om några föreningar mellan etyltioglykolsyra och kuprosalter, af *L. Ramberg*. Weitere Beiträge zur Kenntnis der Psychroclinie, af *B. Lidforss*. Ueber die Bewegung der Bahnebenen der Satelliten in unserem Planetensystem, af *C. V. L. Charlier*. Untersuchungen von elektrischen Schwingungen dritter Art in einem Lichtbogen, af *M. Siegbahn*. Fysiografiska Sällskapets sammanträden 1907—1908. — **Bd. 20.** Om Fyledalens gotlandium, af *J. Chr. Moberg* och *K. A. Grönvall*. Kreuzungsuntersuchungen an Hafer und Weizen, af *H. Nilsson-Ehle*. Studier öfver *Dictyograptusskiffern* och dess gränslager med särskild hänsyn till i Skåne förekommande bildningar, af *A. H. Westergård*. Beiträge zur Kenntnis der paläarktischen Ephemeriden, af *S. Bengtsson*. Die Unterschenkel- und Fussmuskulatur der Tetrapoden und ihr Verhalten zu der entsprechenden Arm- und Handmuskulatur, af *L. Ribbing*. Undersökning av tenn-silverlegeringarnas elektriska egenskaper. Termoelektrisk kraft och ledningsmotståndets temperaturkoefficient, af *E. Björnsson*. Fysiografiska Sällskapets sammanträden 1908—1909. — **Bd. 21.** Bidrag till mag- och duodenalsårets kirurgi, af *G. Petré*n. Index to N. P. Angelin's Palæontologia Scandinavica, with notes, by *A. H. Westergård*. Morphologisch-systematische Bemerkungen über *Ergasilus Sieboldii* Nordm. nebst vorläufigen Mitteilungen über die Lebensgeschichte des Tieres, von *T. Freidenfelt*. Zur Kenntnis der parasitischen Schnecken, von *N. Rosén*. Arvid Henrik Flormans brev till Anders Retzius, af *C. M. Fürst*. Der Musculus Protactor Hyoidei (*Geniohyoideus auct.*) und der Senkungsmechanismus des Unterkiefers bei den Knochenfischen. Zugleich ein Beitrag zur Kenntnis der Atembewegungen, von *O. Holmqvist*. Beitrag zur Frage: Welches Keimblatt bildet das Skelett der Wirbeltiere? von *N. Rosén*. Kleinere Muskelstudien. I. Die Vorderarm- und Handmuskulatur von *Sphenodon*. II. Die distale Extremitätenmuskulatur von *Pipa*, von *L. Ribbing*. Fysiografiska Sällskapets sammanträden 1909—1910.



## Lunds Universitets Årsskrift. N. F. Afd. 2. Bd 7.

K. Fysiografiska Sällskapets Handlingar. N. F. Bd 22.

Pris kr. 16: 00.

### Innehåll:

1. BLOCK, HENRIK, Några variationsformler inom integralekvationernas teori. (Pris 1: 00.)
  2. SIEGBAHN, MANNE, Magnetische Feldmessung. (Pris 2: 00.)
  3. PETRÉN, LOUISE, Extension de la méthode de Laplace aux équations
$$\sum_{i=0}^{n-1} A_{ii}(x, y) \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^n A_{0i}(x, y) \frac{\partial^i z}{\partial y^i} = 0$$
(Pris 5: 00.)
  4. CHARLIER, C. V. L., Die Lagrange'sche Gleichung im Bahnbestimmungsproblem. (Pris 1: 50.)
  5. ROSÉN, NILS, Contributions to the Fauna of the Bahamas. I. A general account of the Fauna, with remarks on the physiography of the Islands. II. The reptiles. III. The fishes. (Pris 2: 50.)
  6. NILSSON-EHLE, H., Kreuzungsuntersuchungen an Hafer und Weizen. II. (Pris 3: 00.)
  7. HOLMQVIST, OTTO, Studien in der von den NN. Trigeminus und Facialis innervierten Muskulatur der Knochenfische. I. Die Trigemino-Facialis-Muskulatur bei Gadus Callarias Linné. II. Zur vergleichenden Morphologie der MM. Intermandibularis, Protractor Hyoidei und Hyohyoideus. (Pris 3: 50.)
  8. BANG, IVAR, Eine neue Methode zur Zuckerbestimmung. (Pris 1: 00.)
- 
9. Fysiografiska Sällskapets sammanträden 1910—1911.

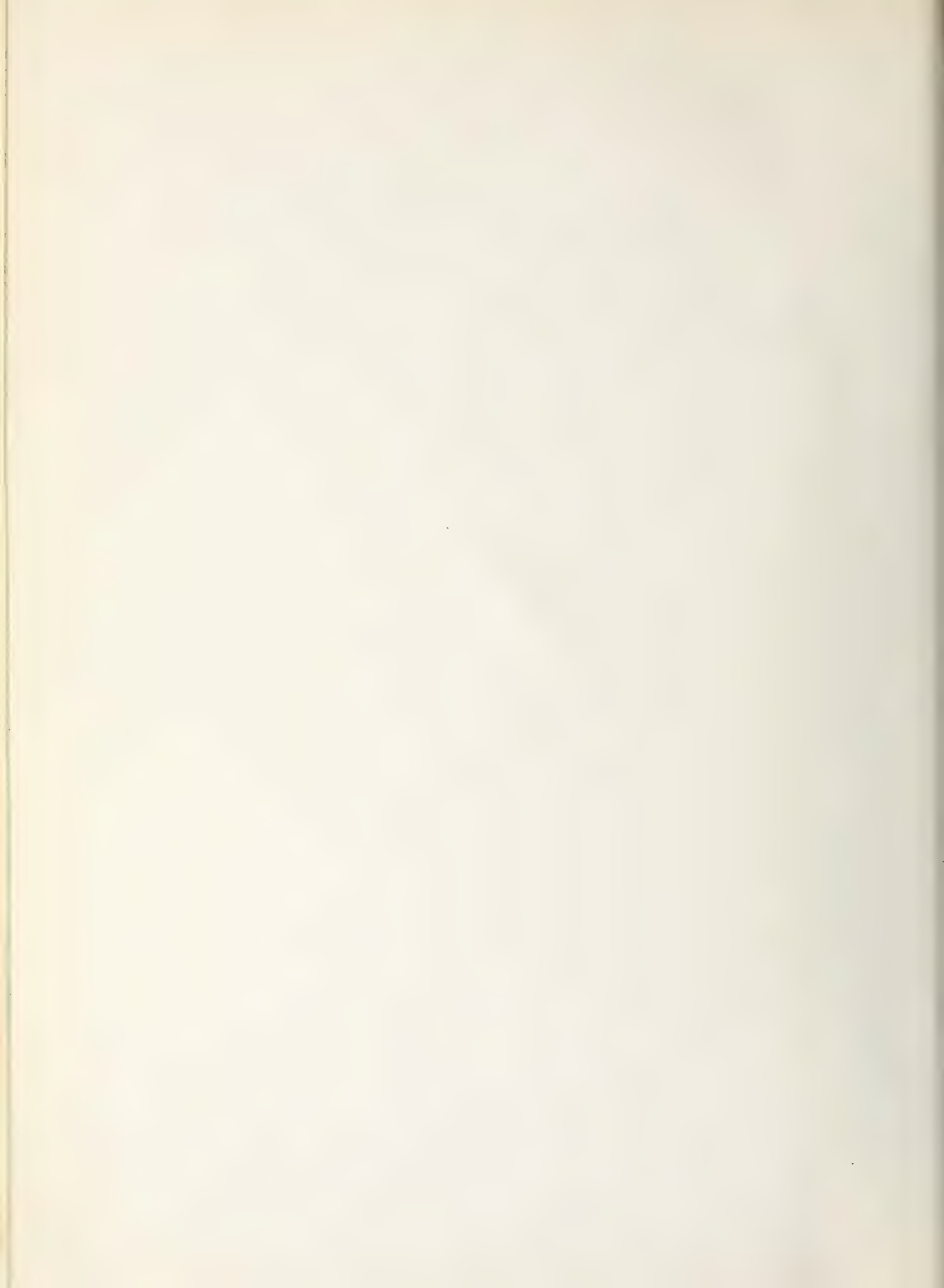
De närmast föregående bandens innehåll: se omslagets 2 och 3 sida.

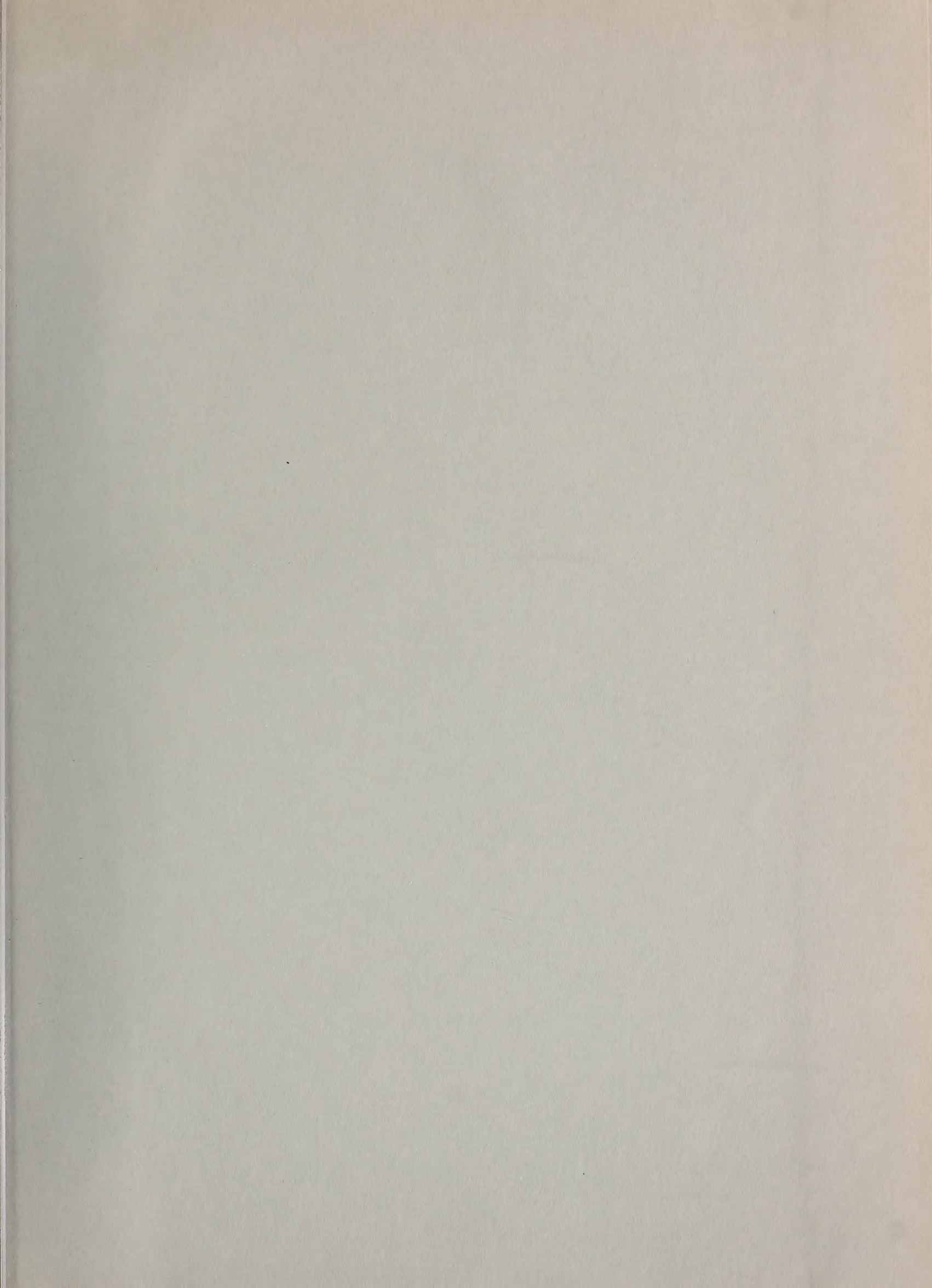
Hvarje afhandling säljes särskildt.

I bokhandeln finnes att tillgå: Innehållsförteckning, systematisk öfversikt och författareregister till Lunds Universitets Årsskrift, Tom. 1—40. Utarbetad af P. Sjöbeck. Lund, C. W. K. Gleerup, 1906. Pris 1 krona.



















SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES



3 9088 01357 4504